

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA D'ITALIA

RENDICONTI

DELLA

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

SERIE SETTIMA - VOLUME III

(in continuazione della Serie VI
della R. Accademia dei Lincei)



ROMA

REALE ACCADEMIA D'ITALIA

1942-XXI

Matematica. — *Operatori differenziali di ordine superiore negli spazi di Riemann.* Nota ⁽¹⁾ di MARIA PASTORI, presentata da UMBERTO CISOTTI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Si incontrano spesso in questioni di Meccanica o di Fisica matematica, classiche o relativistiche, operatori differenziali di ordine superiore che solo in parte corrispondono agli ordinari operatori dell'Analisi o del Calcolo vettoriale di uno spazio euclideo a tre dimensioni ⁽²⁾.

Questa Nota è dedicata appunto agli operatori differenziali di ordine superiore, che vengono presi in esame in modo generale e sistematico e per spazi riemanniani ad n dimensioni di metrica:

$$ds^2 = a_{ik} dx^i dx^k \quad (i, k \dots \text{ecc.} = 1, 2, \dots n) \quad (3).$$

Vengono messi in evidenza i collegamenti tra i vari operatori, le differenze che presenta il caso degli spazi di Riemann curvi da quello degli spazi euclidei, e l'influenza che ha il numero delle dimensioni dello spazio ambiente sul comportamento di alcuni di tali operatori.

1. - ESTENSIONE DEL GRADIENTE E DELLA DIVERGENZA.

L'OPERATORE Δ_2 .

a) L'operatore gradiente dell'ordinario calcolo vettoriale fa passare da uno scalare (tensore di rango zero) a un vettore (tensore di rango uno)

⁽¹⁾ Pervenuta all'Accademia il 30 giugno 1941-XIX.

⁽²⁾ Alcuni di essi vennero recentemente studiati da CISOTTI, limitatamente però all'ordinario spazio euclideo, allo scopo di darne interessanti applicazioni alla Meccanica e alla Fisica matematica. Cfr. U. CISOTTI, *Campi tensoriali potenziali*. (« Rend. R. Acc. d'Italia », ser. 7^a, vol. II, 1941, pag. 129-141); *Sistemi continui conservativi*. (*Ibidem*, pag. 294-301); *Campi tensoriali potenziali di rango superiore*. (*Ibidem*, pag. 586-591).

⁽³⁾ È adottata la solita convenzione di sottointendere la sommatoria, da 1 ad n , relativa agli indici saturati.

mediante l'ordinaria derivazione, che coincide in questo caso con la derivazione tensoriale:

$$[1] \quad \text{grad } f = V_i = \frac{\partial f}{\partial x^i} = f_{,i} \quad (1).$$

La sua più naturale estensione al tensore m -plo $T = T_{i_1 i_2 \dots i_m}$ è la seguente:

$$[1'] \quad \text{grad } T = T_{i_1 i_2 \dots i_m i_{m+1}}$$

che fa passare da un tensore al suo derivato ⁽²⁾.

Come al tensore derivato primo si giunge applicando l'operatore gradiente, così al derivato di ordine superiore si giunge applicando più volte l'operatore gradiente, o, se si vuole, applicando un gradiente di ordine superiore:

$$[2] \quad \text{grad}_k T = T_{i_1 i_2 \dots i_m i_{m+1} \dots i_{m+k}}$$

In particolare, partendo da una funzione, si ha:

$$[2'] \quad \text{grad}_k f = f_{,i_1 i_2 \dots i_k} \quad (3).$$

Negli spazi euclidei il tensore [2] è simmetrico rispetto agli indici di derivazione, il tensore [2'] è completamente simmetrico. Negli spazi di Riemann non euclidei il tensore [2] non presenta in generale simmetrie, il tensore [2'] è simmetrico solo rispetto ai primi due indici (ciò vale anche per le varietà non riemanniane a connessione simmetrica).

b) L'operatore divergenza dell'ordinario calcolo vettoriale fa passare da un vettore (tensore di rango uno) a uno scalare (tensore di rango zero) mediante saturazione dell'unico indice tensoriale con un indice di derivazione. Si ha infatti:

$$[3] \quad \text{div } V = V^i_{,i} = V^i_{|i}.$$

⁽¹⁾ Qui e nel seguito è adottata per brevità la notazione che identifica un vettore o un tensore con la generica componente.

⁽²⁾ Cfr. M. PASTORI, *Proprietà dei tensori emisimmetrici coniugati*. («Rend. Lincei», ser. 6^a, vol. XVI, 1932, pagg. 311-316); Ved. anche A. PALATINI, *Concetto di vettore generalizzato, prodotto interno ecc.* («Rend. Seminario Matem. di Padova», anno IV, 1933, pagg. 122-139).

Secondo la denominazione adottata da CISOTTI nella terza Nota citata, il gradiente di un vettore o di un tensore rientra nella categoria dei campi tensoriali potenziali di rango superiore. Qui si è conservata la denominazione di gradiente, già usata, e che rappresenta un'ovvia estensione del caso ordinario.

⁽³⁾ U. CISOTTI, loco primo citato. In esso viene accennato alla possibilità di estendere le proprietà ivi osservate agli spazi di Riemann. In questa Nota (cfr. anche § 4) si possono, tra l'altro, rilevare le modificazioni che vengono apportate in tale estensione.

Lo stesso operatore, applicato a un tensore m -plo, fa passare ad un tensore $m-1$ -plo mediante saturazione di uno degli indici del tensore con un indice di derivazione (¹). Se il tensore non presenta simmetrie, ci sono dunque m distinte divergenze perchè:

$$[4] \quad T_{i_1 i_2 \dots i_{m-1} j} \stackrel{!}{=} T_{i_1 i_2 \dots i_m} \stackrel{!}{=} \dots \stackrel{!}{=} T_{i_1 i_2 \dots i_{m-1} i_m} \stackrel{!}{=} T_{j i_2 \dots i_{m-1} i_m}.$$

Più comunemente però si indica con $\text{div } T$ il primo dei tensori [4], si pone cioè:

$$[3'] \quad \operatorname{div} T = T_{i_1 i_2 \dots i_{m-1} j}{}^{/j}$$

indicando con altri simboli ($\text{div}' T$, $\text{div}'' T$ ecc.) i rimanenti.

Anche l'operatore divergenza può essere applicato più volte a un tensore, riducendone via via il rango, fino a dare un invariante quando si sia applicato m volte. Posto $\text{div}_2 = \text{div div}$, $\text{div}_3 = \text{div div}_2$ ecc. e attenendoci al significato [3'] si avrà

[illegible]

Naturalmente saturando gli indici in ordine diverso si hanno in generale diverse divergenze di ordine superiore e, per un tensore che non presenti simmetrie, si hanno $m!$ divergenze m -ple.

Così per il tensore $[2']$ gradiente m -plo di uno scalare, mentre negli spazi euclidei c'è una sola divergenza di qualunque ordine, essendo il tensore completamente simmetrico ⁽²⁾, ciò non ha luogo negli spazi non euclidei, per $m \geq 3$, la simmetria conservandosi solo nei primi due indici.

c) L'operatore Δ_z , quando si applichi a uno scalare, dà luogo ancora a uno scalare e può esprimersi, coi simboli dell'ordinario calcolo vettoriale

$$[6] \quad \Delta_2 = \operatorname{div} \operatorname{grad}.$$

È naturale di conservargli lo stesso significato quando si applichi ad un tensore e ci si attenga al significato [1'] e [3'] degli operatori che figurano a secondo membro. Si ha:

$$[6'] \quad \Delta_2 T_{i_1 i_2 \dots i_m} = T_{i_1 i_2 \dots i_m} / k = T_{i_1 i_2 \dots i_m} / k \quad (3),$$

(¹) U. CISOTTI, *Sulla divergenza dei tensori*. (« Rend. Lincei », ser. 6^a, vol. IV, 1927, pagg. 81-84).

(2) U. CISOTTI, loco primo citato.

(³) Cfr., ad esempio, B. FINZI, *Su di una forma delle equazioni indefinite dei sistemi flessibili elastici*. (« Rend. R. Istit. Lombardo », vol. LXVII, 1934, pagg. 261-

In particolare da [2'] si ha:

$$[6''] \quad \operatorname{div} \operatorname{grad}_m f = \Delta_2 \operatorname{grad}_{m-1} f.$$

OSSERVAZIONE. — Dal punto di vista formale tutte le operazioni che figurano in questo paragrafo si riducono alla derivazione covariante e a saturazioni mediante il tensore fondamentale.

$$\text{Es.: } \operatorname{div} T = T_{i_1 i_2 \dots i_{m-1}}{}^{k h} a^{k h} \quad \operatorname{div}_2 T = T_{i_1 \dots i_{m-2} k i / j h} a^{i j} a^{k h} \text{ ecc.}$$

2. — VARIE ESTENSIONI DEL ROTORE.

L'operatore rotore dell'ordinario calcolo vettoriale fa passare da un vettore a un altro vettore le cui componenti sono differenze di derivate delle componenti del vettore dato. Con riferimento a coordinate generali si ha:

$$[7] \quad \operatorname{rot} V = R \quad \text{con} \quad \begin{cases} R_i = \varepsilon_{i j h} V^{h / j} = \varepsilon_{i \dots}{}^{j h} V_{h / j} \\ R^i = \varepsilon^{i j h} V_{h / j} = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{\partial V_h}{\partial x^j} - \frac{\partial V_j}{\partial x^h} \right). \end{cases}$$

Poichè la saturazione degli indici si fa in questo caso col tensore ε anzi che col tensore fondamentale, come nei casi precedenti, così le possibili estensioni dell'operatore rotore sono legate al numero delle dimensioni dello spazio ambiente, a differenza di quel che avviene per gli operatori considerati al paragrafo precedente.

Per un tensore m -plo di una varietà a n dimensioni l'estensione di rotore data da CISOTTI ⁽¹⁾ è la seguente:

$$[7'] \quad \operatorname{rot} T = R \quad \text{con} \quad R_{i_1 \dots i_{m-1}}{}^{k_1 \dots k_{n-2}} = \varepsilon^{k_1 \dots k_{n-2} j i_m} T_{i_1 \dots i_{m-1} i_m / j} \\ = \frac{(-1)^c}{\sqrt{a}} (T_{i_1 \dots i_{m-1} k_n / k_{n-1}} - T_{i_1 \dots i_{m-1} k_{n-1} / k_n})$$

dove c rappresenta la classe della permutazione $k_1 k_2 \dots k_n k_{n-1}$.

Si può ora osservare che, essendo $\operatorname{rot} T$ un tensore $(m-1+n-2)$ -plo, la condizione perchè sia dello stesso rango del tensore dato è che sia $m-1+n-2 = m$ e cioè $n = 3$. In ogni varietà a tre dimensioni, e

269). Nell'ordinario calcolo vettoriale il simbolo Δ_2 (o Δ) viene indicato con Δ'_2 (o Δ') quando è applicato a un vettore invece che a uno scalare.

⁽¹⁾ U. CISOTTI, *Sul rotore dei tensori*. (« Rend. Lincei », serie 6^a, vol. VII, 1928, pagg. 169-172).

solo in essa, l'operatore rotore conserva il rango di qualunque tensore come già avveniva per un vettore dello spazio ordinario. Per le varietà a un numero di dimensioni diverso da tre ciò non avviene. E precisamente, per $n = 3 + k$ l'applicazione del rotore fa aumentare il rango di k , mentre per $n = 2$ (l'unico caso che interessi con $n < 3$), l'applicazione del rotore fa diminuire il rango di uno.

Nelle varietà euclidee, per la simmetria del gradiente di ordine superiore rispetto agli indici di derivazione e per l'emissimmetria del tensore ε , si ha:

$$[8] \quad \begin{cases} \text{rot grad } T = \varepsilon^{k_1 \dots k_{n-2} jh} T_{i_1 \dots i_m jh} = 0 \\ \text{div rot } T = \varepsilon^{k_1 \dots k_{n-2} jm} T_{i_1 \dots i_m jk_{n-2}} = 0 \end{cases}$$

come nell'ordinario calcolo vettoriale; ma negli spazi non euclidei le [8] non hanno luogo.

Un'altra estensione del rotore che, come la precedente, contiene il rotore ordinario come caso particolare, è quella che ho chiamato rotore completo ⁽¹⁾ e che si può applicare solo quando $m \leq n - 1$. La corrispondente formola si ha dalla [7'] saturando tutti gli indici di covarianza con altrettanti di controvarianza. Indicando questo nuovo operatore con Rot, si ha:

$$\begin{aligned} [7''] \quad \text{Rot } T = R \quad \text{con} \quad R^{k_1 \dots k_{n-m-1}} &= \varepsilon^{k_1 \dots k_{n-m-1} i_1 \dots i_{m-1} j} T_{i_1 \dots i_{m-1} j} \\ &= \frac{(-1)^c}{\sqrt{a}} \sum_{k_{n-m} \dots k_n} T_{k_{n-m} \dots k_{n-2} k_n k_{n-1}} \\ &= \frac{(-1)^c}{\sqrt{a}} \sum_{k_{n-m} \dots k_n} \frac{\partial T_{k_{n-m} \dots k_{n-2} k_n}}{\partial x^{k_{n-1}}} \end{aligned}$$

dove con S è indicata la somma estesa a tutte le permutazioni degli indici $k_{n-m} k_{n-m+1} \dots k_n$, ogni termine della quale ha il segno $+$ o $-$ secondo che corrisponde a una permutazione di classe pari o dispari rispetto a quella indicata, presa come fondamentale.

E poichè in una tale somma si elidono tutti i termini contenenti i simboli di CHRISTOFFEL ⁽²⁾, così si ottiene l'ultima espressione del rotore completo [7''] del tutto analoga all'ultima delle [7].

Per il rotore completo valgono due formole come le [8], non solo per le varietà euclidee, ma per tutte le varietà riemanniane, anzi anche per

⁽¹⁾ M. PASTORI, loco citato.

⁽²⁾ M. PASTORI, loco citato.

varietà metriche non riemanniane purchè a connessione simmetrica. Si ha cioè ⁽¹⁾:

$$[9] \quad \begin{cases} \text{Rot grad } T = 0 \\ \text{div Rot } T = 0. \end{cases}$$

Per la sua definizione [7''] il rotore completo di un tensore è identicamente nullo quando il tensore è simmetrico, o anche quando presenta una simmetria parziale rispetto a due suoi indici almeno. Perciò esso si presenta meno del rotore ordinario in quelle questioni che riguardano i tensori generici, mentre acquista particolare interesse in quelle questioni dove entrano i tensori emissimmetrici ⁽²⁾ o vettori generalizzati ⁽³⁾.

OSSERVAZIONE. — Dal punto di vista formale tutte le operazioni che figurano in questo paragrafo si riducono alla derivazione covariante e alla saturazione mediante il tensore ϵ . Si potrebbero pensare altre combinazioni di queste operazioni, alcune delle quali conterrebbero ancora, come casi particolari, la [7''] o la [7'] e quindi sempre la [7]. Così se si costruisce un gradiente di ordine superiore del tensore dato, indi col tensore ϵ si saturano in parte o completamente (ammesso naturalmente che il numero delle dimensioni dello spazio ambiente lo consenta) gli indici del nuovo tensore così ottenuto, si può osservare quanto segue:

a) Se col tensore ϵ si saturano tutti gli indici del tensore dato e nessuno degli indici di derivazione, si ottiene, a meno del fattore $\frac{1}{\sqrt{a}}$, il gradiente di ordine superiore della parte emissimmetrica del tensore dato.

b) Se col tensore ϵ si saturano tutti gli indici di derivazione e nessuno degli indici del tensore dato, si ottengono, a meno del fattore $\frac{1}{\sqrt{a}}$, le formole di commutazione delle derivate covarianti di ordine superiore ⁽⁴⁾.

c) Se col tensore ϵ si saturano tutti gli indici di derivazione ed altrettanti del tensore primitivo, si ottengono, a meno del fattore $\frac{1}{\sqrt{a}}$, alcune

⁽¹⁾ M. PASTORI, loco citato.

⁽²⁾ M. PASTORI, loco citato.

⁽³⁾ A. PALATINI, loco citato. Il PALATINI prende, per definizione, come rotore di un tensore emissimmetrico (vettore generalizzato) la divergenza del suo supplementare o coniugato. A meno di un fattore numerico, il rotore così definito coincide, per una proprietà dimostrata nella mia Nota più volte citata, con quello che avevo chiamato rotore completo.

⁽⁴⁾ M. PASTORI, *Formole di commutazione nella derivazione dei tensori*. (« Rend. Lincei », ser. 6^a, vol. VIII, 1928, pagg. 186-190).

formole di commutazione parziale relative ai tensori derivati ⁽¹⁾ (questa operazione comprende, come caso particolare, la [7] quando l'indice di derivazione sia uno solo).

d) Se col tensore ϵ si saturano tutti gli indici si ottiene lo zero, non appena il gradiente sia almeno secondo (questa operazione contiene, come caso particolare la [7''] quando l'indice di derivazione sia uno solo e mostra come quest'ultimo caso sia essenzialmente diverso dagli altri). Si ha infatti (?):

$$\varepsilon^{k_1 \cdots k_n - m - k} i_1 \cdots i_{m+k} T_{i_1 i_2 \cdots i_m, i_{m+1} \cdots i_{m+k}} = 0$$

non appena k sia almeno due.

3. — OPERATORI ITERATI.

L'iterazione degli operatori gradiente e divergenza è già stata considerata al § 1. Essa dà luogo rispettivamente a gradienti e divergenze di ordine superiore.

L'iterazione del Δ_2 dà luogo a quegli operatori differenziali di ordine quarto, sesto, ..., $2k$ -esimo che è naturale chiamare $\Delta_4, \Delta_6, \dots, \Delta_{2n}$. Es.:

$$[10] \quad \Delta_4 T = T_{i_1 \dots i_m / k \dots j} = T_{i_1 \dots i_m' k' h' l} a^{kh} a^{jl}.$$

Quanto all'iterazione del rotore ordinario (l'aggettivo è stato aggiunto per distinguerlo dal rotore completo, ma in generale verrà sottointeso), per quanto si è notato al paragrafo precedente, in una varietà a tre dimensioni essa produrrà sempre un tensore dello stesso rango di quello di partenza, qualunque sia il numero delle volte che si è applicato l'operatore rotore.

In una varietà a due dimensioni il rango diminuisce via via di una unità ogni volta che si applica il rotore.

In una varietà a quattro dimensioni il rango aumenta via via di una unità ogni volta che si applica il rotore e, in generale, in una varietà a $3 + k$ dimensioni il rango del tensore aumenta ogni volta di k .

Consideriamo, ad es., i seguenti casi, per $n = 3$:

$$[11] \quad \left. \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{V} &= \mathbf{R}_1 \quad \text{con} \quad R_1^i = \varepsilon^{ijh} V_{h/j} \\ \text{rot}_2 \mathbf{V} &= \mathbf{R}_2 \quad \text{con} \quad R_k = \varepsilon_{kli} R_1^l \\ &= \varepsilon_{kli} \varepsilon^{ijh} V_{h/j}^l \\ \text{etc.} \end{aligned} \right\} \quad m=1)$$

(¹) M. PASTORI, *Commutazione totale e parziale relativa ai tensori derivati*. (*Ibidem*, vol. IX, 1929, pagg. 474-479).

(²) M. PASTORI, loco ultimo citato.

$$\begin{aligned}
 & m = 2) \\
 [12] \quad & \left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \mathbf{T} = \mathbf{R}_1 \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} R_{1k_1}^i = \varepsilon^{ijk_2} T_{k_1 k_2}{}^j \\ R_{ik_1} = \varepsilon_i{}^{jk_2} T_{k_1 k_2}{}^j \end{array} \\ \text{rot}_2 \mathbf{T} = \mathbf{R}_2 \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} R_{2i}^s = \varepsilon^{slk_1} R_{ik_1}{}^l \\ \quad \quad \quad = \varepsilon^{slk_1} \varepsilon_i{}^{jk_2} T_{k_1 k_2}{}^j / l \\ R_{2i}^{si} = \varepsilon^{slk_1} \varepsilon^{ijk_2} T_{k_1 k_2}{}^j / l \end{array} \end{array} \right. \\
 & \text{ecc.}
 \end{aligned}$$

ed espressioni analoghe si avrebbero negli altri casi.

Sull'ultima delle [12] possiamo osservare che, se \mathbf{T} è un generico tensore simmetrico, il suo rotore secondo è il tensore dato da FINZI per esprimere la più generale soluzione delle equazioni indefinite di equilibrio dei mezzi continui dell'ordinario spazio euclideo (¹).

Veramente il tensore di FINZI differisce dall'ultimo delle [12] per l'ordine degli indici di derivazione, il che però, negli spazi euclidei, non ha importanza.

Anche nella soluzione analoga data da FINZI per gli spazi a curvatura costante (²) entra, come primo termine, un tensore che differisce dall'ultimo delle [12] solo per l'ordine degli indici di derivazione; è interessante osservare che anche in questo caso esso coincide col rotore secondo di un generico tensore simmetrico. Si ha infatti, in generale, per le formole di commutazione delle derivate seconde covarianti, indicando con R_{iklj} il tensore di curvatura:

$$\varepsilon^{slk_1} \varepsilon_i{}^{k_2} (T_{k_1 k_2}{}^l - T_{k_1 k_2}{}^j) = \varepsilon^{slk_1} \varepsilon^{ijk_2} (T_{k_1 k_2}{}^p R_{k_1 pl} + T_{k_1}{}^p R_{k_2 pl}).$$

Ma se lo spazio è a curvatura costante K , ricordando che:

$$[13] \quad R_{iklj} = K (a_{il} a_{kj} - a_{ij} a_{kl})$$

si verifica facilmente che il secondo membro dell'ultima eguaglianza si annulla.

Ritornando allo spazio ordinario e ricordando le condizioni di congruenza di SAINT-VENANT (³):

$$\varepsilon^{slk_1} \varepsilon^{ijk_2} \xi_{k_1 k_2} l_j = 0$$

(¹) B. FINZI, *Integrazione delle equazioni indefinite della meccanica dei sistemi continui*. Note I e II. (« Rend. Lincei », ser. 6^a, vol. XIX, 1934, pagg. 578-584 e 620-623)

(²) B. FINZI, loco ultimo citato.

(³) B. FINZI, loco primo citato.

possiamo osservare che esse esprimono che si deve annullare il rotore secondo del tensore di deformazione $\xi_{k_1 k_2}$.

Analogamente le condizioni di congruenza per le deformazioni di una superficie ⁽¹⁾ ($n = 2$) dicono ancora che deve essere nullo il rotore secondo del tensore di deformazione

$$\epsilon^{hk} \epsilon^{ij} \xi_{ih/jk} = 0$$

se la superficie è sviluppabile, mentre se la superficie è a curvatura costante diventano:

$$\epsilon^{hk} \epsilon^{ij} \xi_{ih/jk} = -K\theta$$

con $\theta = \xi_i^i$, ed esprimono che tale rotore secondo deve eguagliare, in valore assoluto, il prodotto del coefficiente di dilatazione per la curvatura.

Queste osservazioni mostrano che, non solo il rotore secondo di un vettore entra, come da tempo è stato notato, nelle questioni di meccanica dei sistemi continui, ma vi entra anche il rotore secondo di un tensore doppio.

Naturalmente come si è iterato il rotore ordinario, così si può iterare il rotore completo. Osserviamo solo a questo proposito che, qualunque sia il numero delle dimensioni dello spazio ambiente, il rotore completo secondo di un tensore è sempre dello stesso rango del primitivo e, naturalmente, ciò si verifica anche per il quarto, il sesto, ecc.

Infatti il rango di $\text{Rot } T$ è $n-m-1$; quello di $\text{Rot}_2 T$ è $n-(n-m) = m$. ⁽²⁾

4. - OPERATORI COMMUTABILI NEGLI SPAZI EUCLIDEI.

È stato osservato al § 1, formola [6''], che:

$$[14] \quad \text{div grad}_m f = \Delta_2 \text{grad}_{m-1} f = f_{/i_1 i_2 \dots i_{m-1}}{}^k{}_{k.}$$

Per gli spazi euclidei è anche ⁽³⁾:

$$\text{div grad}_m f = \text{grad}_{m-1} \Delta_2 f$$

ossia i due operatori Δ_2 e grad_{m-1} sono commutabili.

⁽¹⁾ B. FINZI, *Sopra il tensore di deformazione di un velo*. (« Rend. Istit. Lombardo », vol. LXIII, 1930, pagg. 975-982).

⁽²⁾ V. L. CASTOLDI, *Estensione ai vettori generalizzati di una formula dell'ordinaria analisi vettoriale*. (« Boll. dell'Unione Mat. Italiana », vol. XV. 1936, pagg. 219-221) dove però la formola è valida solo per varietà euclidee (cfr. anche il § 6 di questa Nota).

⁽³⁾ U. CISOTTI, loco primo citato.

Negli spazi non euclidei ciò *non* avviene. Si ha infatti:

$$[14'] \quad \text{grad}_{m-1} \Delta_2 f = f /_{\cdot k i_1 i_2 \dots i_{m-1}}^k$$

e l'eguaglianza degli ultimi membri delle [14] e [14'] implicherebbe la commutabilità degli indici di derivazione covariante. È però sempre possibile calcolare la differenza

$$\text{div grad}_m f - \text{grad}_{m-1} \Delta_2 f = (f /_{i_1 \dots i_{m-1} h k} - f /_{h k i_1 \dots i_{m-1}}) a^{h k};$$

basta applicare un numero sufficiente di volte le formule di commutazione delle derivate seconde covarianti e quelle che si ottengono da esse per derivazione.

Diamo i seguenti esempi, validi qualunque sia n :

$$m = 2)$$

$$[15] \quad f /_{i k}^k - f /_{\cdot k i}^k = - f^{/l} R_{li}$$

dove R_{li} è il tensore di RICCI-EINSTEIN, tensore doppio simmetrico che si ottiene per contrazione dal tensore di curvatura: $R_{li} = R_{hli}^h$.

Per le varietà a due dimensioni e per tutte le varietà a curvatura costante, si ha, indicando con K la curvatura gaussiana:

$$[13'] \quad R_{li} = -(n-1) K a_{li}$$

come si ottiene subito dalla [13] che è valida, oltre che per le varietà a curvatura costante, anche per tutte le varietà a due dimensioni; e la precedente diviene:

$$[15'] \quad \text{div grad}_2 f - \text{grad} \Delta_2 f = (n-1) K \text{grad} f.$$

Un'eguaglianza analoga si ha pure per gli spazi chiamati di EINSTEIN ⁽¹⁾, per i quali il tensore di RICCI-EINSTEIN è isotropo: $R_{li} = \frac{1}{n} R a_{li}$, dove R indica l'invariante lineare di R_{li} .

$$m = 3)$$

$$[16] \quad f /_{i k r}^r - f /_{\cdot r i k}^r = 2 f^{/l} R_{lik} - f /_{\cdot i}^l R_{lk} - f /_{\cdot k}^l R_{li} - f^{/l} R_{lik} /^r - f^{/l} R_{li} /_k$$

che diviene per gli spazi di curvatura costante:

$$[16'] \quad f /_{i k r}^r - f /_{\cdot r i k}^r = -2 K a_{ik} \Delta_2 f + 2 n K f /_{ik}.$$

⁽¹⁾ Cfr., ad esempio, L. P. EISENHART, *Riemannian Geometry*, Princeton, 1926, pag. 92.

Quest'ultima, indicando con α il tensore fondamentale, si può scrivere:

$$[16''] \quad \operatorname{div} \operatorname{grad}_3 f - \operatorname{grad}_2 \Delta_2 f = -2K\alpha \Delta_2 f + 2nK \operatorname{grad}_2 f.$$

E formole dello stesso tipo, naturalmente via via più complesse, si avrebbero anche negli altri casi.

Si è considerata la non commutabilità degli operatori gradiente di ordine superiore e Δ_2 quando siano applicati a uno scalare; naturalmente lo stesso avviene quando siano applicati a un tensore. E col procedimento sopra adottato si possono avere anche le formole relative a questo caso, che saranno più complesse delle precedenti, sia per la maggior complessità di un tensore rispetto a uno scalare, sia perchè vengono a mancare le semplificazioni apportate dalla simmetria rispetto ai primi due indici di derivazione che si ha solo se si parte da una funzione.

5. - INVARIANTI COINCIDENTI NEGLI SPAZI EUCLIDEI.

Negli spazi euclidei, partendo da una funzione, i soli invarianti che si possono costruire mediante successive derivazioni e saturazioni coincidono con quelli, già da tempo considerati nell'analisi, che provengono dall'iterazione dell'operatore Δ_2 . Essi sono:

$$[17] \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta_2 f = f_{|k}{}^k \\ \Delta_4 f = f_{|k}{}^k{}_{;i}{}^i \\ \text{ecc.} \end{array} \right.$$

Negli spazi non euclidei, mentre c'è un solo invariante di secondo ordine, il $\Delta_2 f$, ci sono due invarianti di quarto ordine, il $\Delta_4 f$ e

$$[18] \quad \operatorname{div}_2 \operatorname{grad}_2 f = f_{|ik}{}^{kl} = f_{|ik}{}^{ik}{}_{;h}{}^h.$$

Col procedimento indicato nel paragrafo precedente si calcola facilmente la differenza:

$$\operatorname{div}_2 \operatorname{grad}_2 f - \Delta_4 f = (f_{|ikjh} - f_{|ijkh}) a^{ij} a^{hk}.$$

Si trova:

$$[19] \quad f_{|ik}{}^{ik}{}_{;h}{}^h - f_{|i}{}^i{}_{;k}{}^k = -f^{ij} R_{ij} - f^{il} R_{lh}.$$

Nell'ultimo termine entra la divergenza del tensore doppio di RICCI-EINSTEIN che si esprime, come è noto, mediante il gradiente del suo invariante lineare R ⁽¹⁾:

$$R_{ih}{}^{/h} = \frac{1}{2} R_{/i}.$$

La formola precedente diviene quindi:

$$[19'] \quad \text{div}_2 \text{grad}_2 f - \Delta_4 f = -f^{/ij} R_{ij} - \frac{1}{2} f^{/i} R_{/i}.$$

E per gli spazi di curvatura costante si ha, per la [13']:

$$[19''] \quad \text{div}_2 \text{grad}_2 f - \Delta_4 f = (n-1) K \Delta_2 f.$$

Formole analoghe alle precedenti, ma naturalmente più complesse, si possono trovare con lo stesso procedimento per gli invarianti di sesto ordine. Essi non sono soltanto i due corrispondenti ai precedenti

$$\text{div}_3 \text{grad}_3 f = f_{/ikr...}{}^{rk i}$$

$$\Delta_6 f = f_{/i...k...r}{}^{i k r}$$

ma anche

$$\text{div}_2 \text{grad}_2 \Delta_2 f = f_{/i...kr...}{}^{i kr} = f_{/i...kr}{}^{i kr}$$

e finalmente quelli che si ottengono applicando quegli operatori che si sono chiamati al paragrafo 1 div' , div'' , ecc.; essi sono:

$$f_{/ikr...}{}^{ikr} \quad f_{/ikr...}{}^{kri}$$

6. — COLLEGAMENTI E VERIFICHE.

I risultati ottenuti negli ultimi due paragrafi non sono tra loro indipendenti. Essi possono facilmente venir tra loro collegati e prestarsi ad opportune verifiche.

Così dalla [15] del paragrafo 4 si ottiene facilmente la [19] del paragrafo 5. Basta costruire l'invariante dei due membri mediante derivazione e saturazione dell'unico indice libero i ; in altre parole, basta eguagliare la divergenza dei due vettori che figurano nei due membri della [15].

La [16] del paragrafo 4 si presta a un altro tipo di verifica. Costruendo l'invariante lineare dei due membri, e cioè saturando gli indici liberi i e k

(¹) T. LEVI-CIVITA, *Fondamenti di meccanica relativistica*. (Bologna 1928, pagg. 95-96).

con quelli del tensore fondamentale si deve avere lo zero da entrambi i membri, perchè dal primo si ottiene $\Delta_4 f = \Delta_4 f$. È facile verificare che anche il secondo dà zero ricordando le proprietà del tensore di curvatura.

Anche le formole del paragrafo 3, relative ai rotori di ordine superiore possono essere collegate con quelle degli altri paragrafi, e ciò sfruttando i legami tra i due tensori ε e α . Ne diamo due esempi che si collegano a questioni meccaniche.

a) Nelle equazioni indefinite dell'elasticità negli spazi a tre dimensioni di curvatura costante date da FINZI ⁽¹⁾, si incontra una differenza tra due invarianti del tipo del primo membro della [19] o [19']. Essa è:

$$[20] \quad T_{i \cdot / k \cdot}^{i / k} - T_{ik}^{/k i}$$

dove T è un generico tensore doppio simmetrico. (Cfr. § 3). È facile collegare la [20] con $\text{rot}_2 T$. Si ha infatti:

$$\begin{aligned} T_{i \cdot / k \cdot}^{i / k} - T_{ik}^{/k i} &= T_{ik/jh} (a^{ik} a^{jh} - a^{ij} a^{kh}) \\ &= T_{ik/jh} \varepsilon^{ijh} \varepsilon_i^{kj} \\ &= \alpha_{lr} \varepsilon^{lzh} \varepsilon^{rjk} T_{ik/jh} \\ &= \alpha_{lr} \varepsilon^{lhi} \varepsilon^{rjk} T_{ik/jh}. \end{aligned}$$

L'espressione ottenuta rappresenta l'invariante lineare del tensore doppio $\varepsilon^{lhi} \varepsilon^{rjk} T_{ik/jh} = \text{rot}_2 T$ (cfr. formola [12]).

Dunque l'invariante [20] che figura nelle equazioni indefinite dei corpi elastici isotropi di uno spazio di curvatura costante è l'invariante lineare del rotore secondo di T .

Adottando il simbolo $\mathfrak{J}_1 T$ per l'invariante lineare di un tensore, si ha quindi per una varietà riemanniana a tre dimensioni:

$$[21] \quad \Delta_2 \mathfrak{J}_1 T - \text{div}_2 T = \mathfrak{J}_1 \text{rot}_2 T.$$

E se $T = \text{grad}_2 f$, la formola precedente diviene (portando il secondo termine a secondo membro):

$$[21'] \quad \Delta_4 f = \text{div}_2 \text{grad}_2 f + \mathfrak{J}_1 \text{rot}_2 \text{grad}_2 f$$

che per gli spazi euclidei si riduce a un'identità evidente, annullandosi il secondo termine del secondo membro.

b) Nelle equazioni indefinite dell'equilibrio o del movimento dei corpi elastici o dei fluidi viscosi di varietà riemanniane ad n dimensioni

⁽¹⁾ B. FINZI, loco primo citato, § 4.

entrano le due divergenze del tensore doppio grad \mathbf{V} , dove \mathbf{V} è il vettore spostamento nel caso elastico, il vettore velocità nel caso fluido.

Ho già avuto occasione di calcolare la differenza di queste due divergenze ⁽²⁾; essa è:

$$[22] \quad V_{i/j}{}^j - V_{j/i}{}^j = \varepsilon_{i i_1 \dots i_{n-3} i_{n-2}} \varepsilon^{i_1 \dots i_{n-2} h k} V_{k/h}{}^j.$$

L'espressione del secondo membro è (cfr. § 3) $\text{Rot}_2 \mathbf{V}$ che, solo nel caso di $n = 3$, coincide con $\text{rot}_2 \mathbf{V}$ ⁽³⁾.

Quanto alle due divergenze del primo membro, la prima $V_{i/j}{}^j$ è $\Delta_2 \mathbf{V}$, la seconda solo per gli spazi euclidei coincide con $V_{j \cdot i}{}^j = \text{grad div } \mathbf{V}$. Per gli spazi riemanniani si ha:

$$[23] \quad V_{j/i}{}^j - V_{j/i}{}^j = V^h R_{hi}$$

dove R_{hi} è il tensore di RICCI-EINSTEIN (cfr. § 4).

Per gli spazi di curvatura costante K , o per le varietà a due dimensioni, la [23] diviene:

$$[23'] \quad V_{j/i}{}^j - V_{j/i}{}^j = -(n-1) K V_i$$

e una formola dello stesso tipo si ha per gli spazi di EINSTEIN (cfr. § 3).

Tenendo conto delle [22] e [23'] si ha, per uno spazio di curvatura costante:

$$[24] \quad \Delta_2 \mathbf{V} - \text{grad div } \mathbf{V} = \text{Rot}_2 \mathbf{V} + (n-1) K \mathbf{V}.$$

Per gli spazi a tre dimensioni di curvatura costante la [24] si può scrivere:

$$[24'] \quad \Delta_2 \mathbf{V} - \text{grad div } \mathbf{V} = \text{rot}_2 \mathbf{V} + 2 K \mathbf{V}$$

che coincide con una formola data da BOGGIO ⁽³⁾.

Queste formole permettono di dare alle equazioni dell'equilibrio o del movimento dei corpi elastici o dei fluidi viscosi di varietà riemanniane forme analoghe a quelle corrispondenti degli spazi euclidei. In esse però entrano sempre, a differenza di quel che avviene negli spazi euclidei, termini relativi alle curvature ⁽⁴⁾.

(1) M. PASTORI, *Sulle equazioni della meccanica dei mezzi isotropi non euclidei*. (« Rend. Lincei », ser. 6^a, vol. XIX, 1934, pagg. 566-572).

(2) Nel caso di $n = 2$ non si può più parlare di $\text{Rot}_2 \mathbf{V}$ perchè $\text{Rot } \mathbf{V} = U$ è un invariante. Il secondo membro diviene allora $-\varepsilon_{ij} U^{ij}$ ossia coincide col coniugato di $\text{grad } U$ (cfr. PASTORI, loco ultimo citato).

(3) T. BOGGIO, *Sull'operatore di Laplace e sulle equazioni dell'elasticità negli spazi curvi*. (« Rend. Lincei », ser. 6^a, vol. XIII, 1931, pagg. 412-416).

(4) M. PASTORI, loco ultimo citato.

Astronomia. — *Il problema ristretto lineare dei tre corpi.*

Nota ⁽¹⁾ di GIUSEPPE ARMELLINI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. Come è notissimo, il *problema dei tre corpi*, di fondamentale importanza nella Meccanica Celeste, consiste nella ricerca delle traiettorie descritte da tre punti materiali A , B , C che si attirano tra loro con la legge di NEWTON. Ed è pure ben noto che, non ostante più di due secoli di ricerche, questo grande problema, se le masse sono qualsiasi, si sa risolvere rigorosamente solo in *due casi particolari* e cioè nel caso di EULERO ed in quello di LAGRANGE. Nel primo, i tre corpi si mantengono sempre allineati ed il rapporto delle due distanze AB e BC si mantiene costante ed eguale ad una delle radici di un'equazione algebrica di quinto grado, data da EULERO. Nel secondo invece, i tre corpi si mantengono ai vertici di un triangolo equilatero, mobile nello spazio ed i cui lati variano col tempo.

In generale il problema si riduce al *sesto ordine*. Tale riduzione può dirsi sostanzialmente dovuta al LAGRANGE, il quale dimostrò che le tre distanze AB , BC e CA , considerate come funzioni del tempo, soddisfano ad un sistema composto di due equazioni differenziali del secondo ordine e di una del terzo; e poichè in questo sistema non compare esplicitamente il tempo, esso si abbassa al sesto ordine. Con metodi più moderni, il problema si riduce ad un sistema di otto equazioni canoniche, che ammettono l'integrale dell'energia, mentre il tempo non vi compare esplicitamente; si ha quindi la riduzione al sesto ordine.

Nel caso invece in cui il problema sia *piano* — e cioè quando i tre corpi si muovono costantemente sopra un piano *fisso* nello spazio — esso si riduce al *quarto ordine*. Si ha infatti un sistema di sei equazioni canoniche, aventi l'integrale dell'energia, mentre il tempo non vi compare esplicitamente.

Infine, se i tre corpi si muovono sempre sopra una retta *fissa* nello spazio, il problema — come fu per primo dimostrato da EULERO — si riduce

(¹) Pervenuta all'Accademia il 30 giugno 1941-XIX.

al *secondo ordine*; o, ciò che è lo stesso, ad un sistema di quattro equazioni canoniche, in cui il tempo non compare, mentre vi è l'integrale dell'energia.

Supponiamo ora che una delle masse, per esempio C , sia *infinitesima*, onde essa non perturbi il movimento relativo di A e di B ; supponiamo inoltre che il moto dei tre corpi avvenga sopra un piano fisso e che A e B descrivano orbite circolari intorno al comune baricentro. Si ha allora il celebre *problema ristretto dei tre corpi*, tanto studiato modernamente dal POINCARÉ e che si riduce al *secondo ordine*; come appunto nel caso lineare di EULERO. Supponendo inoltre che, nello stesso problema ristretto, il punto di massa infinitesima C si muova nelle immediate vicinanze di B e che la massa di B sia molto piccola rispetto a quella di A , si ha il cosiddetto *problema di Hill*, di alta importanza nella moderna Teoria della Luna. In esso le equazioni del moto si semplificano notevolmente; ma il problema rimane sempre del *secondo ordine*.

2. Ora, lo scopo di questa Nota è di mostrare che, quando i tre corpi si muovono sopra una retta fissa, il problema si riduce al *primo ordine*, se uno dei corpi ha massa infinitesima e la costante dell'energia è eguale a zero: caso che credo fin qui sfuggito alla considerazione degli studiosi. Mi sembra infatti che, sebbene tale caso non abbia ancora applicazioni pratiche, meriti tuttavia di essere segnalato, data la rarità della riduzione al *primo ordine*.

Per analogia con quanto si è detto, chiamerò questo caso col nome di *problema ristretto lineare dei tre corpi*. E, nella presente Nota, mostrerò che in tale caso, se la costante dell'energia è nulla, le coordinate dei primi due corpi si ottengono immediatamente, come del resto è ben chiaro: in funzione del tempo; mentre il moto del terzo corpo si riduce all'*integrazione di un'equazione differenziale del primo ordine, e precisamente di una nota equazione già studiata da ABEL*.

Ovviamente, tale riduzione al primo ordine permette una discussione delle particolarità del moto assai più ampia e dettagliata di quanto può farsi nei casi precedenti. Ma qui, per brevità, ci limiteremo alla sola riduzione, rimandando eventualmente la discussione ad altra Nota.

3. Supponiamo dunque che i tre corpi si muovano sopra una retta fissa nello spazio, che sceglieremo come asse delle ascisse. Siano M_1 ed X_1 la massa e l'ascissa di A ; analogamente siano M_2 ed X_2 la massa e l'ascissa di B ed x l'ascissa di C che supporremo di massa infinitesima. Per semplicità, sceglieremo le unità di misura in modo che il coefficiente attrattivo risulti eguale ad 1.

Ciò posto, prendendo per origine il baricentro del sistema, che ovviamente coincide con quello di A e B , essendo C infinitesimo, si ha:

$$[1] \quad M_1 X_1 + M_2 X_2 = 0$$

e cioè

$$[2] \quad X_2 = -\alpha X_1$$

dove si è posto

$$[3] \quad \alpha = \frac{M_1}{M_2}.$$

Ora, senza ledere la generalità, possiamo scegliere la direzione positiva delle ascisse in modo tale che l'ascissa iniziale di A , e cioè X_{10} , sia positiva; in conseguenza l'ascissa iniziale di B , e cioè X_{20} , sarà negativa.

Ciò posto, vi sono due casi possibili e cioè:

1° O i due punti materiali A e B non si urtano mai tra loro ed allora X_1 resterà sempre positiva ed X_2 sempre negativa. Infatti se tale urto avvenisse, esso dovrebbe aver luogo nel baricentro e cioè all'origine delle coordinate;

2° O i due punti materiali, dopo un certo tempo, si urtano tra loro; con che (almeno se si suppongono i punti anelastici) il problema degenera in quello dei due corpi e cioè del moto di C attratto da un punto di massa $M_1 + M_2$. L'urto avviene sempre nel baricentro, ed il suo verificarsi, o meno, appare dalle formole del movimento.

In conseguenza di ciò, possiamo sempre supporre che, per tutta la durata del tempo che c'interessa, X_1 si conservi sempre positiva ed X_2 sempre negativa. In conseguenza il *valore assoluto* della distanza AB sarà dato da $X_1 - X_2$.

Ora, poichè il movimento dei due corpi A e B non è influenzato dal corpo infinitesimo C , abbiamo dal teorema delle forze vive, ricordando che per ipotesi l'energia totale del sistema è eguale a zero:

$$[4] \quad M_1 \left(\frac{dX_1}{dt} \right)^2 + M_2 \left(\frac{dX_2}{dt} \right)^2 - \frac{2 M_1 M_2}{X_1 - X_2} = 0$$

da cui si ricava subito, ricordando la [2] e la [3]

$$[5] \quad \left(\frac{dX_1}{dt} \right)^2 = \frac{2 M_2}{(1 + \alpha)^2 X_1}$$

e quindi integrando

$$[6] \quad X_1 = \sqrt[3]{\left(\frac{3 \sqrt{2 M_2}}{2 (1 + \alpha)} t + X_{10}^{\frac{2}{3}} \right)^2}$$

dove, come si è detto, X_{10} indica l'ascissa iniziale di A , anche essa positiva. Quanto alla $\sqrt{2 M_2}$, essa va presa col segno positivo o negativo, secondo che la velocità iniziale di A è positiva o negativa. Ovviamente, se tale

velocità iniziale è positiva, non avviene mai l'urto; altrimenti l'urto ha luogo quando X_1 si annulla.

Determinato X_1 , la [2] ci dà X_2 e quindi il moto dei due punti A e B è subito trovato. Resta ora a determinare quello del terzo punto C e di ciò passiamo ad occuparci.

4. Tre casi sono da distinguere, e cioè:

1° O il corpo C si trova compreso nel segmento AB ;

2° O esso è esterno al segmento AB e situato dalla parte di A ;

3° O, infine, è esterno al segmento stesso AB e situato dalla parte di B .

Da ognuno di questi casi, non si può ovviamente passare ad un altro senza che abbia luogo un urto, con che il problema degenera. La possibilità, o meno, di tali urti, dipende dai dati iniziali ed apparirà dalla discussione. Come si vedrà, l'equazione del moto di C è differente nei tre casi, sebbene tale differenza consista in semplici cambiamenti di segno.

Cominciamo dunque ad occuparci del primo caso.

Dalla Dinamica del punto, si ha facilmente per l'equazione del moto di C in questo caso:

$$[7] \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{M_1}{(x - X_1)^2} - \frac{M_2}{(x - X_2)^2}$$

e cioè, tenendo conto della [2] e della [3] e riducendo:

$$[8] \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = M_2 \frac{(\alpha - 1)x^2 + 2(\alpha^2 + 1)xX_1 + (\alpha^3 - 1)X_1^2}{(x - X_1)^2(x + \alpha X_1)^2}$$

dove X_1 è una funzione del tempo data dalla [6]. Analiticamente quindi la [8] è un'equazione differenziale del secondo ordine, che lega x con t .

5. Prendiamo ora come variabile indipendente X_1 invece del tempo. Si ha allora per la [5]:

$$[9] \quad \frac{dX_1}{dt} = \frac{1}{1 + \alpha} \sqrt{\frac{2M_2}{X_1}}$$

e quindi con facili calcoli:

$$[10] \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{1 + \alpha} \sqrt{\frac{2M_2}{X_1}} \frac{dx}{dX_1}$$

$$[11] \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = \left[\frac{1}{1 + \alpha} \right] \left[\frac{\sqrt{2M_2}}{X_1} \frac{d^2 x}{dX_1^2} - \frac{1}{2(1 + \alpha)} \right] \left[\frac{\sqrt{2M_2}}{X_1^3} \frac{dx}{dX_1} \right] \frac{dX_1}{dt} =$$

$$= \frac{2M_2}{(1 + \alpha)^2 X_1} \left[\frac{d^2 x}{dX_1^2} - \frac{1}{2X_1} \frac{dx}{dX_1} \right].$$

La [8] diviene quindi:

$$\begin{aligned}
 [12] \quad & \frac{d^2 x}{dX_1^2} - \frac{1}{2 X_1} \frac{dx}{dX_1} = \\
 & = \frac{(1 + \alpha)^2 X_1}{2} \left[\frac{(\alpha - 1)x^2 + 2(\alpha^2 + 1)xX_1 + (\alpha^3 - 1)X_1^2}{(x - X_1)^2 (x + \alpha X_1)^2} \right].
 \end{aligned}$$

Ora questa equazione si riduce ad un'equazione del primo ordine, come passiamo a mostrare.

A tale scopo poniamo, indicando con z il rapporto delle distanze x ed X_1 :

$$[13] \quad X_1 = e^y \quad ; \quad [14] \quad x = e^y z$$

da cui otteniamo subito:

$$[15] \quad \frac{dx}{dX_1} = z + \frac{dz}{dy}$$

$$[16] \quad \frac{d^2 x}{dX_1^2} = \left(\frac{dz}{dy} + \frac{d^2 z}{dy^2} \right) e^{-y}$$

onde la [12] diviene:

$$[17] \quad \frac{d^2 z}{dy^2} + \frac{1}{2} \frac{dz}{dy} - \frac{z}{2} = \frac{(1 + \alpha)^2}{2} \left[\frac{(\alpha - 1)z^2 + 2(\alpha^2 + 1)z + \alpha^3 - 1}{(z - 1)^2 (z + \alpha)^2} \right]$$

dove non compare più la variabile indipendente y . Possiamo quindi abbassarla di grado ponendo:

$$[18] \quad \frac{dz}{dy} = u$$

da cui si ha subito:

$$[19] \quad \frac{d^2 z}{dy^2} = \frac{du}{dz} \frac{dz}{dy} = u \frac{du}{dz}$$

onde la [17] si riduce a:

$$[20] \quad 2u \frac{du}{dz} + u = z + (1 + \alpha)^2 \left[\frac{(\alpha - 1)z^2 + 2(\alpha^2 + 1)z + \alpha^3 - 1}{(z - 1)^2 (z + \alpha)^2} \right]$$

equazione differenziale di primo ordine che lega l'incognita u alla variabile indipendente z e dalla cui integrazione dipende la soluzione generale del caso studiato. Il nostro asserto risulta così provato.

Dobbiamo rilevare che l'equazione [20] a cui siamo giunti è ovviamente un caso particolare della ben nota *equazione* ⁽¹⁾ studiata da ABEL e che si può mettere sotto la forma

$$[21] \quad u \, du + (A + Bu) \, dz = 0$$

dove A e B sono funzioni della sola variabile indipendente z . Nel nostro caso anzi B è costante ed eguale ad $\frac{1}{2}$. Notiamo che essendo C situato nel segmento AB , la x può variare tra X_1 ed X_2 e quindi, per la [2] e per la [14], z sarà compreso tra i valori 1 e $-\alpha$. Il secondo membro della [20] diviene appunto infinito per $z = 1$ e per $z = -\alpha$, che corrispondono ai valori $x = X_1$ ed $x = X_2 = -\alpha X_1$ e cioè all'urto di C con A e con B .

Se le due masse A e B sono eguali, si ha $\alpha = 1$, e la [20] si riduce alla forma assai semplice:

$$[22] \quad 2u \frac{du}{dz} + u = z + \frac{16z}{(z^2 - 1)^2}$$

la quale però, non ostante tale semplicità, non rientra nei tipi risolvibili per quadrature. Notiamo subito che la [22] ammette la soluzione particolare $u = z = 0$, corrispondente al corpo C fermo nell'origine. Inoltre, se z è piccola, la [22] si semplifica nella

$$[23] \quad \frac{du}{dz} = \frac{17z}{2u} - \frac{1}{2}$$

equazione omogenea, immediatamente riducibile alle quadrature. Ma di ciò tratteremo eventualmente in altra Nota, occupandoci della discussione dei risultati.

6. È facile ora vedere come si modifichi il problema negli altri due casi. E precisamente, se C si suppone inizialmente esterno al segmento AB e situato dalla parte di A (Caso II), la [7] si modifica in:

$$[24] \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{M_1}{(x - X_1)^2} - \frac{M_2}{(x - X_2)^2}$$

la quale si trasforma subito in:

$$[25] \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -M_2 \frac{(\alpha + 1)x^2 + 2(x^2 - 1)xX_1 + (x^3 + 1)X_1^2}{(x - X_1)^2(x + \alpha X_1)^2}$$

⁽¹⁾ (Cfr. ABEL, *Oeuvres complètes*, t. II, pag. 26 (Christiania, Grondahl, 1881); cfr. anche DINI, *Lezioni di Analisi infinitesimale*, vol. II, pag. 578 (Pisa, Nistri, 1915).

Da questa, con ragionamenti analoghi a quelli già fatti, si giunge all'equazione differenziale di primo ordine:

$$[26] \quad 2u \frac{du}{dz} + u = z - (1 + \alpha)^2 \left[\frac{(\alpha + 1)z^2 + 2(\alpha^2 - 1)z + \alpha^3 + 1}{(z - 1)^2(z + \alpha)^2} \right].$$

Invece, se C è esterno al segmento AB e dalla parte di B (Caso III), la [7] assume la forma:

$$[27] \quad \frac{d^2 x}{dt} = \frac{M_1}{(x - X_1)^2} + \frac{M_2}{(x - X_2)^2}$$

da cui si giunge, eseguendo gli stessi calcoli, all'equazione:

$$[28] \quad 2u \frac{du}{dz} + u = z + (1 + \alpha)^2 \left[\frac{(\alpha + 1)z^2 + 2(\alpha^2 - 1)z + \alpha^3 + 1}{(z - 1)^2(z + \alpha)^2} \right].$$

Ovviamente, se le due masse sono eguali, avendosi $\alpha = 1$, la [26] e la [28] divengono:

$$[29] \quad 2u \frac{du}{dz} + u = z - 8 \frac{z^2 + 1}{(z^2 - 1)^2}$$

$$[30] \quad 2u \frac{du}{dz} + u = z + 8 \frac{z^2 + 1}{(z^2 - 1)^2}$$

equazioni di forma molto semplice, sebbene non appartenenti ai tipi riducibili a quadrature.

7. Partendo dalle equazioni ora date, sarebbe facile ritrovare la soluzione particolare di EULERO, in cui il rapporto $x : X_1$ si conserva costante ed anche studiare le soluzioni prossime a quella euleriana.

Limitandoci per brevità al Caso I, vediamo subito che, se si ha $z = \lambda = \text{costante}$, dalla [18] risulta $u = 0$ e quindi la [20] ci dice che λ deve essere radice dell'equazione:

$$[31] \quad \lambda + (1 + \alpha)^2 \frac{(\alpha - 1)\lambda^2 + 2(\alpha^2 + 1)\lambda + \alpha^3 - 1}{(\lambda - 1)^2(\lambda + \alpha)^2} = 0$$

che è un'equazione algebrica di quinto grado in λ , come appunto l'equazione euleriana.

Se il movimento è invece prossimo a quello euleriano, possiamo porre

$$[32] \quad z = \lambda + \xi$$

essendo ξ assai piccolo. In conseguenza, tenendo conto che λ è radice della [31], la [20] assume la forma

$$[33] \quad 2u \frac{du}{d\xi} + u = C\xi$$

dove la costante C è eguale alla derivata, presa rispetto a z , del secondo membro della [20], in cui si ponga $z = \lambda$ dopo eseguita la derivazione; la [33] è omogenea ed immediatamente riducibile alle quadrature. Analogamente può dirsi per il Caso II e per il Caso III.

8. Terminiamo con un'ultima osservazione. Come si è detto (n. 1), il problema ristretto dei tre corpi ammette, come caso particolare, quello di HILL. Per analogia, possiamo quindi anche ora chiamare col nome di *problema ristretto lineare di HILL*, quello in cui uno dei corpi, per es. A , ha massa molto piccola rispetto all'altro B ed il punto C si muove nelle immediate vicinanze del corpo di massa minore A .

In questa ipotesi, il rapporto $\alpha = M_1 : M_2$ sarà molto piccolo ed anche la distanza $x - X_1 = (z - 1) e^y$ sarà molto piccola; anzi poichè l'attrazione che A esercita su C deve essere dello stesso ordine di grandezza di quella esercitata da B (giacchè altrimenti il problema si ridurrebbe a quello elementare dei due corpi), la differenza $x - X_1$ sarà dell'ordine di grandezza di $\sqrt{\alpha}$. Potremo dunque porre:

$$[34] \quad z = 1 + \sqrt{\alpha} p.$$

Ovviamente, essendo C per ipotesi molto vicino ad A , gli unici casi possibili sono il I in cui $\sqrt{\alpha}$ è negativa ed il II in cui è positiva. Inoltre, la [18] mostra che u sarà piccolo dell'ordine di $\sqrt{\alpha}$, onde potremo porre:

$$[35] \quad u = \sqrt{\alpha} q.$$

Servendosi delle [35] e [34] e trascurando i termini superiori la [20] e la [26] divengono con calcoli elementari:

$$[36] \quad 2q \frac{dq}{dp} + q = 3p \pm \frac{1}{\sqrt{\alpha} p^2}$$

semplice equazione di primo ordine, dalla cui integrazione dipende la soluzione del problema ristretto lineare di HILL.

late K , sicchè di queste si potranno trascurare le potenze, nonchè i prodotti per altri errori dello stesso sistema.

2. Consideriamo ora una delle quantità compensate, per esempio z_1 , e proponiamoci di determinarne il peso. A tale scopo, notiamo che, a compensazione eseguita, z_1 risulta in ultima analisi funzione di tutte le z_i^0 , di modo che il differenziale dz_1 dovrà potersi esprimere linearmente mediante i differenziali $dz_1^0 \dots dz_n^0$. Lo stesso potrà dirsi per i rispettivi errori, che indicheremo con $\delta z_1, \delta z_1^0, \dots, \delta z_n^0$, in quanto di questi, in ogni sistema di misure accettabile, devono sempre ritenersi trascurabili i quadrati ed i mutui prodotti.

Ciò posto, scriveremo l'espressione di δz_1 nella forma

$$[7] \quad \delta z_1 = p_1 R_{11} \delta z_1^0 + p_2 R_{12} \delta z_2^0 + \dots + p_n R_{1n} \delta z_n^0$$

dove, come si è detto, le p sono i pesi a compensazione non ancora effettuata e le R_{1i} sono dei coefficienti che ci proponiamo di determinare.

Notiamo all'uopo che, con evidente significato dei simboli, le [2] danno

$$\delta z_i^0 = \delta z_i - \delta y_i$$

ossia, ricavando dalle [4] per differenziazione le espressioni degli errori δy_i e ricordando che, per quanto si è osservato, le quantità del tipo $K \delta A \dots K \delta Q$ sono trascurabili, si avrà

$$\delta z_i^0 = \delta z_i - \frac{1}{p_i} (A_i \delta K_1 + \dots + Q_i \delta K_q).$$

Introducendo nella [7] queste espressioni, si ottiene così la seguente equazione

$$[8] \quad [AR_1] \delta K_1 + [BR_1] \delta K_2 + \dots + [QR_1] \delta K_q + \\ + (1 - p_1 R_{11}) \delta z_1 - p_2 R_{12} \delta z_2 - \dots - p_n R_{1n} \delta z_n = 0.$$

Differenziamo ora le [1], sostituendo al solito i differenziali con gli errori δz , e notiamo che si potrà nel nostro caso porre

$$\frac{\partial f_i}{\partial z_i} = A_i \dots \frac{\partial f_q}{\partial z_i} = Q_i.$$

Infatti, come già in principio si è ricordato, si ha

$$f_1(z_1 \dots z_n) = f_1(z_1^0 + y_1 \dots z_n^0 + y_n) = A_0 + A_1 y_1 + \dots + A_n y_n.$$

Analogamente, quando l'incremento h sia sufficientemente piccolo, si ottiene

$$f(z_1 + h, z_2 \dots z_n) = A_0 + A_1(y_1 + h) + \dots + A_n y_n,$$

e quindi per il peso cercato si ha in definitiva l'espressione:

$$[12] \quad \frac{1}{P_1} = R_{11}.$$

La [A] mostra che P_1 (e quindi R_{11}) è una quantità essenzialmente positiva, come è appunto nella natura dei pesi. È poi facile verificare che è $P_1 > p_1$: infatti moltiplicando le [11] rispettivamente per $H_1^{(1)} H_2^{(1)} \dots H_q^{(1)}$ e sommando, si ottiene

$$[13] \quad A_1 H_{11} + \dots + Q_1 H_{1q} = \left[\frac{AA}{p} \right] H_{11}^2 + \dots + 2 \left[\frac{AQ}{p} \right] H_{11} H_{1q} + \dots + \left[\frac{QQ}{p} \right] H_{1q}^2 = \\ = \left[\frac{(AH_{11} + \dots + QH_{1q})^2}{p} \right] > 0$$

quindi dalla prima delle [10'] si ha

$$p_1^2 \left(R_{11} - \frac{1}{P_1} \right) < 0 \quad , \quad \frac{1}{R_{11}} = P_1 > p_1.$$

Ciò mostra come la compensazione faccia aumentare i pesi delle grandezze misurate.

Evidentemente la formula [12] si generalizza senza difficoltà nella

$$[12'] \quad \frac{1}{P_i} = R_{ii} \quad (i = 1 \dots n)$$

dove R_{ii} si ricava dalla prima delle [10'] e dalle [11], cambiando in i l'indice 1.

3. Osserviamo ora che, per quanto si è detto, l'errore medio della quantità compensata z_i si può ricavare dalla formula

$$[14] \quad m_i^2 = R_{ii} m_0^2$$

e notiamo, in analogia a quanto è detto nella precedente Nota sopra ricordata, che, almeno quando il numero delle osservazioni è sufficientemente elevato, detto $M(\delta z_i^2)$ il valore medio (nel senso della teoria delle variabili casuali) del quadrato dell'errore δz_i , si può ritenere

$$[15] \quad M(\delta z_i^2) = m_i^2 = R_{ii} m_0^2.$$

Analogamente, proponiamoci ora di determinare, almeno entro i limiti di validità della [15], il valore medio $M(\delta z_i \delta z_k)$ del prodotto dei due errori δz_i e δz_k . All'uopo, consideriamo per semplicità di notazione, oltre la z_1 , la grandezza z_2 , per il cui errore si avrà l'espressione analoga alla [7]

$$[7'] \quad \delta z_2 = p_1 R_{21} \delta z_1^0 + p_2 R_{22} \delta z_2^0 + \dots + p_n R_{2n} \delta z_n^0.$$

e si ha così in definitiva per l'errore medio cercato l'espressione, evidentemente generalizzabile

$$[17] \quad M(\delta z_1 \delta z_2) = R_{12} m_0^2$$

la quale mostra pure il significato dei coefficienti R_{ik} quando è $i = k$.

Le formule sopra stabilite danno modo di calcolare l'indice di correlazione σ_{ik} , del tipo di quello usato nella Nota già più volte citata, dove si è adoperata la formula (1)

$$\sigma_{ik} = \frac{2 M(\delta z_i \delta z_k)}{M(\delta z_i^2) + M(\delta z_k^2)}.$$

In base alle [15], [15'] e [17], questa dà

$$\sigma_{ik} = \frac{2 R_{ik}}{R_{ii} + R_{kk}}.$$

Si vede subito che, conformemente alla sua natura, σ_{ik} non può mai superare in valore assoluto l'unità. Infatti, in base alle identità $|A|$ e $[B]$, la [18] può anche scriversi

$$\sigma_{ik} = \frac{[2 p R_i R_k]}{[p(R_i^2 + R_k^2)]},$$

da cui, essendo sempre $R_i^2 + R_k^2 > 2 |R_i R_k|$, risulta evidente come ad ogni addendo della sommatoria al numeratore corrisponda sempre al denominatore un addendo superiore in valore assoluto. È quindi certamente

$$-1 \leq \sigma_{ik} \leq +1.$$

Ricordiamo che i valori negativi dell'indice di correlazione indicano che i due errori tendono a contrastarsi, mentre tendono a favorirsi se l'indice risulta positivo. I valori -1 , $+1$, 0 , corrispondono rispettivamente ai casi di due eventi *opposti*, *identici*, *indipendenti*.

È opportuno qui notare che per l'indice di correlazione, anziché l'espressione σ_{ik} sopra riportata, appare in pratica più opportuno adottare la seguente

$$r_{ik} = \frac{M(\delta z_i \delta z_k)}{\sqrt{M(\delta z_i^2) M(\delta z_k^2)}}$$

detta anche *coefficiente di correlazione* (2), la quale gode delle medesime proprietà dell'indice σ_{ik} ed in più ha il vantaggio di essere omogenea

(1) E. BOREL, *Traité de Calcul des Probabilités*. T. I, 1. Paris, 1920.

(2) B. DE FINETTI, *Corso di Calcolo delle Probabilità* tenuto presso la R. Università di Padova nel 1937-38 A. XVI.

di grado 0 nelle due variabili δz_i e δz_k , e quindi di non alterarsi se una od entrambe vengono moltiplicate per costanti arbitrarie. In base ai risultati precedenti, si ha nel caso nostro

$$[19] \quad r_{ik} = \frac{R_{ik}}{\sqrt{R_{ii} R_{kk}}} = \frac{[p R_i R_k]}{\sqrt{[p R_i^2] [p R_k^2]}}.$$

Quest'ultima espressione mostra in particolare, ricordando l'ineguaglianza di SCHWARZ, che effettivamente il valore di r_{ik} risulterà sempre compreso nell'intervallo ± 1 .

Prima di chiudere questo paragrafo, noteremo ancora che, poichè il calcolo delle correzioni y_i e dei coefficienti R_{ik} dipende dalla risoluzione di sistemi normali — come [5], [10'], ecc. — che differiscono solo nei termini noti, quando detto calcolo si voglia eseguire completamente appare assai opportuno il metodo dei *coefficienti ausiliari*. Indicheremo questi con ξ_{ik} (come è noto, i ξ_{ik} sono i reciproci degli elementi omologhi nel determinante del sistema normale). Si avrà così, per esempio:

$$[20] \quad H_{i1} = \xi_{i1} A_1 + \xi_{i2} B_1 + \dots + \xi_{i q} Q_1$$

ed analoghe. L'uso dei coefficienti ξ_{ik} permette poi di esprimere sinteticamente le formule sopra trovate. All'uopo indichiamo rispettivamente con

$$\begin{aligned} A_{(q,n)} &= \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \\ \dots & \dots & \dots \\ Q_1 & \dots & Q_n \end{pmatrix}, & A_{(n,q)}^{-1} &= \begin{pmatrix} A_1 & \dots & Q_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ A_n & \dots & Q_n \end{pmatrix}, \\ H_{(n,q)} &= \begin{pmatrix} H_{i1} & \dots & H_{1q} \\ \dots & \dots & \dots \\ H_{n1} & \dots & H_{nq} \end{pmatrix}, & \Sigma_{(q,q)} &= \begin{pmatrix} \xi_{11} & \dots & \xi_{1q} \\ \dots & \dots & \dots \\ \xi_{q1} & \dots & \xi_{qq} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

la matrice dei coefficienti delle equazioni [3], la sua *trasposta*, la matrice dei coefficienti H_{ik} , e quella (quadrata e simmetrica) dei coefficienti ausiliari. Si vede allora subito che tutte le equazioni tipo [20] vengono comprese nell'unica ⁽¹⁾

$$H_{(n,q)} = A_{(n,q)}^{-1} \cdot \Sigma_{(q,q)},$$

mentre le [10'] ed analoghe si sintetizzano nelle seguenti formule

$$\begin{aligned} S_{(n,n)} &= H_{(n,q)} \cdot A_{(q,n)} = A_{(n,q)}^{-1} \cdot \Sigma_{(q,q)} \cdot A_{(q,n)} \\ p_i^2 R_{ii} &= p_i - S_{ii}, \quad p_i p_k R_{ik} = -S_{ik} \quad (i \neq k). \end{aligned}$$

⁽¹⁾ V., per esempio, S. CHERUBINO, *Geometria Analitica*. Società Editrice «Dante Alighieri», Genova, 1940-XVIII.

Con queste notazioni, il coefficiente di correlazione r_{ik} assume pure l'espressione

$$[19'] \quad r_{ik} = \frac{-S_{ik}}{\sqrt{(p_i - S_{ii})(p_k - S_{kk})}}$$

la quale è evidentemente più comoda per il calcolo.

4. A titolo di esempio, applicheremo ora quanto sopra si è svolto al noto caso della compensazione di un triangolo piano.

Siano z_1, z_2, z_3 i tre angoli; $z_1^0, z_2^0, z_3^0, p_1, p_2, p_3$ i risultati della loro diretta determinazione ed i rispettivi pesi. In questo caso si ha l'unica equazione di condizione

$$z_1 + z_2 + z_3 - 180^\circ = 0$$

e si ha dunque

$$A_1 = A_2 = A_3 = 1, \quad A_0 = z_1^0 + z_2^0 + z_3^0 - 180^\circ.$$

Il sistema normale delle correlate si riduce pertanto all'unica equazione

$$\left[\frac{1}{p} \right] K + A_0 = 0$$

da cui si ha K e quindi le correzioni

$$y_i = \frac{-A_0}{p_i \left[\frac{1}{p} \right]} \quad (i = 1, 2, 3).$$

L'error medio dell'unità di peso è dunque

$$m_0^2 [py^2] = \frac{A_0^2}{\left[\frac{1}{p} \right]}.$$

Le equazioni dei pesi divengono poi

$$\left[\frac{1}{p} \right] H_i = 1 \quad (i = 1, 2, 3)$$

e si ottiene quindi facilmente

$$p_i^2 R_{ii} = p_i - \frac{1}{\left[\frac{1}{p} \right]}, \quad p_i p_k R_{ik} = - \frac{1}{\left[\frac{1}{p} \right]} \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Per il *peso* e l'*errore medio* di un angolo compensato si ricava in tal modo

$$P = \frac{p_i}{1 - \frac{1}{p_i \left[\frac{1}{p} \right]}} \quad m_i^2 = \frac{1 - \frac{1}{p \left[\frac{1}{p} \right]}}{p_i \left[\frac{1}{p} \right]} A_0^2$$

e per le correlazioni fra due angoli le formule [18] e [19] danno rispettivamente

$$\sigma_{ik} = \frac{-2 \frac{1}{p_i p_k \left[\frac{1}{p} \right]}}{\frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_k} - \frac{p_i^2 + p_k^2}{p_i^2 p_k^2 \left[\frac{1}{p} \right]}} = \frac{-2 p_i p_k}{p_i p_k (p_i + p_k) - \frac{p_i^2 + p_k^2}{\left[\frac{1}{p} \right]}}$$

$$r_{ik} = \frac{-\left[\frac{1}{p} \right]}{\sqrt{\left(p_i - 1 / \left[\frac{1}{p} \right] \right) \left(p_k - 1 / \left[\frac{1}{p} \right] \right)}} = \frac{-1}{\sqrt{\left(p_i \left[\frac{1}{p} \right] - 1 \right) \left(p_k \left[\frac{1}{p} \right] - 1 \right)}}$$

Nel caso particolare in cui si abbia $p_i = p_2 = p_3 = p$, queste formule danno rispettivamente

$$y_1 = y_2 = y_3 = \frac{A_0}{3}, \quad m_0 = \pm \frac{\sqrt{p} A_0}{\sqrt{3}},$$

$$P_1 = P_2 = P_3 = \frac{3}{2} p, \quad m_1 = m_2 = m_3 = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} A_0,$$

$$\sigma_{ik} = r_{ik} = -0,5.$$

Quest'ultimo risultato mostra come gli errori di due angoli diversi tendono a contrastarsi.

Geochimica. — *Interpretazione geochimica delle formazioni quaternarie di Grotta Romanelli (Terra d'Otranto).*

III. — *Le sostanze umiche fossili* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di GIAN ALBERTO BLANC, Aggregato alla R. Accademia d'Italia e CESARINA CORTESI.

Nella seconda parte di questo lavoro ⁽³⁾ sono state esaminate le caratteristiche chimiche dei complessi colloidali contenuti nelle singole formazioni costituenti i tre livelli principali del deposito di riempimento pleistocenico della Grotta Romanelli, presso Castro, in Terra d'Otranto.

Da tale ricerca è risultata la presenza in dette formazioni di sostanze umiche che, come si è già detto, e come verrà ora anche meglio dimostrato, sono da considerarsi derivate da processi di umificazione attuatisi nei periodi rispettivi a cui i singoli livelli del deposito di riempimento risalgono.

Si tratta quindi, in altre parole, di sostanze umiche fossili la cui origine, che verrà ora discussa, e la cui presenza in maggiore o minore quantità, possono, come vedremo, fornirci interessanti dati sulla climatologia e la ecologia della regione durante il Quaternario. E ciò a complemento di quanto si può dedurre dai caratteri chimici e petrografici dei complessi di materia inorganica propri di ciascuna formazione, e dalle faune in esse contenute.

Per tutto quanto concerne la descrizione del giacimento ci riportiamo a quanto è stato da uno di noi precedentemente pubblicato in proposito ⁽⁴⁾, limitandoci qui a ritornare su alcuni punti che ci sembrano

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Geochimica della R. Università di Roma.

⁽²⁾ Presentata nell'Adunanza del 30 maggio 1941-XIX.

⁽³⁾ G. A. BLANC, *Interpretazione geochimica delle formazioni quaternarie di Grotta Romanelli (Terra d'Otranto)* II. — *I complessi colloidali*. « Rend. R. Acc. Lincei », XXVIII, 1938, pag. 75.

⁽⁴⁾ G. A. BLANC, *Grotta Romanelli* — I. *Stratigrafia dei depositi e natura e origine di essi*. « Arch. p. l'Antr. e l'Etn. », L, 1920, fasc. 1-4; ID., *Grotta Romanelli* — II. *Dati ecologici e paleontologici*. « Arch. p. l'Antr. e l'Etn. », LVIII, 1928, fasc. 1-4; ID., *Sulla presenza di Alca impennis L. nella formazione pleistocenica superiore di Grotta Romanelli in Terra d'Otranto*. « Arch. per l'Antr. e l'Etn. », LVIII, 1928, fasc. 1-4; ID., *Interpretazione geochimica delle formazioni quaternarie di Grotta Romanelli (Terra d'Otranto)*. — I. *Dati del problema e metodi di ricerca*. « Rend. R. Acc. Lincei », XXVII, 1938, pag. 189.

di particolare importanza nei riguardi dell'interpretazione da dare ai risultati della ricerca di cui la presente Nota è oggetto.

È stato precedentemente dimostrato come i materiali terrosi, frammentati a della sabbia a carattere anemoclastico, da cui sono essenzialmente costituite le due formazioni superiore a terra bruna e intermedia a terra rossa ⁽¹⁾ della Grotta Romanelli, siano certamente di apporto eolico, dovendosi esse considerare come dei relitti, conservatisi nell'interno della grotta, di due dune d'ostacolo, formatesi, successivamente l'una all'altra, sul margine della scogliera nella quale si apre la grotta stessa, e ciò durante il periodo di emersione post-tirreniana. La regressione del mare tirreniano determinò infatti la emersione di una vasta pianura costiera, oggi nuovamente sommersa, ma della quale la carta batimetrica rivela l'esistenza con le due quote di - m. 100 e di - m. 200, distanti circa 10 km. la prima e 25 km. la seconda dalla costa attuale.

La formazione inferiore consiste in uno strato di pietrame costituito essenzialmente da frammenti più o meno minuti del calcare locale, a spigoli vivi, derivanti dal disgregamento termoclastico della volta: pietrame che appare intriso di uno scarsissimo materiale argilloso-ferroso giallo-grigio chiaro volgente al biancastro, del tutto diverso dai materiali terrosi rosso e bruno sovrastanti, e che altro non è se non il risultato del disfacimento e della parziale decalcificazione *in situ* del pietrame calcareo medesimo: processi questi che sono evidentemente da porre in relazione con la temporanea attività idrica alla quale si deve la formazione della crosta stalagmitica che ricopre il predetto pietrame calcareo cementandone la parte superiore.

La base del giacimento è costituita da lembi di una spiaggia sollevata, poggiante sul fondo roccioso della grotta solcato da canali e marmitte di giganti: vestigi questi di uno stadio di arresto della regressione del mare tirreniano, al quale stadio d'arresto corrispondono altresì un soleo di battaglia ed una fascia di fori di Litodomi, alla quota di circa m. 8-10 sul livello del mare attuale ⁽²⁾.

(¹) È opportuno ricordare che, nella descrizione che facciamo del giacimento, i termini « terra rossa », « terra bruna », ecc. sono adoperati per comodità, al semplice scopo di designare con brevità le singole formazioni della Grotta Romanelli in base ai loro colori caratteristici, sì da permettere ad un visitatore di rendersi prontamente conto, sul posto, della stratigrafia, identificando senz'altro i vari livelli ai quali ci riferiamo. Non annettiamo quindi alle predette designazioni, puramente stratigrafiche, alcun significato pedogenetico, riservandoci di adoperare per le designazioni aventi tale significato, la grafia con maiuscole: Terra Rossa, Terra Bruna, ecc.

(²) G. A. BLANC, *Grotta Romanelli*, I, tav. IV e *Gr. Rom.* II, tav. I.

Per ciò che concerne i caratteri paleontologici di ciascuna delle tre formazioni predette, ricavabili dai relitti lasciati nella grotta dall'Uomo che alle varie epoche vi cercò riparo, rinviando alle pubblicazioni che sono state fatte in merito ⁽¹⁾, limitandoci a ricordare qui che la formazione inferiore, a terra giallo-grigia, è caratterizzata da una fauna « calda » con *Hippopotamus amphibius*, *Elephas antiquus*, e *Rhinoceros Merckii*, accompagnati da *Dama dama*, *Oryctolagus cuniculus*, *Canis aureus*; la formazione intermedia, a terra rossa, dalla stessa fauna « calda » con l'aggiunta di due specie ornitiche abitatrici delle praterie e delle steppe, *Otis tarda* e *O. tetrax*, che sono entrambe assenti dal complesso faunistico della formazione inferiore; e la formazione superiore, a terra bruna, da una fauna in cui, con la completa e definitiva scomparsa dell'Ippopotamo, dell'Elefante antico, del Rinoceronte di Merck, del Daino, dello Sciaccallo e del Coniglio, vediamo comparire, insieme ad alcune specie a carattere più spiccatamente « freddo », quali *Capra ibex* e i rappresentanti dell'avifauna artica con *Alca impennis*, altre specie di provenienza settentrionale, quali *Lepus europaeus*, *Canis lupus*, *Vulpes vulpes*, accompagnati da quei tipici abitatori delle steppe e delle praterie che sono *Equus hydruntinus*, *Otis tarda* e *O. tetrax*.

Sono state descritte le caratteristiche particolari, e sotto certi aspetti eccezionali, di questo giacimento, le quali permettono, in base a considerazioni di natura geochimica, petrografica, pedologica, e prescindendo anche da ogni considerazione di indole paleontologica, di ricavare dati interessanti circa i regimi climatici ed ecologici succedutisi nella regione durante il Pleistocene post-tirreniano. Dato tuttavia il significato che le predette caratteristiche particolari del giacimento conferiscono alla presenza del materiale unico di cui ora ci occupiamo, non sarà inutile ricordare quali esse siano, valendoci per maggior chiarezza dell'annessa figurazione schematica.

Le caratteristiche anzidette consistono innanzi tutto nella forma e nella situazione della grotta, aprentesi e inoltrantesi orizzontalmente in un banco di calcare ippuritico compatto, sul fianco di una ripida scogliera che durante il predetto periodo d'emersione costituiva il margine continentale della pianura costiera, margine contro il quale i venti di Nord-Est, Est e Sud-Est, durante periodi a regime di steppa stagionalmente arida, accumularono i materiali terrosi e sabbiosi asportati dalla superficie della pianura stessa, formando una grande duna d'ostacolo, la quale

⁽¹⁾ E. REGALIA e P. E. STASI, *Grotta Romanelli*. (Castro, Terra d'Otranto). « Arch. per l'Antr. e l'Etn. », XXXIV, 1904, fasc. I e XXXV, 1905, fasc. 2.

G. A. BLANC, *Grotta Romanelli*, I e II e: *Sulla presenza di Alca impennis* L. ecc.

dovette gradualmente elevarsi, secondo curve di livello, nella parte concava del dirupo entro il quale si apre la grotta.

Il fenomeno dovette essere quello stesso descritto da G. DAINELLI ⁽¹⁾ per le formazioni eoliche della Valle dell'Indo, inerpicantisi anche per centinaia di metri su tutte le parti concave dei fianchi montuosi della valle stessa; ed ha riscontro in Italia nei relitti delle dune fossili pleistoceniche, presso Castiglioneello, ed in quelle del Capo Palinuro, descritte da A. C. BLANC ⁽²⁾, formatesi anche queste col materiale sabbioso e terroso asportato dai venti da un'antistante pianura costiera che si trovava emersa durante il periodo post-tirreniano.

Risalendo gradualmente la concavità del fianco della scogliera nella quale si apre la Grotta Romanelli, la duna raggiunse, sin dal periodo corrispondente al trasporto del materiale terroso-sabbioso rosso, la quota della grotta stessa, e sormontando un potente cumulo di blocchi e di pietrame franati dalla scogliera sovrastante, il quale ne ostruiva parzialmente l'apertura, vi penetrò, formandovi un deposito che si adagia orizzontalmente, con spessore massimo di circa 1 metro, sul piano stalamitico ricoprente la formazione inferiore a terra giallo-grigia.

A questo periodo d'apporto eolico di materiale terroso-sabbioso di colore rosso, al quale dovette evidentemente corrispondere un clima almeno stagionalmente arido, succedette un periodo relativamente più umido, al quale sono dovute le sottili placche e le concrezioni stalagmitiche che qua e là compaiono sulla superficie di tale formazione. L'assenza di ogni traccia di materiale terroso nello spessore della calcite stalagmitica prova che durante il periodo umido gli apporti eolici vennero a cessare.

In un periodo posteriore nuovi apporti di materiale eolico terroso-sabbioso, chimicamente e petrograficamente simile al precedente, ma differenziantesi in maniera spiccata da questo per il colore bruno invece che rosso, formarono una nuova duna d'ostacolo la quale, raggiungendo l'orifizio della grotta, ed elevandosi ad una quota più elevata della precedente, vi depositò, sopra alla terra rossa, gli strati costituenti la formazione superiore, a terra bruna, che verso il centro della grotta raggiunse

⁽¹⁾ G. DAINELLI, *Studi sul Glaciale, in Spedizione Italiana De Filippi nell'Himalaia, Caracorum e Turchestan Cinese*. Serie II, vol. III, 1913-14, pag. 307 e 308.

⁽²⁾ A. C. BLANC, *Le dune fossili di Castiglioneello e la regressione marina post-tirreniana*. « Riv. geogr. Ital. », XLII, 1935; *Industrie musteriane e paleolitiche superiori nelle dune fossili e nelle grotte litoranee del Capo Palinuro*. « Rend. R. Acc. d'Italia », fasc. 10, ser. VII, vol. I, 1940-XVIII (ved. particolarmente le figure 6 e 7).

uno spessore di circa 4 metri, colmandola nella parte interna fino quasi alla volta.

Come già è stato detto, lo stato di estrema suddivisione, la leggerezza e la secchezza dei materiali terroso-sabbiosi che a mano a mano si andarono depositando nella grotta, li portò a disporsi secondo superfici di ugual pressione aerodinamica in corrispondenza dell'andamento della volta, e quindi pressochè orizzontalmente nella parte centrale e indi secondo un lieve pendio verso l'interno. Da ciò deriva che il materiale terroso finissimo e asciutissimo che forma la superficie attuale del giacimento si estende, mantenendosi a una distanza costante di circa 40 cm. dalla volta, di cui segue, riproducendole, le accidentalità.

Si tratta dunque in sostanza dei relitti sovrapposti di due dune fosili, i quali, a riparo dalle intemperie, si sono conservati fino ai giorni nostri; e ciò anche dopo che, con la reimmersione della pianura costiera, gli apporti eolici vennero definitivamente a cessare e dopo che, dai marosi battenti ormai il piede della scogliera, venne demolita la duna esterna stessa.

Che il deposito di riempimento della grotta sia nella sua totalità da ascrivere al Pleistocene è dimostrato, oltrechè dall'assenza, tra la fauna, di resti di uno qualsiasi degli animali domestici che abbondano nel vicino giacimento eneolitico dell'atrio della Caverna Zinzulusa, dal fatto che, nell'antegrotta, la formazione superiore a terra bruna ha fornito sino dalla estrema sua superficie dei resti di una specie estinta, tipicamente pleistocenica, quale *Equus hydruntinus*, di cui non sono state sino ad oggi trovate vestigia in alcun giacimento dell'Olocene, sia neolitico che di età posteriore, in Italia o altrove.

Da quanto sinora detto, è evidente che la constatata presenza di sostanze organiche in seno ai materiali terrosi delle tre formazioni non doveva sorprendere nei punti del giacimento dove appaiono segni di abitato umano consistenti in resti di focolari, contenenti, con le ceneri e i carboni, delle accumulazioni di ossa di animali. Ma prelevando campioni di detti materiali terrosi in punti lontani dai resti di focolari, e dove, dall'aspetto degli strati, appare che il deposito di riempimento non sia stato disturbato nè abbia avuto apporti apprezzabili per parte dell'Uomo o di animali cavernicoli, e procedendo altresì, nei dosaggi, alla determinazione quantitativa di sostanze uniche per quanto possibile ben definite, si osserva che, mentre le cifre che si ottengono sono assai diverse da una formazione all'altra, esse si mantengono sensibilmente costanti per tutto lo spessore di ciascuno dei tre tipi di materiali che abbiamo designato sotto i nomi di terra bruna, terra rossa e terra giallo-grigia: e ciò tanto nei campioni prelevati alle quote ove in altri punti appaiono resti di focolari, quanto in quelli provenienti da livelli che non hanno fornito tracce di abitato.

Ci si può dunque chiedere quale sia l'origine di questo humus. Che esso, per ciò che riguarda le due formazioni superiore ed intermedia, si sia potuto formare posteriormente alla deposizione nella grotta del materiale d'apporto colico, è senz'altro da escludere per le seguenti ragioni: anzitutto è da notare che la superficie attuale del deposito di riempimento è caratterizzata su tutta l'estensione della grotta da una assoluta sterilità, non essendovisi constatata, in un periodo di osservazione che dura ormai da oltre venticinque anni, una qualsiasi forma di vegetazione dalla quale possano derivare delle sostanze umiche: e nulla, come ora vedremo, fa ritenere che tale sterilità sia stata minore in passato. Una delle caratteristiche attuali della Grotta Romanelli è, difatti, la estrema siccità dell'ambiente in tutte le stagioni dell'anno. Durante il suddetto lungo periodo di osservazione, soltanto in qualche annata eccezionalmente piovosa, un po' d'acqua d'infiltrazione è riuscita a permeare qua e là il banco di calcare compatto che forma il tetto della grotta, generandò alcune chiazze di umidità sulla volta, ma senza arrivare a dare origine a stillicidi, salvo soltanto in qualche punto della retrogrotta, dove la superficie del deposito venne qua e là leggermente inumidita da cadute di gocce assai diradate e distanziate.

D'altra parte, se si eccettuano i due periodi corrispondenti alle formazioni stalagmitiche sopra e sottostanti al livello a terra rossa, non si osservano in tutto il rimanente deposito di riempimento segni di una qualsiasi attività idrica dovuta ad acque sia di infiltrazione che di condensazione. La potente formazione di terra bruna, in particolare, presenta ancora oggi, attraverso tutto il suo spessore, la secchezza che dovette caratterizzare quel materiale di trasporto colico allorquando venne asportato dalla superficie della pianura costiera e depositato nella grotta. Ed una delle caratteristiche del polviscolo che, sotto condizioni climatiche necessariamente aride, viene dai venti asportato dalla superficie delle pianure sottoposte alla deflazione eolica, è precisamente la sterilità (¹).

Alla predetta secchezza dell'ambiente si aggiunge il fatto che l'apertura della grotta si dovette trovare, sin dai primi tempi successivi alla emersione, in parte ostruita dal potente cumulo di blocchi e di breccie formante, sul fianco della scogliera, un cono di deiezione, trasformato poi in breccia a cemento di calcite e terra rossa durante il secondo periodo umido a cui corrisponde nella grotta il livello stalagmitico superiore (²). Questo cono di deiezione, oggi in parte demolito dal ritorno del mare, nell'elevarsi entro la concavità del dirupo nel quale si apre la grotta

(¹) G. W. ROBINSON, *Soils, their origin, constitution and classification*. 2^a Ed., London, 1936, pag. 261.

(²) G. A. BLANC, *Grotta Romanelli*, I. pag. 35 e seg.

non arrivò evidentemente ad ostruirne completamente l'orifizio, ma, pur lasciando un'apertura sufficiente a dare accesso ai materiali terrosi e sabbiosi della sovrapposta duna, dovette far sì che anche anteriormente alla formazione di questa, la luce e la circolazione d'aria nell'interno della grotta fossero assai ridotte.

In altre parole, con la mancanza di umidità e la scarsità di luce e di aerazione hanno evidentemente fatto difetto in passato, nell'interno della grotta, i fattori essenziali allo sviluppo di una flora dalla quale siano potute derivare sostanze uniche, come è mancata un'attività micro-biologica atta a distruggere tali sostanze originariamente contenute nei materiali terrosi d'apporto eolico.

Nel caso delle due formazioni superiore e intermedia si deve dunque ritenere che le sostanze uniche fossero già presenti nel materiale di apporto eolico allorquando esso si depositò nella grotta, e cioè siano il risultato di un processo di umificazione avvenuto, in pieno periodo pleistocenico, nelle parti superficiali del suolo della pianura costiera dalle quali il materiale stesso venne asportato dai venti.

Da quanto si è sinora detto è evidente che non si può, nel caso delle due formazioni superiore ed intermedia della Grotta Romanelli, definire come un *profilo*, nel senso dato dai pedologi a questo termine, la sezione del giacimento. Infatti non trattasi, nel caso delle due formazioni predette, di una serie stratigrafica dovuta ad una elaborazione *in situ*, per via sia inorganica che organica, di materiali derivanti da una roccia madre sottostante; ma, invece, di una serie stratigrafica costituita da materiali terrosi e sabbiosi d'apporto eolico, più o meno abbondantemente misti a frammenti di roccia calcarea caduti dalla volta, che si sono andati a mano a mano accumulando nella grotta, rimanendovi da quel momento in poi sottratti ad ogni sensibile alterazione dovuta agli atmosferici, ad acque circolanti, o a fattori biologici.

Per quanto concerne invece la formazione inferiore costituita da solo pietrame calcareo proveniente da disgregamento della volta della grotta, intriso da materiale di disfacimento e di decalcificazione originatosi sul posto ed in cui appare trascurabile l'apporto di materiali di provenienza esterna, essa è da considerarsi come un suolo climatico fossile, la cui elaborazione fu governata dal microclima della grotta durante un periodo del Pleistocene medio, immediatamente posteriore alla emersione di questa: periodo nel quale possiamo distinguere una fase di accumulazione di pietrame costituito da frammenti di roccia calcarea provenienti dal disgregamento termoclastico della volta, e una fase successiva di attività idrica relativamente intensa e di conseguente decalcificazione parziale di detto pietrame, con produzione del materiale argilloso-terroso di color giallo-grigio, che contiene soltanto tracce di humus.

A questo punto sarà utile ricordare ⁽¹⁾ quale sia, per ciascuna formazione, la composizione centesimale media, sia del materiale grezzo (frazione inferiore a 2 mm.), che della porzione colloidale (frazione inferiore a 0,002 mm.).

TABELLA I.

Composizione centesimale media dei campioni di materiale inferiore a mm. 2, essiccati a 105° C.

	Formazione superiore a terra bruna	Formazione intermedia a terra rossa	Formazione inferiore a terra giallo-grigia
SiO ₂	49,00	56,10	18,42
Al ₂ O ₃	21,77	16,71	11,25
Fe ₂ O ₃	9,83	8,04	3,13
CaO	2,25	6,40	32,32
MgO	0,10	0,15	1,65
Na ₂ O	tr.	tr.	0,01
K ₂ O	—	0,01	tr.
MnO	0,12	0,09	0,01
TiO ₂	0,81	0,92	0,35
Perd. calcin. . .	15,23	13,02	34,37
	99,11	101,44	101,51

Dalla tabella I appare anzitutto la notevole analogia di composizione dei campioni di materiale grezzo inferiore a mm. 2 delle due formazioni superiore e intermedia, rispettivamente a terra bruna e a terra rossa, dalle quali si differenzia, specialmente pel suo assai maggiore contenuto di calce, la formazione inferiore a terra giallo-grigia.

Dalla tabella II poi risulta evidente la estrema similitudine di composizione delle frazioni colloidali (materiale di diametro inferiore a millimetri 0,002) delle due formazioni a terra bruna ed a terra rossa, mentre quella della formazione a terra giallo-grigia, oltrechè per un contenuto maggiore di calce, si distingue per una proporzione maggiore di silice, alla quale fanno riscontro proporzioni minori di allumina e di ferro.

⁽¹⁾ G. A. BLANC, *Interpretazione eco.*, II.

TABELLA II.

Composizione centesimale media delle frazioni colloidali, essiccate a 105° C.

	Formazione superiore a terra bruna	Formazione intermedia a terra rossa	Formazione inferiore a terra giallo-grigia
SiO ₂	43,65	45,10	51,19
Al ₂ O ₃	32,75	32,39	25,22
Fe ₂ O ₃	10,80	10,12	4,71
CaO	0,15	0,10	1,35
MgO	—	tr.	tr.
Na ₂ O	tr.	tr.	tr.
K ₂ O	0,01	tr.	tr.
MnO	0,17	0,11	0,07
TiO ₂	0,95	1,05	0,88
Perd. calcin. . .	13,6	10,15	15,54
	102,08	99,02	98,96

Finalmente ricorderemo ⁽¹⁾ che le determinazioni del rapporto molecolare fra la silice combinata e i sesquiossidi di ferro e di alluminio, effettuate secondo i metodi sia di HARDY ⁽²⁾, basato sull'estrazione mediante i tre acidi, solforico, cloridrico e nitrico, che di VAN BEMMELEN ⁽³⁾, basato sull'estrazione con acido cloridrico, diedero risultati varianti fra 1,66 a 1,76 per la formazione a terra bruna, fra 1,71 e 1,72 per quella a terra rossa e fra 2,20 e 2,36 per quella a terra giallo-grigia. Il che pone la frazione colloidale di quest'ultima formazione tra i prodotti di alterazione a carattere nettamente siallitico, mentre rivela nelle frazioni colloidali delle due formazioni a terra bruna e a terra rossa un difetto di silice com-

⁽¹⁾ G. A. BLANC, *Interpretazione ecc.*, II.

⁽²⁾ F. HARDY. *Studies in tropical soils*. « Journ. of Agric. Sc. », vol. XXI, 1931, pag. 150.

⁽³⁾ J. M. VAN BEMMELEN. *Die Absorptionsverbindungen und das Absorptionsvermögen der Ackererde*. « Landw. Vers. Stat. », vol. XXXV, 1888, pag. 67.

binata rispetto ai sesquiossidi, ossia un inizio di allittizzazione, secondo la terminologia di Harrassowitz ⁽¹⁾.

Le determinazioni del pH, effettuate sui campioni di materiale di ciascuna formazione passati al vaglio di mm. 2 e seccati all'aria, adoperando il comparatore Hellige-Dubosch e gli indicatori di Clark e Lubs, in soluzione acquosa, hanno dato i risultati seguenti:

Valori di pH

Formazione a terra bruna	7,2
Formazione a terra rossa	7,5
Formazione a terra giallo-grigia	9,3

Le differenze nei valori del pH pei campioni raccolti a vari livelli di ciascuna formazione sono minime: le cifre sopra riportate ne rappresentano le medie. Come si vede, i valori assai vicini trovati per il pH delle due formazioni superiore ed intermedia rappresentano un altro elemento di similitudine chimico-fisica fra queste, mentre, nella formazione inferiore, la cifra assai elevata conferma l'opinione già espressa che trattasi di un materiale risultante dallo sminuzzamento e dal disfacimento *in situ* della roccia calcarea in via di decalcificazione, ma che ha subito una scarsa evoluzione pedogenetica.

Nella già citata nota ⁽²⁾ concernente i complessi colloidali sono stati dati i risultati del dosaggio delle sostanze umiche effettuato con metodo ponderale. Ma date le cause di errore che, così operando, abbiamo potuto accertare, ci è sembrato opportuno di riprendere tali dosaggi con il metodo che ora descriveremo.

La preparazione del campione è stata effettuata nella maniera seguente:

La prima operazione è stata la eliminazione delle parti più grossolane mediante passaggio allo staccio da mm. 2 del materiale delicatamente spappolato in acqua distillata. La raccolta dei campioni essendo stata fatta, come si è detto, in parti del deposito per quanto possibile lontane da quelle ove si osservano resti di focolari ed apporti di origine umana, il materiale di diametro superiore a 2 mm., che viene eliminato, è costituito essenzialmente da frammenti di calcare locale caduti dalla volta della grotta.

Indi, anzichè procedere, come nel caso dello studio del complesso colloidale inorganico, alla separazione, mediante dispersione e successiva

⁽¹⁾ H. HARRASSOWITZ, *Laterit, Material und Versuch erdgeschichtlicher Auswertung*. « Fortschr. Geol. u. Paleont. », vol. IV, 1926, pag. 253.

⁽²⁾ G. A. BLANC, *Interpretazione, ecc.*, II.

decantazione, della porzione di diametro inferiore a mm. 0,002, cioè della frazione colloidale, abbiamo ritenuto necessario, per il dosaggio delle sostanze umiche, di effettuare le ulteriori operazioni sulla totalità del materiale di diametro inferiore a mm. 2. E ciò in quanto l'esame al microscopio del materiale mostra che sono frequenti i granelli di sabbia quarzosa e le particelle di silicati e sesquiossidi di alluminio o di ferro, che presentano patine o concrezioni nerastre o brunastre dovute a sostanze organiche ad essi assai tenacemente unite per adsorzione o combinazione, e delle quali una parte almeno potrebbe sfuggire al dosaggio se si eliminasse senz'altro la porzione detritica nella maniera precedentemente usata per lo studio del complesso colloidale inorganico. Abbiamo dunque ritenuto preferibile procedere alla triturazione in mortaio d'agata, fino a passaggio allo staccio n. 120, della totalità del predetto materiale inferiore a mm. 2.

L'aggiunta che con tale macinazione si fa di materiale colloidale inorganico, prodotto meccanicamente, a quello originariamente contenuto nel campione, non costituisce nel caso presente un inconveniente, mentre d'altro canto si può ritenere che operando in tal modo su tutto il materiale inferiore a 2 mm. si raccoglie la totalità dei colloidi organici presenti nel campione prelevato dal deposito, in quanto il materiale di dimensioni superiori, che si può considerare come certamente non d'apporto eolico, e che è costituito, come si è già detto, da frammenti del calcare locale caduto dalla volta della grotta, non presenta al microscopio le patine od incrostazioni predette. Il che fra parentesi è un'altra riprova dell'inerzia pedologica che ha caratterizzato i singoli livelli del deposito di riempimento della Grotta Romanelli dall'epoca della loro formazione ad oggi: infatti, difficile sarebbe spiegare altrimenti come le patine e le concrezioni in questione compaiano soltanto sui minuti granelli di minerali asportati col materiale terroso dalla superficie della pianura costiera e non già sui frammenti di calcare venuti in contatto con tale materiale dopo la sua deposizione nella grotta.

Per ciò che concerne il procedimento chimico da noi adottato, e che ora descriveremo, è da premettere che il dosaggio globale delle sostanze organiche, fatto con uno dei metodi ormai classici, non si prestava allo scopo che ci proponevamo. Infatti era evidente, dato quel che si è detto dianzi, la necessità di adoperare un metodo permettente un dosaggio di sostanze umiche per quanto possibile ben definite, cioè caratterizzate da un comportamento chimico atto ad individuarle univocamente: e ciò per essere sicuri che l'esame dei vari campioni, sotto questo particolare aspetto, fosse effettuato in maniera da fornirci dati atti a permetterci comparazioni significative. A tale scopo abbiamo adottato come elemento di confronto il dosaggio di quella parte del complesso unico che è solubile in una soluzione d'ammoniaca 6 % dopo che il campione del suolo è stato privato, mediante trattamento con acido cloridrico 1 1, delle basi (prin-

principalmente CaO , Fe_2O_3 , Al_2O_3) alle quali gli acidi dell'humus possono, come già si è detto, trovarsi fissati o sotto forma di composti propriamente detti o sotto forma di aggregati di adsorzione.

Procedendo in tal modo si dosa naturalmente soltanto quella porzione del complesso unico, *sensu lato*, costituita dagli acidi uminici (acido unico propriamente detto e acido imatomelanico); e ciò in quanto il gruppo degli acidi fulvici (acido crenico ed apocrenico) sarebbe solubilizzato e quindi eliminato nel trattamento preliminare con acido cloridrico seguito da lavaggio con acqua, mentre l'ulmina, insolubile tanto nel predetto trattamento con acido quanto in quello ulteriore con alcali, rimarrebbe nel residuo solido finale con il carbonio libero eventualmente presente. Ma ciò nel caso nostro non rappresenta un inconveniente giacchè il complesso uminico è, come abbiamo potuto constatare, in tale prevalenza che si possono considerare come trascurabili le rimanenti frazioni anche ammesso che siano presenti in traccia. Infatti, i residui dei trattamenti con HCl 1/1 e con NH_4OH 6 % dei campioni di suoli da noi esaminati non contengono quantità sensibili di materia carboniosa nera quale è l'ulmina, che generalmente si rinviene nelle ligniti; e d'altra parte i liquidi risultanti dal trattamento dei campioni con HCl e del successivo loro lavaggio con acqua, non rivelano quantità apprezzabili di acidi fulvici, come non ne contiene il liquido finale da cui il gruppo uminico è stato precipitato per acidificazione.

Il dosaggio del gruppo uminico portato in soluzione alcalina è stato operato tanto per via ponderale che con metodo colorimetrico. Nel primo caso, gli acidi uminici vennero precipitati mediante acidificazione della soluzione, raccolti e seccati a 100°C . fino a costanza di peso, indi pesati; ma il metodo ponderale, come già accennato, non ci sembrò dare risultati del tutto sicuri, vista soprattutto la difficoltà di eliminare completamente alcuni costituenti inorganici, e particolarmente la silice colloidale.

Nella preparazione dei liquidi destinati ai dosaggi per via colorimetrica l'estrazione con ammoniaca si è mostrata conveniente, in quantochè gli estratti di sostanze uniche in soluzioni di alcali forti, quali l'idrato sodico o potassico, tendono, come è noto, a scolorirsi con relativa rapidità per distruzione degli acidi per parte degli ioni OH , mentre il trattamento con una soluzione di ammoniaca al 6 % si mostra atto ad una estrazione completa senza dar luogo in misura notevole, entro i limiti di tempo dell'operazione, all'inconveniente suddetto. Ed abbiamo naturalmente avuto cura, nell'adoperare come termine di confronto una soluzione campione di acido uminico (Huminsäure della Casa Heyl), di usare lo stesso solvente adoperato per sciogliere gli acidi uminici dei materiali in esame. L'apparecchio adoperato era il colorimetrico Helligo-Duboseh, e le esperienze vennero ogni volta ripetute variando successivamente le altezze della colonna liquida.

Il campione di circa gr. 2, preparato nel modo dianzi descritto ed essiccato in stufa fino a costanza di peso, a soli 40°C., onde essere sicuri di non provocare alterazioni delle sostanze uniche, veniva anzitutto trattato con una soluzione 2 % di acido cloridrico, per eliminare i carbonati. Indi il residuo veniva trattato a caldo con acido cloridrico 1/1 per dissociare completamente gli umati, o i complessi d'adsorzione che dir si vogliano. Il nuovo residuo veniva lavato sul filtro con acqua calda, fino a reazione neutra: poi, sempre su filtro, veniva trattato con soluzione 6 % di ammoniacca fino ad estrazione completa degli acidi uminici, dopo di che il filtrato veniva portato al volume di 250 cm³.

La soluzione campione veniva preparata nel seguente modo: il predetto acido uminico della Casa Heyl veniva anzitutto disseccato in stufa a 40° C., dopo di che veniva su di un campione di esso determinato il residuo fisso, per calcinazione. Tenuto conto del peso di detto residuo fisso, veniva preparato un idrosol ammoniacale al titolo di 0,01 %. Abbiamo potuto constatare che, col suddetto prodotto da noi adoperato, l'essiccazione a 40° C., sufficientemente prolungata, non lascia un contenuto di umidità tale da influire apprezzabilmente sui risultati, mentre viene sicuramente evitata ogni sensibile alterazione degli acidi uminici.

Abbiamo inoltre ritenuto interessante di effettuare delle determinazioni di confronto adoperando per la preparazione della soluzione campione il complesso uminico della terra bruna della Grotta Romanelli, ottenuto da una forte quantità di questa mediante estrazione con soluzione d'ammoniaca 6 % e successiva precipitazione con acido cloridrico diluito, lavaggio ed essiccazione in stufa a 40° C.

Abbiamo potuto constatare che negli acidi uminici così ottenuti erano contenute varie impurità inorganiche (particolarmente silice idrata), ma che queste impurità non recavano danno in quanto i risultati dei confronti colorimetrici effettuati adoperando la soluzione titolata 0,01 % di questo prodotto erano sensibilmente gli stessi di quelli avuti adoperando il liquido ottenuto col prodotto Heyl.

I risultati da noi ottenuti si possono riassumere nella seguente tabella:

CONTENUTO PERCENTUALE DI ACIDI UMINICI NEL MATERIALE
DI DIAMETRO INFERIORE A MM. 2.

Formazione a terra bruna . . .	}	livello superiore .	2,70 %
		livello mediano .	2,64 %
		livello inferiore .	2,34 %
Formazione a terra rossa			0,24 %
Formazione a terra giallo-grigia	}	livello superiore .	0,08 %
		livello inferiore .	0,12 %

Da quanto finora detto possiamo intanto trarre le seguenti deduzioni:

Durante lo stadio d'arresto della regressione del mare tirreniano, al quale corrisponde alla quota di circa 10 metri sul livello marino attuale il solco di battigia e la fascia di fori di Litodomi della Grotta Romanelli, venne a formarsi la spiaggia ghiaiosa, oggi emersa, costituita da frammenti del calcare locale, arrotondati per fluitamento, riposanti su di un piano roccioso solcato da canali e da marmitte di giganti.

Come è stato già detto l'attribuzione di questa formazione al sistema delle Spiagge a Strombi di più bassa quota è avvalorata dal rinvenimento in essa, se non di specie malacologiche caratteristiche, di un molare di Ippopotamo e di un frammento di lamella di molare attribuibile all'Elefante antico, portanti entrambi i segni di una prolungata usura ad opera dei marosi.

Quando, con la ripresa del movimento regressivo del mare tirreniano, le onde cessarono dal penetrare nella grotta, si andò a mano a mano formando il deposito di pietrame calcareo che si sovrappone al ciottolame fluitato della spiaggia, ed i cui frammenti conservano i margini vivi di frattura. L'apporto di materiali terrosi dall'esterno è stato, durante questo periodo, trascurabile, per cui la totalità della formazione, nei punti dove mancano gli apporti umani, è sostanzialmente dovuta al calcare caduto dalla volta ed allo scarso materiale di disfacimento e di decalcificazione da esso derivato.

La relativa minutezza ed uniformità di pezzatura di questo pietrame fa pensare che esso sia il risultato di un processo assai lento di disgregamento termoclastico della volta della grotta, che dovette verosimilmente prolungarsi per un periodo molto lungo, dato che il carattere « caldo » della fauna di questo orizzonte non induce a pensare ad un ritmo di disgregamento intenso quale può essere determinato da grandi freddi, mentre d'altra parte non è possibile pensare ad un'azione termoclastica per insolazione, dato che l'interno della grotta era, anche a quello stadio iniziale del processo di riempimento, in ombra.

Circa il regime climatico che allora regnava nella regione, vista l'assenza a questo livello di materiali d'apporto eolico dall'esterno, poco si può aggiungere alle predette indicazioni dateci dal lento disgregamento della roccia e dal carattere della fauna. Va tuttavia rilevato il contrasto che presenta, dal punto di vista della piovosità relativa, l'assenza di depositi stalagmitici nella parte mediana ed inferiore del pietrame, rispetto allo strato superiore di esso, saldamente concrezionato da calcite su tutta la sua estensione. Tenendo dunque presenti sia il carattere « caldo » del complesso faunistico dei focolari esistenti a quel livello, che la mancanza di materiali terrosi d'apporto eolico, i quali invece predominano nelle due formazioni soprastanti, si può desumere che regnasse allora nella regione un clima caldo, con una piovosità non

eccessiva, ma tale da favorire lo sviluppo, sulla pianura costiera in via di emersione, di una vegetazione che non consentiva la deflazione eolica, neanche stagionalmente, e quindi neppure la formazione di dune, quali quelle che in epoca posteriore lasciarono i loro relitti nella grotta.

Se poi si vuol dare un valore significativo all'assenza, tra l'abbondanza abbondante avifauna, di due specie steppiche che per contro sono presenti nelle formazioni a terra rossa e a terra bruna, e cioè l'Otarda maggiore e la Gallina prataiola, si potrebbe pensare, anziché ad un regime di praterie perennemente erbose, a un ambiente prevalentemente boschivo.

La fine di questo periodo è marcata da un notevole incremento della piovosità, al quale corrisponde la anzidetta crosta stalagmitica, erta da quindici a venti centimetri, che separa il pietrame calcareo incoerente dalla soprastante formazione a terra rossa. L'apporto del materiale terroso rosso non ebbe inizio se non dopo la cessazione completa degli stillicidi a cui è dovuta la stalagmite stessa. Questo fatto, che risulta dall'assenza di materiali terrosi nella massa della calcite stalagmitica, concorda perfettamente con l'attribuzione della formazione a terra rossa ad un processo di accumulazione eolica.

Che le formazioni stalagmitiche della Grotta Romanelli siano effettivamente da porsi in relazione diretta con aumenti della piovosità, e non siano attribuibili a momentanee deviazioni di falde freatiche, lo dimostra all'evidenza la conformazione stessa della grotta ed in particolare quella del banco relativamente sottile di calcare compatto affiorante che ne costituisce il tetto. Sono perciò soltanto le acque piovane che, a due determinate epoche, arrivarono a permeare direttamente il predetto banco di calcare compatto e ad originare i due orizzonti a concrezioni stalagmitiche, separanti rispettivamente la formazione inferiore a terra giallo-grigia da quella intermedia a terra rossa, e quest'ultima dalla formazione superiore a terra bruna.

Questi due periodi, durante i quali – e specialmente durante quello più antico – la piovosità in Terra d'Otranto dovette essere assai più elevata di quella attuale, sono nettamente delimitati dal punto di vista stratigrafico e non hanno riscontro in alcun altro dei periodi intercorsi tra la emersione della spiaggia tirreniana e l'epoca nostra.

La presenza, tra la scarsa fauna rinvenuta nei pochi resti di focolari esistenti nello spessore della stalagmite inferiore, di specie di origine nordica, come la Volpe e la Lepre, le quali allora per la prima volta compaiono nel giacimento, fa ritenere che all'incremento di piovosità abbia in quel periodo corrisposto un certo inasprimento di clima. Ciò del resto concorderebbe col fatto che durante il periodo d'accumulo della terra rossa, tra l'abbondante fauna, tipicamente calda, e comprendente lo Sciacallo e il Coniglio, non si è trovata traccia delle predette due specie d'origine nordica, le quali per contro ricompaiono in abbondanza, sosti-

tuendosi alle prime, nella formazione a terra bruna, con lo Stambecco, l'Alca impenne e gli Anatidi ed Anseridi artici.

Il microclima della grotta durante questa fase umida dovette essere quello proprio delle zone ad alta piovosità ed a bassa evaporazione, con grado di saturazione assai elevato: microclima atto, in altre parole, ad originare un *suolo umido* secondo la definizione di Ramann. Questo suolo, nel caso della Grotta Romanelli, data evidentemente la sterilità dell'ambiente anche a quell'epoca, non potè arricchirsi di humus come sotto simili condizioni si arricchiscono normalmente i suoli, specialmente calcarei: donde le bassissime cifre da noi trovate pel contenuto di acidi uminici.

Ma è da notare che alla estrema base del pietrame calcareo, là dove questo è in diretto contatto con la roccia viva, e in penetrazione nel sottostante ciottolame marino là dove questo esiste, si osservano in alcuni punti delle piccole accumulazioni di materiale argilloso-terroso di colore giallo-bruno scuro presentante all'analisi una composizione alquanto differente da quella del materiale argilloso-terroso giallo-grigio che intride il pietrame, in quanto un po' più ricco di ferro e di sostanze uniche. Trattasi evidentemente dello stesso prodotto di decalcificazione, ma arricchito in colloidali ferri ed unici provenienti da un'eluviazione selettiva dagli strati di pietrame sovrastanti effettuatasi durante la fase umida: eluviazione resa possibile, malgrado l'azione flocculatrice dell'ambiente calcareo, dalla estrema permeabilità del letto di pietrame stesso.

Ciò ci conduce a concludere che la sterilità dell'ambiente, durante la prima fase del processo di riempimento subaereo della grotta, non dovette essere così marcata com'è oggi e come dovette essere durante i periodi di estrema siccità corrispondenti all'accumulo della terra rossa e della terra bruna. Il che è forse anche da attribuire in parte al fatto che l'orifizio della grotta non era allora ancora ostruito dalla duna che in seguito dovette maggiormente privarla di luce e di aerazione.

Con la cessazione del regime di elevata piovosità, e probabilmente più freddo, al quale corrisponde la crosta stalagmitica inferiore, ebbero inizio gli apporti nella grotta del materiale terroso rosso. Questo si sovrappone direttamente al piano stalagmitico inferiore, senza che fra questo e quello appaia uno strato di pietrame incoerente simile a quello che sovrasta la spiaggia sollevata. Dobbiamo dunque concluderne che alla fase piovosa e relativamente fredda succedette un periodo durante il quale il disgregamento termoclastico della volta - indicato da alcuni strati di minutissimo brecciamme che, a vari livelli, si intercalano nella terra rossa, - fu poco importante come fattore del processo di riempimento della grotta, almeno in confronto all'apporto del materiale eolico.

Appariva interessante porre a raffronto, dal punto di vista del contenuto in sostanze uniche, il primo materiale d'apporto eolico della

Grotta Romanelli, di colore rosso, con la tipica Terra Rossa che costituisce il suolo attuale della circostante regione. Le determinazioni fatte su campioni prelevati dalla estrema superficie di tale suolo attuale, in località non adibite alla coltivazione, hanno dato per il contenuto in acidi umici, dosati col metodo descritto dianzi, cifre varianti fra 0,1 e 0,3 % per materiale inferiore a 2 mm.

Se quindi si tiene conto della identità del colore e degli altri caratteri organolettici e della similitudine della composizione chimica nonché delle caratteristiche petrografiche (delle quali sarà trattato in una ulteriore nota), si è indotti a concludere che tanto la Terra Rossa che attualmente ricopre la Penisola Salentina quanto il materiale terroso costituente la formazione intermedia, a fauna ad Ippopotamo, della nostra grotta, oltre ad essere simili, per non dire identici, dal punto di vista inorganico, corrispondono, dal punto di vista pedologico, a regimi climatico-ambientali analoghi almeno per quel che concerne le condizioni di equilibrio fra produzione e distruzione delle sostanze umiche. Il che, posto in relazione con quanto detto dianzi, porta alla conclusione che quello fu per la regione un periodo a clima sub-tropicale con inverni miti e precipitazioni scarse, e con lunghe estati ad elevata temperatura ai quali dovettero corrispondere prolungati periodi di aridità stagionale della pianura costiera, favorevoli alla distruzione delle sostanze umiche e, nel tempo stesso, alla deflazione eolica. La presenza dell'Otarda maggiore e della Gallina prataiola tra l'avifauna concorda del resto bene con la diagnosi che sembra doversi fare di un regime di steppa pre-desertica.

A questa fase climatica succede, secondo quanto ci indica la serie stratigrafica della Grotta Romanelli, un ritorno ad un regime di più elevata piovosità, che ha lasciato le sue tracce sotto forma delle sottili piastre e delle concrezioni mamillari di calcite che qua e là compaiono alla superficie della formazione a terra rossa ⁽¹⁾. La sporadicità ed il piccolo spessore di queste concrezioni stalagmitiche superiori, poste a raffronto con la estensione e lo spessore della crosta stalagmitica inferiore, fanno ritenere che questo secondo periodo piovoso sia stato assai meno importante del precedente tanto per l'entità delle precipitazioni quanto per la durata.

Il distacco tra la formazione a terra rossa e quella soprastante a terra bruna è nettissimo su tutta l'estensione della grotta, anche nelle zone — e sono le più estese — dove, mancando la stalagmite, i due tipi di materiali terrosi vengono ad essere direttamente a contatto. Non si nota infatti in alcun punto una fusione di tinte che indichi una fase di transizione marcata da apporti di materiali terrosi passanti gradatamente

(1) G. A. BLANC, *Grotta Romanelli*, I, pag. 17 e II, tav. I.

dal rosso mattone vivo della formazione intermedia al bruno scuro della formazione superiore. Ciò dimostra che la superficie della terra rossa dovette evidentemente assumere, durante il periodo umido successivo, una certa compattezza che le permise di rimanere incontaminata dai primi apporti di terra bruna.

Inoltre siccome non si nota indizio alcuno di un accresciuto tenore in humus dello strato superficiale della formazione a terra rossa, presentando questa una perfetta uniformità di colorazione su tutto il suo spessore, se ne deve concludere che l'umidità all'interno della grotta durante il periodo di elevata piovosità intercorrente fra i periodi d'apporto dei materiali terrosi rosso e bruno non bastò ad interrompere sensibilmente la sterilità di quell'ambiente, ed a crearvi un microclima atto alla vegetazione e alla conseguente umificazione del suolo.

L'assenza di materiale terroso nello spessore delle masse di calcite stalagmitica di questo orizzonte offre un'altra valida conferma della origine eolica delle due formazioni a terra rossa e a terra bruna, essendo naturale che ad una fase climatica umida abbia corrisposto un'interruzione del processo di deflazione della pianura costiera ad opera del vento ⁽¹⁾.

La considerevole differenza di contenuto di sostanze umiche fra i materiali terrosi rosso e bruno, sta a dimostrare che, allorché, cessato il secondo periodo umido, tornarono a prevalere condizioni di aridità stagionale favorevoli alla deflazione eolica, i fattori climatici ed ecologici determinanti le condizioni di equilibrio tra formazione e distruzione delle sostanze umiche nel suolo della pianura costiera erano notevolmente diverse da quelle che erano prevalse durante il periodo d'apporto del materiale terroso rosso, e quindi anche da quelle attualmente vigenti nella regione. E siccome sotto un regime di steppa, a parità dei rimanenti fattori climatici, un abbassamento della temperatura media annua deve provocare un rallentamento nel ritmo di decomposizione microbiologica delle sostanze umiche, e quindi un incremento nell'accumulazione di queste, si vede che la assai maggior proporzione di humus che nella Grotta Romanelli si riscontra nella terra bruna rispetto alla sottostante terra rossa concorda perfettamente con la sostituzione di una fauna « fredda » ad una fauna « calda » che si osserva passando dall'una all'altra di queste formazioni.

Una interessante questione da accertare era quella di sapere se la diversità di colorazione delle due formazioni a terra rossa e a terra bruna fosse soltanto dovuta al diverso contenuto di sostanze umiche, oppure se entrasse anche in ginoco un effetto dovuto ad un diverso colore assunto dai composti di ferro, come sarebbe stato ad esempio il caso se la formazione superiore fosse stata da ascrivere alla famiglia delle Terre Brune

(1) W. B. WRIGHT, *The Quaternary Ice Age*. London, 1914, pag. 200.

di Ramann caratteristiche dell'Europa centro-occidentale, in cui il sesquiossido di ferro trovasi ad un grado di elevata idratazione, cioè sotto forma di composti di colore bruno, del tipo limonitico, anzichè dei composti di colore rosso, quali la turgite e l'ematite terrose, che sono i costituenti ai quali è precipuamente dovuta la colorazione dei suoli delle regioni subtropicali e tropicali.

Per chiarire questo punto abbiamo cercato il modo di distruggere le sostanze uniche contenute nel materiale senza che ne potessero essere alterati i composti di ferro di colore bruno o nero eventualmente presenti, il che fu ottenuto mediante trattamento con una soluzione di acqua ossigenata: ciò, naturalmente, previe esperienze di controllo provanti l'inalterabilità, nelle stesse condizioni operatorie, del colore dei minerali di ferro bruni o neri (limonite, magnetite, ecc.).

Ora queste esperienze hanno dimostrato che il materiale terroso bruno della Grotta Romanelli, privato nella maniera anzidetta dell'humus che contiene, assume il colore rosso così caratteristico della formazione sottostante e quindi della attuale Terra Rossa della regione. In altre parole, rimosse che siano le sostanze uniche, la porzione inorganica del materiale terroso della formazione superiore non presenta segno alcuno di una limonitizzazione dei minerali di ferro, quale la si riscontrerebbe in una Terra Bruna di clima freddo-umido; come non presenta nemmeno alcun segno di quei processi di degradazione, per eluviazione dei sesquiossidi di alluminio e di ferro, che conducono ai tipi di suoli podsolici. Ciò sembra escludere che vi sia stato sulla pianura costiera, durante la fase umida a cui corrisponde nella grotta la formazione stalagmitica più recente, un regime di foresta o di brughiera tale da creare un'acidificazione notevole del suolo. Una conferma di ciò si ha d'altro canto nella scarsa variazione della concentrazione idrogenionica dalla base della formazione a terra rossa alla sommità della formazione a terra bruna.

Tutto ciò posto, anche prescindendo dalle indicazioni forniteci dalla fauna della formazione superiore, caratterizzata, come si è detto, da alcune specie tipicamente steppiche, e da altre tipicamente « fredde » la cui comparsa segna la sparizione completa e definitiva delle specie « calde » dei livelli sottostanti, si resta colpiti dalla estrema analogia già notata da Regalia ⁽¹⁾ del materiale terroso bruno della nostra grotta con i materiali di superficie dei suoli di steppa appartenenti alla famiglia dei Tshernosem. Dalle nostre osservazioni risulta infatti che esso ha in comune con questi ultimi, e particolarmente coi Tshernosem della fascia meridionale a clima relativamente più arido, che corre in bordura della zona delle Terre Castane, le seguenti particolarità: nelle parti più profonde

(1) E. REGALIA e P. E. STASI, loc. cit.

e là dove il materiale terroso, non essendo frammisto a pietrame calcareo, si presenta più compatto, si nota che allorchando esso col procedere dello scavo viene a trovarsi esposto per un certo tempo all'aria, si seziona spontaneamente secondo piani verticali ed orizzontali, dando origine alla tipica frammentazione prismatica, caratteristica dell'orizzonte A dei Tshernosem meridionali e delle Terre Castane ad essi imparentate ⁽¹⁾.

Inoltre si nota che alla estrema superficie del giacimento, nell'ambiente asciutto della grotta, il materiale bruno, su di uno spessore di alcuni centimetri, ha la consistenza di un polviscolo incoerente estremamente tenue e leggero, che si solleva al minimo soffio, e che, per quanto venga compresso, ritorna ben presto allo stato polverulento. A questa tendenza del suolo a generare, in superficie, del polviscolo, che è una delle caratteristiche dell'orizzonte A_1 dei predetti suoli di steppa nei periodi di aridità stagionale ⁽²⁾, è precisamente dovuto il sollevamento ed il trasporto, ad opera dei venti, dei materiali che hanno formato le due dune d'arresto di cui i livelli a terra rossa e a terra bruna della Grotta Romanelli sono i relitti.

D'altro canto, la costanza del rapporto molecolare $\text{SiO}_2/\text{R}_2\text{O}_3$ attraverso tutta la formazione a terra bruna, indicante che il suolo della regione non fu durante quel periodo sottoposto a sensibili processi di eluviazione, costituisce un altro carattere di analogia con i Tshernosem.

Come è noto i Tshernosem meridionali si estendono in oggi secondo una fascia che attraversa la Russia centro-meridionale secondo una direzione da Nord-Est a Sud-Ovest, spingendosi oltre le Steppe del Dniepro fino alla Puzta Ungherese e alle pianure della Rumania e della Bulgaria, dove diventano prevalenti le Terre Castane che in Russia compaiono in bordura dei Tshernosem meridionali ⁽³⁾.

Che il materiale terroso bruno della Grotta Romanelli, malgrado il suo colore tendente effettivamente al castano scuro, sia da ascrivere ai Tshernosem meridionali propriamente detti anziché alle Terre Castane riteniamo di poterlo dedurre dal colore nero schietto dell'humus che ne abbiamo estratto, privo di acidi fulvici, ed in tutto simile all'humus dei Tshernosem; mentre l'humus che si estrae dalle Terre Castane è caratterizzato da un colore assai più chiaro, che va dal giallastro al bruno carico ⁽⁴⁾. La colorazione bruna tendente al castano della formazione

⁽¹⁾ K. D. GLINKA, *Die Typen der Bodenbildung, ihre Klassifikation und geographische Verbreitung*. Berlin, 1914.

⁽²⁾ E. WASMUND, *Klimaschwankungen in jüngere geologischer Zeit*, in E. BLANCK, *Handbuch der Bodenlehre*, vol. II, pag. 110. Berlin, 1929.

⁽³⁾ K. D. GLYNKA, loc. cit.

⁽⁴⁾ E. RAMANN, *The evolution and classification of Soils*. Cambridge, 1928, pagg. 48 e 97.

superiore della Grotta Romanelli è infatti dovuta, come abbiamo potuto accertare, alla fusione del rosso mattone vivo del complesso inorganico col nero schietto dell'humus che esso contiene; mentre questo stesso humus intimamente mescolato ad un materiale terroso di tinta più neutra, quale è in genere quella del complesso inorganico dei Tshernosem russi, lo colora in tinte che vanno dal grigio al nero, a seconda della proporzione di humus aggiunta.

Anche le cifre da noi ottenute pel tenore in humus del materiale della Grotta Romanelli trovano frequente riscontro in quelle date dai diversi autori per l'orizzonte A_1 dei Tshernosem meridionali della Russia ⁽¹⁾.

Finalmente un altro carattere di analogia fra l'orizzonte A_1 dei Tshernosem e il materiale terroso bruno della Grotta Romanelli, raccolto nei punti dove esso non è stato contaminato da calcare caduto dalla volta, sta nelle proporzioni di calce varianti fra 2 e 4 %, che sono dello stesso ordine, come sono dello stesso ordine i valori di pH, indicanti in entrambi i casi una lieve alcalinità.

Si può dunque dire che tutto converge sia dal punto di vista paleopedologico che da quello paleontologico a farci concludere che al periodo di formazione del deposito di materiale terroso bruno che chiuse, durante il Pleistocene superiore, la serie stratigrafica della Grotta Romanelli, corrispose in Terra d'Otranto un clima a carattere continentale, con scarsa piovosità media annua e considerevoli sbalzi di temperatura tra estate e inverno; clima questo atto a produrre dei Tshernosem propriamente detti.

Secondo i dati raccolti da P. KOSSOVITSCH ⁽²⁾ i limiti climatici entro cui si sviluppano i Tshernosem in Russia vanno da temperature medie mensili varianti tra — 20,8° C per gennaio e 16,7° C per luglio in Siberia, e tra — 3,5° C per gennaio e 23,3° C per luglio in Ukraina, la piovosità media annua essendo compresa fra 300 mm. e 500 mm. Una parte considerevole delle precipitazioni si produce sotto forma di neve e le scarse piogge estive sono controbilanciate da una forte evaporazione. Ne risulta una vegetazione di steppa che cresce rigogliosa durante la primavera e l'inizio dell'estate, mentre poi, con il successivo prolungato periodo di aridità estiva, viene non solo a cessare ogni vegetazione attiva ma si arresta altresì ogni forma di attività microbiologica del suolo.

Le basse temperature invernali non sono certo una condizione indispensabile alla formazione di suoli assimilabili ai Tshernosem delle steppe russe, la produzione di Terre Nere sembrando soprattutto legata ad un considerevole difetto di saturazione durante il periodo estivo e ad una

⁽¹⁾ K. D. GLYNKA, loc. cit.

⁽²⁾ P. KOSSOVITSCH, *Die Schwarzerde*. « Int. Mitt. Bodenkunde », I, 1911, pag. 199.

considerevole differenza tra le temperature medie dei mesi freddi e dei mesi caldi. Ed è interessante notare a questo proposito che COMEL⁽¹⁾, trattando di suoli attuali, ha emesso l'opinione che le terre di color brunoastro e nerastro che qua e là compaiono nell'Italia meridionale ed insulare siano da considerarsi prodotti pedologici paralleli ai Tshernosem.

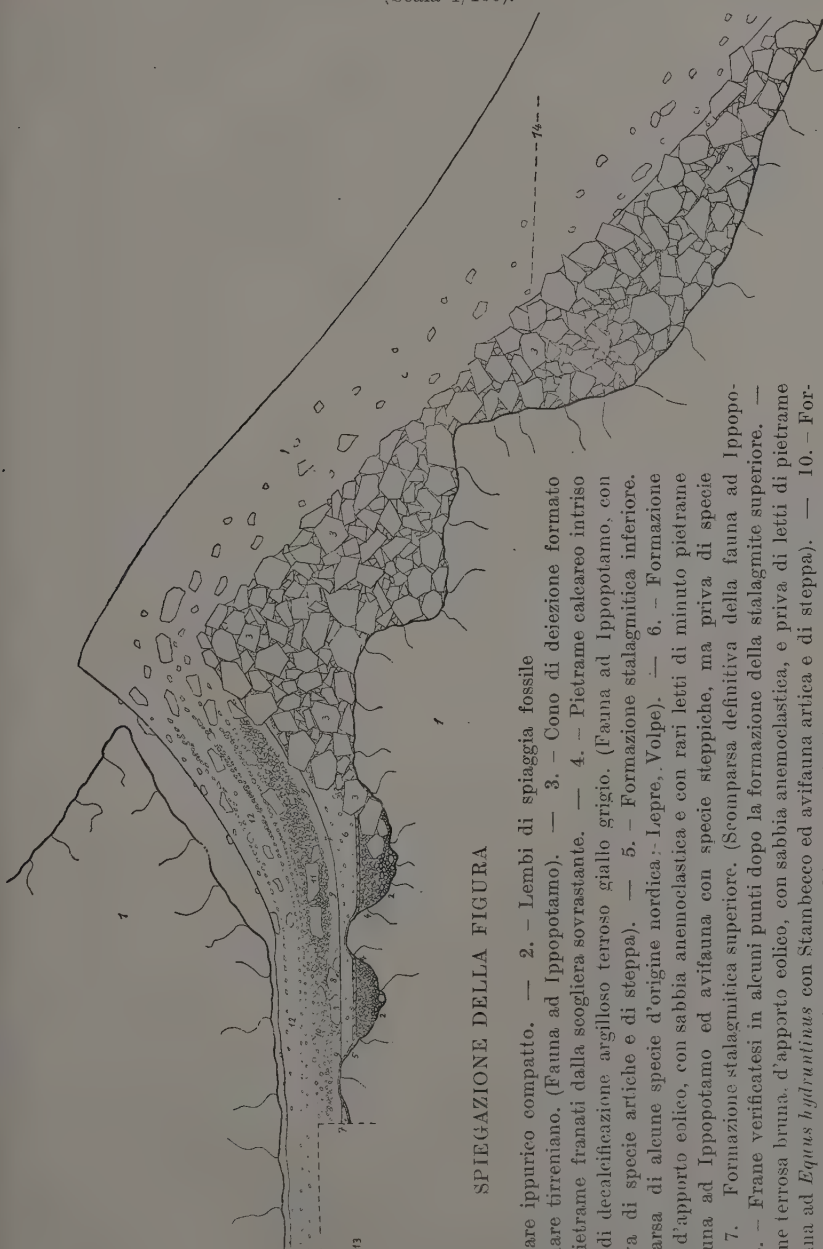
Ma nel caso della formazione superiore della Grotta Romanelli il carattere decisamente « freddo » della fauna, contrastante così nettamente col carattere « caldo » del complesso faunistico della sottostante formazione a terra rossa, sembra escludere che possa trattarsi di un prodotto appartenente al gruppo delle Terre Nere delle regioni tropicali o subtropicali, quali il Regur dell'India, il Black Cotton Soil del Kenya, ecc., o anche delle terre brunastre e nerastre attuali dell'Italia meridionale ed insulare citate da COMEL.

Si vedrà in un'ulteriore Nota quali siano le deduzioni che si possono trarre dalle caratteristiche petrografiche dei complessi detritici delle singole formazioni della Grotta Romanelli: deduzioni le quali corroborano validamente le conclusioni sinora tratte dall'esame delle frazioni colloidali sia inorganiche che organiche.

⁽¹⁾ A. COMEL. *Sul problema della terra bruna in Italia.* « Boll. Soc. Geol. Ital. », vol. LIII, fasc. 2. Roma, 1939.

Schema del processo di formazione del deposito di riempimento della Grotta Romanelli, durante il periodo di emersione post-tirreniano al momento in cui la duna di materiale terroso bruno, nella sua ascesa, stava per chiuderne l'apertura.

(Scala 1/400).



SPIEGAZIONE DELLA FIGURA

1. - Calcare ippurico compatto. — 2. - Lemi di spiaggia fossile
 iati dal mare tirreniano. (Fauna ad Ippopotamo). — 3. - Cono di deiezione formato
 blocchi e pietrame franati dalla scogliera sovrastante. — 4. - Pietrame calcareo intriso
 naturale di decalcificazione argilloso terroso giallo grigio. (Fauna ad Ippopotamo, con
 auna priva di specie artiche e di steppa). — 5. - Formazione stalagmitica inferiore.
 auna comparsa di alcune specie d'origine nordica: Lepre, Volpe). — 6. - Formazione
 osa rossa, d'apporto eolico, con sabbia anemoclastica e con rari letti di minuto pietrame
 areo. (Fauna ad Ippopotamo ed avifauna con specie steppiche, ma priva di specie
 elle). — 7. - Formazione stalagmitica superiore. (Scomparsa definitiva della fauna ad Ippo-
 o). — 8. - Frane verificatesi in alcuni punti dopo la formazione della stalagmite superiore. —
 Formazione terrosa bruna, d'apporto eolico, con sabbia anemoclastica, e priva di letti di pietrame
 areo. (Fauna ad *Equus hydruntinus* con Stambecco ed avifauna artica e di steppa). — 10. - For-
 one terrosa bruna, d'apporto eolico, con sabbia anemoclastica, e con abbondante pietrame e
 si blocchi franati dalla volta. (Fauna come in 9, con in più l'Alca impegne). — 11. - Frana verificatesi in seno alla formazione 10. —
 Formazione terrosa bruna, d'apporto eolico, con sabbia anemoclastica, e rari letti di minuto pietrame (fauna come in 9). — 13. - Parte
 giacimento ancora da esplorare. — 14. - Livello marino attuale.

Biologia. — *Reazione istioide indotta nell'embrione di pollo, entro la ottantaquattresima ora di incubazione dalla inoculazione precoce di materiale leucemico* ⁽¹⁾. Nota di MARIO TORRIOLI e GIUSEPPINA RIGGIO, presentata ⁽²⁾ dall'Accademico PIETRO RONDONI.

L'emopoiesi dell'embrione di pollo nelle prime ottantaquattro ore di incubazione, come i bei lavori di STORTI hanno contribuito a farci conoscere, si dimostra un terreno di studio di straordinario interesse per chi voglia analizzare la risposta di cellule mesenchimali ai più vari stimoli biologici.

Infatti in questo breve periodo di tempo, tre fasi emopoietiche si susseguono rapidamente. Una prima fase megaloblastica di diretta derivazione istioide, una fase micromegaloblastica e quindi, tra la 78^a e la 84^a ora, la fase eritroblastica che domina poi per tutto il successivo periodo di sviluppo.

Accanto però al graduale evolversi di questo indirizzo citoevolutivo ematico restano gli stipiti mesenchimali ancora in pieno sviluppo e ancora in pieno possesso delle loro potenzialità evolutive multiple.

La prima fase, infatti, si svolge quasi interamente negli abbozzi vasali del sacco vitellino, quindi in intima connessione con le primissime evoluzioni del mesenchima primitivo. Nella seconda fase altrettanto avviene durante il sorgere e l'affermarsi dell'emopoiesi dal mesenchima embrionale. Ed infine pur nella terza fase, ancora nel sangue circolante alle prime pulsazioni del cuore, la componente delle cellule istioidei è evidente, come già ebbe a dimostrare MAXIMOW, sia sotto forma di macrofagi, sia, come è risultato nei numerosi nostri controlli, sotto forma di nuclei istioidei liberi degeneranti, ultimo residuo di una fase circolante puramente mesenchimale.

Terreno di studio, quindi, ideale se si vuol prendere in esame la risposta di un mesenchima, che, ai primi stadi differenziativi, mantenga

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Clinica medica della R. Università di Roma, diretto dal prof. Cesare Frugoni.

⁽²⁾ Nell'Adunanza del 30 maggio 1941-XIX.

ancora intatte le sue illimitate potenzialità evolutive. E questo specialmente se si vuole, come nel nostro caso, condurre una analisi accurata delle reazioni biologiche indotte da materiale leucemico umano.

La negatività, infatti, di quasi tutti i tentativi finora condotti con trasfusioni, innesti e simili in animali adulti, viene abitualmente attribuita alla scarsa reattività o recettività di cellule già intimamente adattate anche se morfologicamente simili alle forme del mesenchima primitivo. Coloro che ammettono che la leucemia umana sia legata all'azione di un virus, parlano poi di un biotropismo obbligato stretto, che renderebbe vano ogni tentativo di trasmissione.

Ci siamo, quindi, accinti a questo studio, limitando per ora l'osservazione alla ottantaquattresima ora di sviluppo, riservandoci di estendere l'esperienza qualora i primi risultati si fossero dimostrati incoraggianti.

* * *

Vennero impiegate a questo scopo 500 uova: 201 furono scartate perchè non fecondate, o con embrioni non sviluppati, o morti prima dello sviluppo dell'abbozzo cardiaco (infezioni ecc.). Fu quindi possibile utilizzarne soltanto un totale di 299. Di queste, 179 vennero inoculate o con leucociti leucemici, o con midollo sternale di leucemico o con sangue di embrione, precedentemente inoculato con materiale patologico.

I 120 controlli invece vennero così distribuiti:

- 28 uova non iniettate;
- 12 uova iniettate con soluzione fisiologica;
- 21 uova iniettate con leucociti di sangue normale o con affezioni non leucemiche, ma con cellule istioidi o immature in circolo;
- 3 uova iniettate con leucociti di malato affetto da morbo di Cooley;
- 7 uova iniettate con leucociti di puntato sternale e con puntato sternale totale di individui sani;
- 49 uova iniettate con sangue di embrione, precedentemente inoculato con le sostanze sopradette.

TECNICA.

Si prelevava sterilmente il sangue dalla vena del braccio e si rendeva incoagulabile con soluzione sterile di citrato di Na al 3 %. Il sangue veniva quindi centrifugato per tre minuti primi, in modo da poterne aspirare con una pipetta capillare i soli leucociti, che venivano poi inoculati nell'uovo, che supponevamo fecondato, prima dell'inizio della incubazione.

Le uova si pulivano prima con un batuffolo intriso di alcool, poi, sempre con alcool, più efficacemente disinfettate nella zona, all'unione del

terzo esterno col terzo medio più vicina al polo ottuso, dove, con un ago montato, passato alla fiamma, praticavamo un forellino superficialissimo, del diametro di 2 mm. circa, cercando di non ledere le membrane. Queste venivano poi lacerate con la stessa pipetta capillare con cui si faceva l'inoculazione di due gocce del materiale patologico o di controllo. Il foro si chiudeva con paraffina fusa al momento.

Le uova così inoculate si mettevano quindi in termostato, regolato a temperatura oscillante intorno a $38^{\circ},5'$ ed incubate per 84 ore, sorvegliando sempre le condizioni di aereazione e di umidità.

Alla fine del periodo di sviluppo, da noi preso in esame, aprivamo con pinze sterili il guscio dell'uovo in corrispondenza del foro già precedentemente praticato e, messo allo scoperto l'embrione, tagliavamo con forbicine sterili il cuore, che in tale epoca è pulsante ed evidentissimo.

Se ne aspirava con una pipetta capillare il sangue e si facevano con esso gli strisci. Una parte del sangue, con la stessa tecnica, veniva utilizzato per le successive inoculazioni in altre uova.

OSSERVAZIONI.

Dal punto di vista macroscopico nessuna differenza fu mai osservata tra i controlli e gli esperimenti, prendendo in studio i fondamentali caratteri di grandezza, aspetto, numero di somiti ecc.

Gli embrioni morti precocemente sono compresi fra le uova non utilizzate; si tenne conto invece di quelli morti dopo la 72^a ora e il sangue del cuore di questi ultimi venne ugualmente utilizzato per i trapianti.

Di questi embrioni, morti dopo lo sviluppo del cuore, 5 figurano tra i controlli e 14 tra gli esperimenti, così distribuiti:

7 nel ceppo A - 4 in D - 1 in ESP - 1 in EMS - 1 in F

(per le illustrazioni dei ceppi vedi tabella seguente).

Di morti utilizzati abbiamo avuto cioè, il 4,3 % nei controlli e l'8,49 % negli esperimenti.

I dati più interessanti forniti dallo studio del sangue circolante, prelevato dal cuore, strisciato e colorato con MAY-GRÜNWARD-GIEMSA, si possono sintetizzare così:

Nei controlli, come già si è detto, le cellule istioidei, perfettamente conservate, spesso in attività macrofagica, sono estremamente rare. È difficile dare cifre esatte, ma siamo certamente intorno all'1 ‰, cifra che si avvicina a quella data da MAXIMOW. Tenendo conto invece anche dei nuclei liberi si raggiunge la cifra globale di 8,5 %. Le uova di controllo che davano un numero di istiociti superiore al 20 ‰, rappresentano il 14,4 ‰.

La serie rossa presentava il quadro tipico già ben conosciuto, ossia una scarsissima sopravvivenza di macromegaloblasti, una modica componente micromegaloblastica e una fase dominante eritroblastica.

Gli esperimenti invece dettero le cifre seguenti:

16,6 % media globale delle cellule istioidi in tutte le uova esaminate;

40,6 % media delle uova con componente reticolo-istiocitaria maggiore del 20 %.

Più che le cifre brute però interessa il fatto che le cellule istioidi osservate negli esperimenti sono completamente diverse dai nuclei liberi descritti nei controlli.

Innanzitutto si tratta di cellule provviste di protoplasma, di dimensioni notevoli, quantunque oscillanti entro limiti amplissimi - le più grandi raggiungono i 14 micron - ; il nucleo è costituito di una trama evidentissima di cromatina, intercalata di spazi ampi a fessura; il nucleolo evidente, azzurro pallido, spesso grande, talora gigantesco.

Frequenti sono cellule a nucleo bilobato (rassomiglianti al tipo del paramieloblasto di NAEGELI).

Le più capricciose atipie sono osservabili nella distribuzione della cromatina: frammentazioni, talora aspetto quasi pulverulento, più spesso dissolvimento del nucleo in forme ricordanti i cromosomi, senza un vero e proprio aspetto anafasico (anafase atipica?).

La serie rossa, anche nei campioni più ricchi delle forme precedentemente descritte, presentava scarse alterazioni. Sono da sottolineare, tuttavia, due punti:

1° una assenza completa di forme macromegaloblastiche, salvo casi eccezionali, ed una scarsa componente micromegaloblastica. Accanto allo svolgersi della reticolo-endoteliosi cioè, la serie rossa continua il suo sviluppo, senza subire un vero e proprio arresto di maturazione. Solo nei primi trapianti del ceppo linfoide si è osservata qualche volta una predominanza della fase megaloblastica, non più osservabile nei seguenti passaggi;

2° un discreto ma evidente aumento delle mitosi con qualche forma atipica (mitosi tripolare).

Un'ultima osservazione va fatta sulle esperienze condotte per trasmissione. Come risulta dagli annessi schemi, per alcuni ceppi la trasmissione da cuore a cuore venne eseguita anche per otto generazioni; i risultati di queste trasmissioni in serie sono riassunti dalla seguente tabella:

<i>Ceppi</i>	<i>Uova</i>	<i>1 > 20 %</i>
A (leuc. inf. cronica)	30	50 %
D (» miel. cr.)	50	38 %
E (» » cr. midollo stern.)	20	30 %
E (» » cr. sangue perif.)	18	55,5 %
F (» emocitoblastica subac.)	26	38 %
G (» miel. cr.)	6	33,3 %
H (» » cr.)	3	33,3 %
L (» » cr.)	3	66,6 %

I risultati sopra esposti sono abbastanza eloquenti di per sè e non hanno bisogno di troppi commenti.


Essi si possono sintetizzare nelle seguenti affermazioni: L'inoculazione di leucociti leucemici in uova di pollo prima dell'incubazione, induce nel sangue circolante dell'embrione all'84^a ora, con una frequenza del 40,6 % una reticolo-endoteliosi notevole, sia per la percentuale di cellule, sia per il loro aspetto ricco di atipie. Tale reticolo-endoteliosi si presenta con una notevole frequenza trasmettendo in serie anche per molti passaggi il sangue del cuore degli embrioni inoculati. Anche embrioni che non hanno dato la reazione, pur essendo stati inoculati, possono trasmettere con il loro sangue la positività ad embrioni successivi (vedi schemi in fondo).

Questi essendo i fatti fino ad ora accertati, risulta subito evidente, che allo stato attuale delle esperienze sarebbe prematuro qualunque tentativo di interpretazione del fenomeno osservato.


Certamente il delicatissimo reattivo biologico impiegato ha reagito là dove l'animale adulto resta pressochè indifferente ed è anche certo che la reazione è strettamente specifica, come il gran numero di controlli sta a dimostrare; ma nulla ancora si può dire circa il « quid » che tale risposta ha provocato. La tecnica stessa di isolamento dei leucociti, da noi impiegata (semplice centrifugazione del sangue citratato), dà luogo a dubbi. Sono necessarie altre esperienze con solo plasma e con leucociti lavati, prima di poter affermare che questi ultimi siano veramente i determinanti della reazione. In secondo luogo sarà necessario studiare il destino ulteriore degli embrioni. Se il quadro ematico osservato si dimostrerà una fugace reazione incapace di influire sull'avvenire dell'embrione, l'interpretazione da prospettare sarà ben differente da quella che sarebbe necessario invocare se la reazione si dimostrasse un profondo e duraturo perturbamento dell'emopoiesi nei periodi ulteriori. Finora solo l'aumentata mortalità negli esperimenti rispetto ai controlli, sembrerebbe deporre nel senso di una grave alterazione. Ma, ripetiamo, è preferibile per ora limitarci all'esposizione dell'interessante fenomeno che offre nuove possibilità allo studio delle leucemie, rimandando a poi la discussione sulle eventuali interpretazioni.


I = cellule istiodi.


M = megaloblasti.

 uova con $I < 10$.

 uova con $I > 10$.

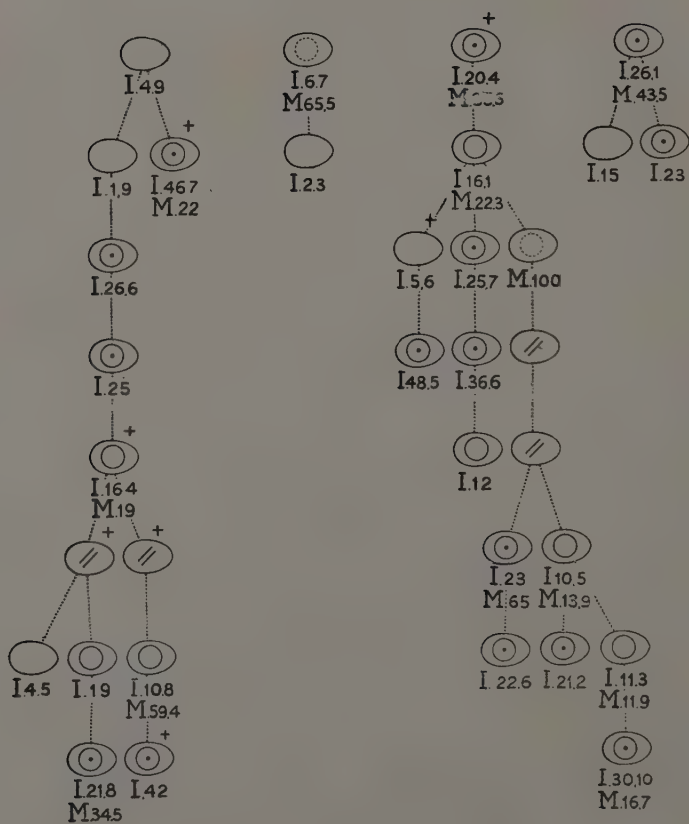
 uova con $I > 20$.

 uova con embrione morto.

 uova con embrione da cui si
son fatti i passaggi ma
non lo striscio.

SCHEMI

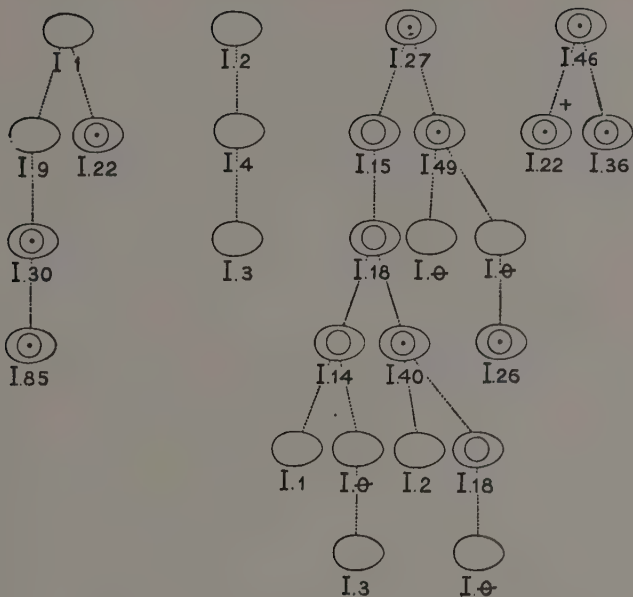
A



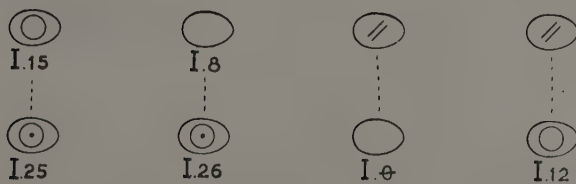
D



F



G



H



L



CONTROLLI CON UOVA NON INOCULATE



I.28



I.05



I.8



I.6



I.25



I.15



I.3



I.65



I.1



I.1



I.05

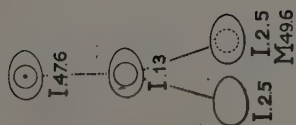


I.4



I.22

Controlli con uova non inoculate.



I.19

I.3
M.22

I.24.7



I.17



M.100

+
I.4

I.9



I.4



I.2



I.2



I.6

+
I.12

I.5



I.27



I.25



I.7



I.6

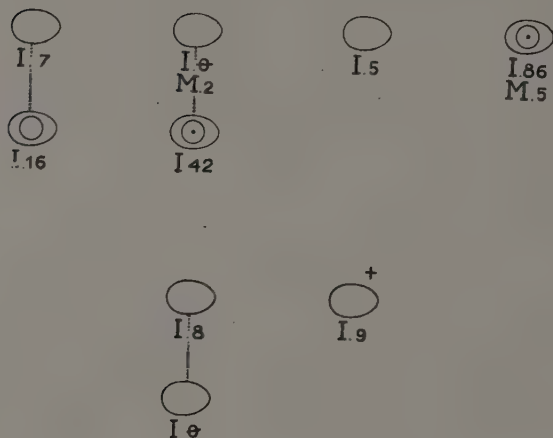


I.40

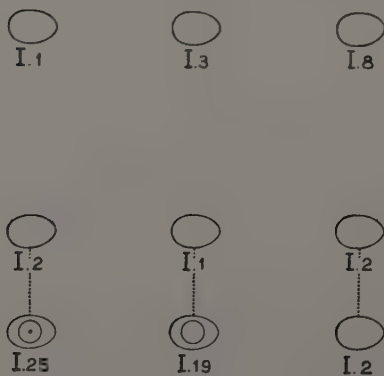


I.1

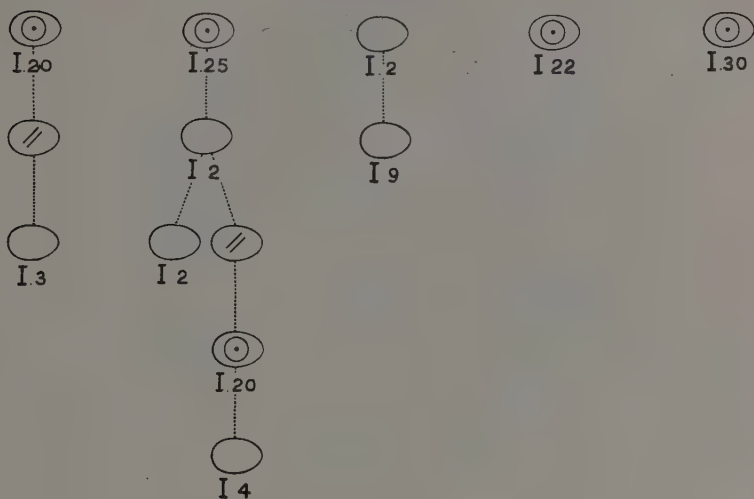
Controlli con soluzione fisiologica.



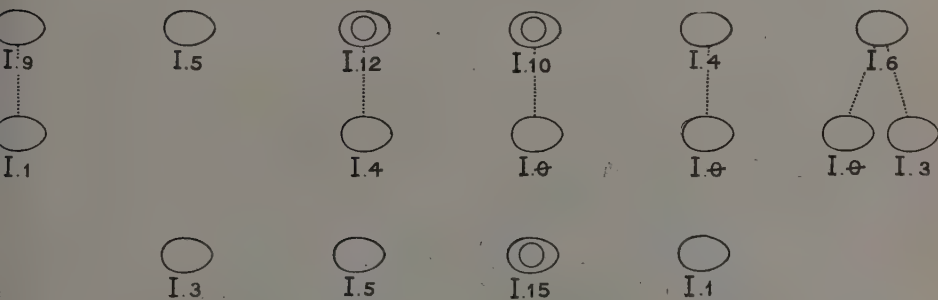
Controlli con soluzione fisiologica.



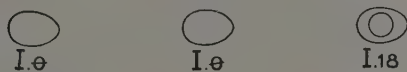
Controlli con leucociti di sangue normale.



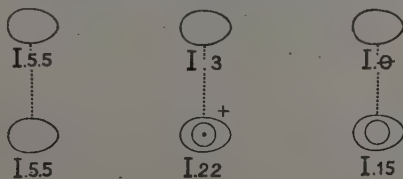
Controlli con leucociti di sangue normale.



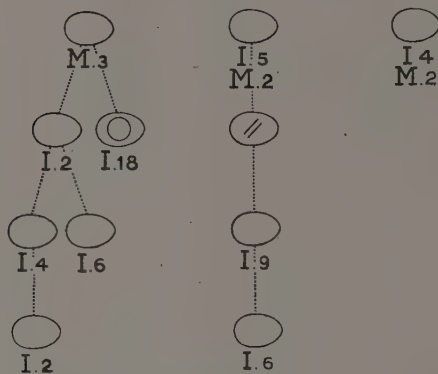
Controlli con leucociti di sangue normale.



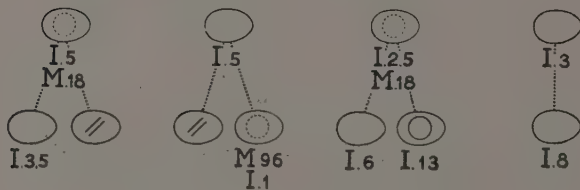
Controlli con leucociti di sangue non leucemico con cellule istioidei in circolo.



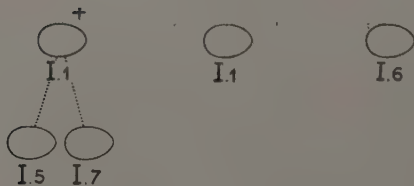
Controlli con leucociti di malato affetto da morbo di Cooley.

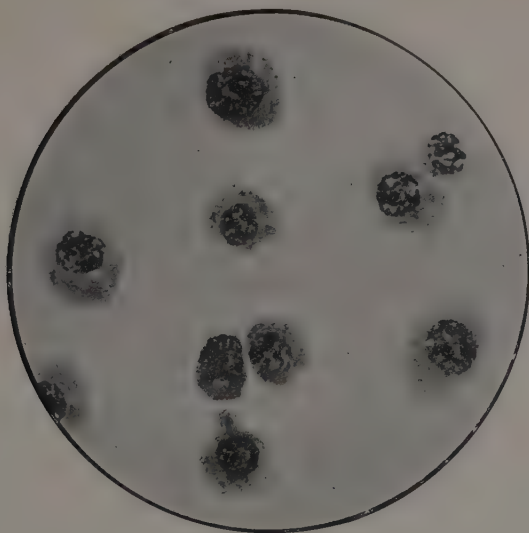


Controlli con puntato sternale normale (totale).

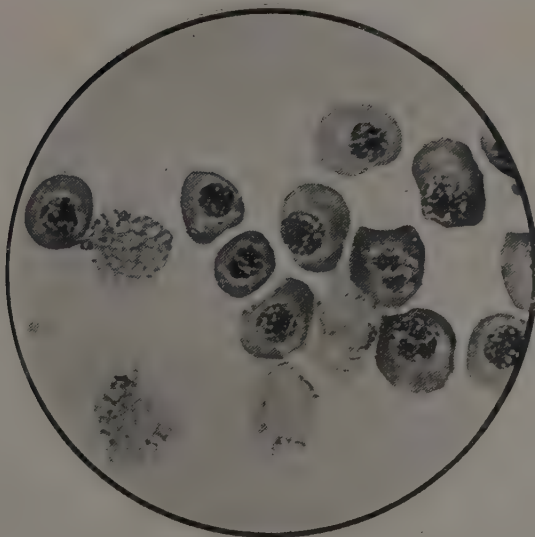


Controlli di midollo sternale normale (soli leucociti).





Microfotografia n. 1: Sangue prelevato dal cuore di embrione di pollo normale alla 84ª h. di sviluppo.
(color. May-Grünwald-Giemsa, ingrand. 1000 d.).



Microfotografia n. 2: Sangue prelevato dal cuore di embrione di pollo, inoculato con leucociti leucemici, alla 84ª h. di sviluppo.
(color. May-Grünwald-Giemsa, ingrand. 1000 d.).

Astronomia. — *Contributo alla Dinamica del Sistema Galattico.* Nota ⁽¹⁾ di GIUSEPPE ARMELLINI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. La presente Nota ha per oggetto di togliere una divergenza che esiste tuttora nella Dinamica Stellare, tra i risultati della teoria e quelli dell'osservazione. Per maggiore chiarezza, ricapitoleremo in breve lo stato attuale della questione.

La Dinamica Stellare ebbe origine, si può dire, nel 1904, quando KAPTEYN trovò che i movimenti delle stelle (od almeno di quelle sufficientemente vicine al Sole, in modo da essere accessibili alle nostre osservazioni meridiane e spettroscopiche), riferiti ad un sistema di assi fissi, *non* sono dati *a caso* come si era creduto fin ad allora. Il KAPTEYN mostrò invece che esisteva una *direzione preferita* (che, come poi si vide, è presso a poco quella che congiunge il Sole col baricentro di tutto il Sistema Galattico) lungo la quale gli astri si muovono in maggior numero, sia in un senso che nell'altro.

Si parlò sul principio — specialmente da EDDINGTON — di due gigantesche correnti, o fiumi, di astri, che si muovevano in sensi opposti lungo questa direzione preferita; ma presto il fenomeno venne interpretato in modo assai più perspicuo ed elegante da SCHWARZSCHILD, per mezzo della famosa teoria degli *ellissoidi di velocità stellare*. Ed ecco come tale rappresentazione può schematizzarsi.

Siano S_1, S_2, \dots, S_n le stelle vicine al Sole (in pratica alcune migliaia) di cui si conoscono le parallassi, i moti propri e le velocità radiali: dati che permettono di calcolare le loro velocità, riferite ad un sistema di assi fissi nel senso della Dinamica Classica. Siano $\hat{V}_1, \hat{V}_2, \dots, \hat{V}_n$ i vettori rappresentanti tali velocità.

Preso un punto fisso O , facciamo partire da O i vettori $\hat{V}_1, \hat{V}_2, \dots, \hat{V}_n$, e siano E_1, E_2, \dots, E_n i loro estremi. Consideriamo le superfici di eguale frequenza di questi punti E ; superfici che chiameremo col nome di *superfici di velocità stellare*.

Naturalmente, se invece di partire da un punto fisso O , si prendono le velocità relative ad un origine mobile G (in pratica, gli astronomi scelgono

(1) Pervenuta all'Accademia il 12 luglio 1941-XIX.

il baricentro del gruppo di stelle considerato ed indicano tali velocità col nome di *peculiari*), la superficie resta la medesima e subisce soltanto una traslazione, giacchè basta sottrarre a tutti i vettori \hat{V}_i un vettore costante e cioè la velocità di G .

È ovvio che, se le velocità stellari ubbidissero interamente alla legge del caso in modo che nessuna direzione fosse preferita, tali superfici sarebbero sfere aventi per comune centro O . Invece l'osservazione mostra che, con molta approssimazione, esse sono *ellissoidi, simili e coassiali*, aventi sempre per centro O .

Inoltre l'osservazione mostra che questi ellissoidi sono, presso a poco, rotondi ed allungati, con l'asse maggiore diretto verso la costellazione del Sagittario ed anzi, prossimamente, verso il baricentro del Sistema Galattico, che, visto dal Sole, si trova appunto in tale regione. Ricordiamo, in proposito, che il Sistema Galattico, ha la forma di un solido di rotazione con piano equatoriale di simmetria ed anzi, presso a poco, quella di una colossale lente biconvessa, molto schiacciata. Ricordiamo pure che il Sole si trova quasi sul piano equatoriale del Sistema ad una distanza di circa 30.000 anni di luce dal centro.

Più esattamente, indicando con a, b, c le lunghezze dei tre semiassi dell'ellissoide generico, si avrebbe secondo i calcoli di WICKSELL basati sopra le osservazioni moderne

$$a : b : c :: 1 : 0,67 : 0,60$$

essendo, come si diceva, l'asse maggiore diretto quasi verso il centro del Sistema Galattico, l'asse intermedio giacente sul piano dell'equatore galattico e l'asse minore perpendicolare al piano stesso.

2. - Tutto ciò può considerarsi come risultato delle osservazioni. Ma grave è la divergenza che s'incontra, quando cerchiamo di spiegare tali fatti con la teoria.

Sul principio, ammettendo che il Sistema Galattico avesse già raggiunto uno stadio di regime e che esso fosse sferico e composto di strati sferici omogenei, EDDINGTON dimostrò teoricamente che gli ellissoidi di velocità erano appunto rotondi ed allungati, con l'asse maggiore diretto verso il centro della Galassia; cosa che sembrava sciogliere la questione. Ma presto sorsero gravi difficoltà.

Infatti, mentre l'ipotesi dello stato di regime (essendo il Sistema Galattico certamente assai antico) sembra ammissibile almeno in prima approssimazione, lo stesso non può dirsi della forma sferoidica che è certamente assai lontana dal vero; giacchè - come abbiamo ora ricordato - le osservazioni mostrano che il Sistema Galattico ha forma assai schiacciata. Si ripresero quindi i calcoli, supponendo che il Sistema Galattico avesse la forma di un solido di rotazione, ed il risultato fu ben diverso,

giacchè si trovò che l'ellissoide di velocità diveniva allora rotondo con l'asse polare diretto sul piano dell'equatore galattico in direzione normale alla congiungente il Sole col baricentro della Galassia. In altre parole, teoricamente, la direzione dell'asse polare dell'ellissoide di velocità veniva a differire di quasi 70° da quella messa in luce dalle osservazioni!

Un tale profondo disaccordo tra teoria ed osservazione, si trova spesso ricordata da quelli astronomi moderni che si sono occupati dell'argomento. Così p. es. il VON PAHLEN ⁽¹⁾ nel suo recente « *Lehrbuch der Stellarstatistik* » scrive in proposito che « *dies ist nun ein ausserordentlich wichtiger Punkt, da hier die strenge Folgerungen aus der Theorie der stationären Zustandes augenscheinlich mit den Ergebnissen der astronomischen Beobachtung nicht übereinstimmt* » (op. cit., pag. 872). Ed aggiunge che « *die Erlärung des empirischen Befundes in diesem Punkte, nur durch eine Abänderung der Theorie erkaufte werden kann* » (loc. cit.).

3. Come modificazione della Teoria, il VON PAHLEN, e con lui altri astronomi moderni, in mancanza di meglio, avanzano l'ipotesi di una dilatazione o condensazione del Sistema Galattico; o, più generalmente ancora, che esso non sia in uno stato di regime.

Effettivamente, alcune ricerche ⁽²⁾ compiute dall'astronomo SHIVESHWARKAR (il quale però si è limitato a sistemi aventi due sole dimensioni ed ha considerato quindi una distribuzione ellittica, anziché ellissoidica) mostrano che in tal modo si possono produrre alcune deviazioni nelle direzioni degli assi degli allissoidi di velocità. Devesi però considerare che, se la Galassia non ha ancora raggiunto lo stato di regime, vi è però probabilmente poco lontana; come appare, tra l'altro, da fatto che i movimenti sono presso a poco maxwelliani. Si potrà certamente in tal modo spiegare quella modesta deviazione (di circa 15° e 20°) che sembra esistere tra la direzione dell'asse polare degli allissoidi e la congiungente il Sole col centro del Sistema Galattico; ma sarebbe arduo voler invece spiegare una deviazione di quasi un angolo retto, come quella tuttora esistente tra teoria ed osservazione.

Si è pure supposto che la Galassia abbia un nucleo centrale di forma sferica e di massa preponderante, mentre un'altra spiegazione, che ricordiamo per completezza, fu quella proposta dal MINEUR, secondo cui le stelle, di cui si è esaminato il movimento, appartenerebbero ad un ammasso locale il cui centro sarebbe a circa 90° da quello di tutto il Sistema Galattico. Ma tali spiegazioni appaiono in realtà, troppo artificiose ⁽³⁾.

⁽¹⁾ Cfr. VON PAHLEN, *Lehrbuch der Stellarstatistik* (Leipzig, Barth, 1937).

⁽²⁾ Cfr. « *Monthly Notices* », vol. LXXXV.

⁽³⁾ Per maggiori notizie cfr. B. LINDBLAD, *Die Milchstrasse*, in « *Handbuch der Astrophysik* », Bd. V.

Se non che, non mi risulta che fin qui sia stato tenuto conto del fatto che, come ora vedremo, la soluzione fin qui adottata, è matematicamente una soluzione *troppo particolare* delle equazioni del moto delle stelle della Galassia. Ora, nella presente Nota, io mi propongo di dimostrare che, tenendo conto di tale fatto, è possibile ottenere risultati teorici che si accordino con quelli della osservazione, facendo sparire l'antica divergenza.

4. A tale scopo, prendiamo come origine il baricentro G del Sistema Galattico, come piano xy il suo piano equatoriale e come asse z l'asse di rotazione del Sistema. Sia inoltre f la *funzione di distribuzione*; e cioè (a meno del fattore $dx dy dz du dv dw$) sia $f(x, y, z, u, v, w)$ la probabilità affinché una stella abbia coordinate comprese tra x, y, z ed $x + dx, y + dy, z + dz$ e componenti di velocità comprese tra u, v, w ed $u + du, v + dv, w + dw$. Supponendo, per semplicità, il sistema allo stato di regime, la f non conterrà esplicitamente il tempo.

Tenendo conto del fatto che la derivata ordinaria di f rispetto al tempo deve essere nulla, dato lo stato di regime, si dimostra subito ⁽¹⁾ che essa soddisfa all'equazione:

$$[1] \quad \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial y} v + \frac{\partial f}{\partial z} w + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{dv}{dt} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{dw}{dt} = 0$$

e cioè - essendo le componenti dell'accelerazione $\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt}$ eguali alle componenti X, Y, Z della forza unitaria dipendente solo dalle coordinate - alla equazione a derivate parziali:

$$[2] \quad u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} + X \frac{\partial f}{\partial u} + Y \frac{\partial f}{\partial v} + Z \frac{\partial f}{\partial w} = 0$$

la cui integrazione, come si sa dalle regole del calcolo, si riduce a quella del sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$[3] \quad \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = \frac{du}{X} = \frac{dv}{Y} = \frac{dw}{Z}.$$

In conseguenza, per noti teoremi sopra le equazioni differenziali, se indichiamo con J_1, J_2, \dots, J_5 gl'integrali primi del sistema [3], dovremo avere:

$$[4] \quad f = \varphi(J_1, J_2, \dots, J_5)$$

⁽¹⁾ Cfr. JEANS, *Astronomy and Cosmogony*, pag. 356 (Cambridge, 1928). Per una semplice dimostrazione cfr. anche G. ARMELLINI, *Astronomia Siderale*, vol. III, pag. 231 (Bologna, Zanichelli, 1936-XIV).

indicando con φ una funzione uniforme arbitraria. Poichè nelle [3] non compare il tempo, t_1 la φ conterrà in generale *cinque* integrali primi.

5. Ora, la forza agente sopra ogni astro è data dalla risultante delle attrazioni esercitate su di esso da tutte le stelle del Sistema Galattico. Se quindi chiamiamo con P il potenziale newtoniano nel punto occupato dall'astro, avremo:

$$[5] \quad X = \frac{\partial P}{\partial x} \quad ; \quad Y = \frac{\partial P}{\partial y} \quad ; \quad Z = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Poniamo ora

$$[6] \quad r^2 = x^2 + y^2$$

indicando cioè con r la distanza di un punto dall'asse z . Poichè il Sistema Galattico si suppone aver forma di un corpo di rotazione intorno all'asse z , il potenziale P dipenderà soltanto da r e da z , onde sarà:

$$[7] \quad X = \frac{x}{r} \frac{\partial P}{\partial r} \quad ; \quad Y = \frac{y}{r} \frac{\partial P}{\partial r}.$$

Introducendo le [7] nella [3], si vede subito che il sistema ammette i due integrali primi uniformi:

$$[8] \quad J_1 \equiv u^2 + v^2 + w^2 - 2P = h$$

$$[9] \quad J_2 \equiv xu - yv = c$$

che sono appunto quelli delle forze vive e delle aree.

Ma, affinché le superfici di velocità siano ellissoidi è necessario che le componenti di velocità entrino in f collegate tra loro in forma quadratica. Tenendo conto di ciò e del fatto che la f deve soddisfare alla condizione [4], si vede subito che una soluzione è data da:

$$[10] \quad f = \varphi (\lambda_1 J_1 + \lambda_2 J_2 + \mu_2 J_2^2)$$

dove $\lambda_1 \lambda_2 \mu_2$ sono costanti arbitrarie di cui però interessano soltanto i rapporti. Eseguendo il calcolo, si trova, come ora vedremo, che l'ellissoide di velocità è rotondo ed ha l'asse polare sul piano galattico ed in direzione normale alla congiungente il Sole col baricentro del Sistema Galattico: il che, come dicemmo, è in pieno disaccordo con le osservazioni.

6. In tale ragionamento, che è sommariamente quello seguito nel già citato VON PAHLEN, nello SMART ⁽¹⁾ e nel JEANS ⁽²⁾, non si tiene però

⁽¹⁾ Cfr. W. SMART, *Stellar Dynamics*, pag. 339 e sgg. (Cambridge, 1938).

⁽²⁾ Cfr. J. JEANS, *Astronomy and Cosmogony*, pag. 358 e sgg. (Cambridge, 1928).

conto che la [10] è una soluzione *particolare*, poichè contiene solo due integrali. Vediamo di trovarne una più generale servendoci del fatto che il Sistema Galattico ha forma assai schiacciata, che il piano equatoriale galattico è un piano di simmetria e che il Sole è assai prossimo a tale piano distando da esso circa 300 anni di luce; onde, nell'intorno del Sole (che è appunto quello a cui si estendono le nostre osservazioni), la z è uguale a circa $1/100$ di r , che vedemmo essere di circa 30.000 anni di luce. Ne segue che P sarà funzione *pari* di z e che nell'intorno del Sole può essere svolta in serie di potenze di z , limitata ai primi termini.

Avremo dunque

$$[11] \quad P = C_0 + A(r) - z^2 B(r)$$

dove la costante C_0 indica il valore del potenziale nel centro del Sistema Galattico ed A e B sono funzioni della sola r ; ambedue positive, giacchè il potenziale è massimo nel centro e, per eguali valori della r , sul piano dell'equatore galattico.

Ora, poichè noi studiamo il movimento degli astri nelle vicinanze del Sole, r è assai prossimo ad r_0 , dove r_0 indica la r del Sole; inoltre z^2 è assai piccola. Possiamo dunque sostituire al posto di B un suo valore approssimato, ponendo in essa r_0 in luogo di r ; con ciò B diviene una costante positiva che indicheremo con $\frac{1}{2}\beta^2$.

Otteniamo allora immediatamente dalla [11]:

$$[12] \quad Z = \frac{\partial P}{\partial z} = -\beta^2 z$$

ed introducendo tale valore nelle [3] avremo:

$$[13] \quad \frac{dz}{w} = -\frac{dw}{\beta^2 z}$$

da cui ricaviamo un terzo integrale primo uniforme e cioè:

$$[14] \quad J_3 \equiv w^2 + z^2 \beta^2 = k$$

dove k è una costante. Meccanicamente, tale integrale indica che le stelle nelle vicinanze del Sole, si muovono di moto armonico rispetto all'asse z , con periodo $\frac{2\pi}{\beta}$.

Si può obiettare che la [12] è soltanto approssimata, onde anche l'integrale J_3 è valido approssimatamente. Ma è facile rispondere che anche l'ipotesi che il nostro Sistema Galattico abbia forma di un corpo di rotazione intorno all'asse z , è certamente valida solo in via approssimata.

In altre parole l'integrale J_3 ha in pratica un grado di attendibilità eguale, se non superiore, a quello J_2 che è ammesso da tutti gli astronomi.

Tenendo conto di J_3 una forma più generale della funzione di distribuzione f dipendente da una combinazione quadratica delle velocità, sarà:

$$[15] \quad f = \varphi (\lambda_1 J_1 + \lambda_2 J_2 + \mu_2 J_2^2 + \lambda_3 J_3)$$

dove $\lambda_1 \lambda_2 \mu_2 \lambda_3$ sono costanti arbitrarie, di cui interessano solo i rapporti. La [15] sostituisce la [10] generalmente usata dagli astronomi.

7. Passiamo ora dalle coordinate cartesiane a quelle cilindriche r, ϑ, z dove ϑ indica l'anomalia, contata sul piano dell'equatore galattico da una direzione fissa qualsiasi e poniamo, secondo notazione spesso usate dagli astronomi:

$$[16] \quad \frac{dr}{dt} = R \quad ; \quad r \frac{d\vartheta}{dt} = \Theta$$

dove R e Θ indicano quindi la velocità radiale e trasversale sul piano dell'equatore galattico.

Si ha subito:

$$[17] \quad J_1 \equiv R^2 + \Theta^2 + w^2 - 2P = h$$

$$[18] \quad J_2 \equiv r\Theta = c.$$

Poniamo ancora

$$[19] \quad \omega = - \frac{\lambda_2}{2(\lambda_1 + \mu_2 r^2)}$$

$$[20] \quad \Theta_1 = \Theta - \omega r$$

$$[21] \quad 2Q = 2\lambda_1 C_0 - (\lambda_1 + \lambda_3) \beta^2 z^2 + \frac{\lambda_3^2 r^2}{4(\lambda_1 + \mu_2 r^2)} - 2\lambda_1 A.$$

Avremo con facili calcoli

$$[22] \quad \lambda_1 J_1 + \lambda_2 J_2 + \mu_2 J_2^2 + \lambda_3 J_3 = \lambda_1 R^2 + (\lambda_1 + \mu_2 r^2) \Theta_1^2 + (\lambda_1 + \lambda_3) w^2 - 2Q.$$

Poichè la funzione di distribuzione f ha la forma indicata nella [15], risulta che nelle vicinanze di un punto p. es. del Sole - essendo Q determinata in funzione delle coordinate cilindriche del punto stesso - le superfici di velocità sono date dall'equazione:

$$[23] \quad \lambda_1 R^2 + (\lambda_1 + \mu_2 r^2) \Theta_1^2 + (\lambda_1 + \lambda_3) w^2 = \text{costante}.$$

Esse sono quindi quadriche, coassiali e simili tra loro. Poichè la probabilità che una stella abbia velocità infinita è nulla, tali quadriche non

possono avere punti all'infinito, onde saranno necessariamente *ellissoidi*; quindi λ_1 come pure $\lambda_1 + \mu_2 r^2$ e $\lambda_1 + \lambda_3$ saranno positivi.

Indicando con r_0 la r del Sole, si vede subito che le lunghezze a, b, c dei tre semiassi di tali ellissoidi stanno tra loro secondo la proporzione:

$$[24] \quad a^2 : b^2 : c^2 :: \frac{1}{\lambda_1} : \frac{1}{\lambda_1 + \mu_2 r_0^2} : \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_3}.$$

Inoltre, essendo il Sole — e cioè il comune centro di questi ellissoidi — situato quasi sul piano dell'equatore galattico, si vede immediatamente che l'asse a è diretto radialmente e cioè secondo la congiungente il Sole stesso col centro della Galassia, l'asse b a 90° da esso sul piano dell'equatore galattico e l'asse c normalmente a detto piano.

Se fosse $\lambda_3 = 0$ e cioè se non si tenesse conto del terzo integrale J_3 come fin qui era stato fatto — la [24] mostra che tali ellissoidi sarebbero necessariamente rotondi, avendo come asse di rotazione l'asse b e cioè una retta situata a 90° di distanza dalla congiungente il Sole col centro galattico; ciò che è in pieno disaccordo con le osservazioni. La considerazione del terzo integrale J_3 , introducendo la nuova costante arbitraria λ_3 , permette invece di togliere questo ostacolo.

Basta infatti porre $\lambda_1 = 1$; $\mu_2 r_0^2 = 1,22$; $\lambda_3 = 1,78$, perchè dalle [24] risulti subito $a : b : c :: 1 : 0,67 : 0,60$ in pieno accordo con le osservazioni.

7. Dalle equazioni ora date si possono trarre alcune notevoli conseguenze, e cioè:

I° La [15] e la [22] mostrano che in f le coordinate compaiono con r^2 e per il tramite di Q che, a sua volta, dipende unicamente da r e da z^2 . In conseguenza la funzione di distribuzione f assume lo stesso valore per punti situati simmetricamente rispetto al piano dell'equatore galattico od all'asse z e tali punti avranno quindi identici ellissoidi di velocità.

II° La [24] mostra che per punti situati sull'asse z (purchè a breve distanza dal piano equatoriale, per la validità dell'integrale J_3), avendosi $r = 0$, gli ellissoidi di velocità sono *rotondi* e *schacciati*, con l'asse di rotazione c diretto lungo lo stesso asse z ; cosa che risulta anche facilmente intuibile per ragioni di simmetria. Allontanandosi il punto dall'asse z e crescendo quindi r , il semiasse trasverso b diminuisce costantemente, onde gli ellissoidi divengono a *tre assi* con l'asse maggiore sempre parallelo al piano dell'equatore galattico e diretto verso l'asse z . A distanza poco maggiore di quella del Sole, b diviene eguale a c e gli ellissoidi tornano ad essere *rotondi*, ma *allungati*. A distanza ancora maggiore, b diviene minore di c e l'ellissoide torna a *tre assi*.

III° La [19] e la [20] indicano che la velocità trasversale Θ_1 è eguale alla differenza tra la velocità trasversale Θ riferita ad assi fissi e quella ωr dovuta ad una rotazione generale del Sistema Galattico, intorno

all'asse z , con velocità angolare ω . Tale rotazione, messa in luce dalle osservazioni moderne specialmente per merito di OORT, ci dà il movimento d'insieme (od il moto del baricentro) di un gruppo di stelle a distanza r . In conseguenza Θ_1 ha il significato di una velocità trasversale *peculiare*, mentre R e w possono considerarsi sia come velocità assolute che come velocità peculiari. Ne segue che l'ellissoide [23] deve considerarsi come l'ellissoide delle velocità peculiari: come appunto viene praticamente determinato dagli astronomi.

IV° Il fatto che la costante μ_2 è positiva, indicato dal confronto della teoria con le osservazioni, conduce ad una conseguenza importante. Esso cioè mostra, in virtù della [19], che *la velocità angolare di rotazione del Sistema Galattico non è costante, ma diviene sempre più lenta quanto più ci allontaniamo dall'asse z .*

Tale fatto, pienamente confermato dalle osservazioni, deve quindi ritenersi come una conseguenza dell'essere l'ellissoide di velocità allungato verso lo stesso asse z . Infatti, se il Sistema Galattico, ruotasse come un corpo rigido ($\omega = \text{costante}$) dovrebbe aversi $\mu_2 = 0$ e quindi, per la [24] gli ellissoidi di velocità sarebbero *sempre* rotondi e schiacciati, con l'asse polare normale al piano dell'equatore galattico. Se invece ω divenisse più rapida al crescere di r , la costante μ_2 sarebbe negativa e quindi avremmo in generale ellissoidi a tre assi con l'asse maggiore b sempre diretto parallelamente al piano dell'equatore galattico, ma in direzione normale alla congiungente il punto considerato col centro della Galassia.

V° La funzione φ della [15], resta naturalmente arbitraria, risultando dall'integrazione di un'equazione a derivate parziali. Ma, varie considerazioni tratte dal Calcolo delle Probabilità, inducono ad assegnare alla φ la forma approssimata di una funzione esponenziale. Si ha allora da [15] e da [22], essendo C ed h^2 costanti di proporzionalità:

$$[25] \quad f = C e^{[2Q - \lambda_1 R^2 - (\lambda_1 + \mu_2 r^2) \Theta_1^2 - (\lambda_1 + \lambda_3) w^2] h^2}$$

da cui risulta immediatamente che i valori medi di R^2 , Θ_1^2 e w^2 (valori che indichiamo con \bar{R} , $\bar{\Theta}_1^2$, \bar{w}^2) soddisfano alla proporzione:

$$[26] \quad \bar{R}^2 : \bar{\Theta}_1^2 : \bar{w}^2 :: \frac{1}{\lambda_1} : \frac{1}{\lambda_1 + \mu_2 r^2} : \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_3}$$

e cioè sono proporzionali ai quadrati dei semiassi degli ellissoidi di velocità; proprietà di cui anzi vari astronomi si servono per definire gli ellissoidi stessi.

8. — Termineremo con un'osservazione. J. JEANS (op. cit. pag. 358) esamina il caso di un sistema stellare di forma irregolare e scrive che allora « the only integral is the energy integral ». Tale affermazione, rigo-

rosamente parlando, è erronea, giacchè ogni sistema differenziale ammette integrali primi indipendenti in numero eguale al proprio ordine.

Forse il JEANS ha inteso dire che l'integrale dell'energia è l'unico generalmente uniforme che possa scriversi immediatamente, anche senza conoscere la forma esplicita di P . Ma ciò non toglie che la soluzione $f = \varphi(J_1)$ che egli dà, sia una soluzione soltanto *particolare* del problema: cosa che *non* autorizza le conclusioni che egli ne trae sul comportamento generale di sistemi di stelle.

Così p. es. nella presente Nota abbiamo visto che la soluzione [10] del problema galattico, fin ad ora adottata dagli astronomi, non soddisfa alle osservazioni appunto perchè *troppo particolare*; mentre invece le osservazioni sono soddisfatte se si adotta la nostra soluzione [15] la quale è più lata della prima, contenendo un integrale di più.

Rigorosamente parlando deve quindi dirsi che nel caso di sistemi irregolari, se non si conosce il potenziale P in funzione delle coordinate, il problema rimane indeterminato e solo può calcolarsi qualche soluzione particolare.

Astronomia (Astrofisica). — *Determinazioni spettroscopiche della rotazione stellare* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di ATTILIO COLACEVICH, presentata da GIORGIO ABETTI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Desidero con questa Nota concludere brevemente una polemica sorta con W. KRAT su questioni riguardanti la possibilità o meno di determinare la rotazione di una stella a mezzo dell'allargamento delle righe di Fraunhofer osservabili nello spettro emesso dalla stella stessa, con un metodo da me proposto.

La mia prima Nota sull'argomento ⁽³⁾ dimostra che tale misura è possibile sotto certe restrizioni, oltre che con un metodo rigoroso dovuto a J. CARROLL, anche con la semplice misura della larghezza di righe spettrali opportunamente scelte. Si ottiene così un notevole vantaggio dato che il laborioso metodo del CARROLL è applicabile solo per righe di cui si conosce bene il profilo, mentre quello semplice esposto nelle mie precedenti note è applicabile su vasta scala. Il confronto dei risultati ottenuti con i due metodi sono in buon accordo e fanno ritenere più che sufficiente, data l'attuale precisione di questo genere di misure, il metodo da me svolto.

Questo assume per il profilo originario delle righe in esame, quale cioè sarebbe se la stella non ruotasse, uno di tipo esponenziale, la cui larghezza è inversamente proporzionale ad un certo coefficiente k_2 che compare nelle formule in uso.

L'assunzione in prima approssimazione del profilo esponenziale è stata usata anche da altri astronomi che si sono occupati dello stesso argomento ed è accettata anche dal KRAT. La polemica verte sul valore di k_2 .

In una Nota precedente il KRAT ⁽⁴⁾ aveva svolto un metodo che permetteva di stabilire questo valore di k_2 della riga non distorta, dall'esame di quella distorta per rotazione. Nel mio lavoro citato veniva indicato in una nota a piè di pagina, che il calcolo fatto in quel caso

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nel R. Osservatorio di Arcetri-Firenze.

⁽²⁾ Pervenuta all'Accademia il 27 settembre 1941-XIX.

⁽³⁾ « Mem. Soc. Astr. Ital. », vol. X, 1937, pag. 163.

⁽⁴⁾ « Astron. Nachrich. », Bd. 256, pag. 103.

non era esatto e che il valore di k_2 che se ne ricavava non era conseguentemente utile.

Nell'espore il metodo ho esaminato l'influenza che variazioni di k_2 portano nel valore della rotazione stellare ed ho trovato che, allorchè si abbia motivo di ritenere che la riga distorta per rotazione abbia una larghezza quasi doppia di quella originaria non distorta, si ottengono buoni risultati per la rotazione. Per larghezze maggiori una variazione di k_2 non porta alcuna conseguenza pratica; per valori minori si ha invece una variazione di cui si può tener conto teoricamente con opportuni coefficienti che ho tabulati.

Il fatto però sussiste che non si conosce il profilo non perturbato dalla rotazione, quindi non si ha modo di sapere se il profilo osservato arrivi al doppio di quello di origine. Ho dovuto quindi fare un'ipotesi circa la larghezza della riga non disturbata e quindi circa il valore di k_2 . A questo scopo, per i tipi spettrali da me osservati, ho limitato lo studio a righe che nello spettro delle stelle, le quali non hanno sensibile rotazione, sono piuttosto strette e cioè alle righe 4471 dell'elio e 4481 del magnesio. Ho assunto per queste righe il profilo esponenziale ottenuto da altri astronomi: a questo profilo corrisponde nelle unità di misura da me adottate $k_2 = 1$. In questa ipotesi risultano determinabili velocità di rotazione equatoriali lineari maggiori di 50 km/sec., come è detto esplicitamente nella citata Nota (¹); poichè per valori più piccoli, non conoscendo il valore esatto di k_2 , non si sa quale dei coefficienti correttivi tabulati sia da adoperarsi. Nella stessa Nota (¹) sono indicate infine altre condizioni restrittive, generalmente non impegnative.

A conforto delle ipotesi fatte ho esaminato una serie di righe su spettrogrammi da me ottenuti per stelle, per le quali vi era una possibilità di ricavare per altra via detta rotazione ed ho trovato che il metodo rispondeva allo scopo e quindi su queste basi era accettabile.

In una Nota successiva (²) W. KRAT critica il mio metodo e ne espone un altro per ricavare k_2 in base a misure fatte sulla riga distorta. Le critiche esposte dipendono principalmente dal non aver giustamente interpretate le mie unità di misura di k_2 , fatto che lo porta a risultati errati; altre critiche non facevano che ripetere quanto già avevo accennato circa le limitazioni esistenti.

In base a ciò ho pubblicato una risposta (³), dimostrando la insussistenza delle critiche e sviluppando due esempi numerici in casi particolari, presentati dal KRAT stesso, che dimostrano gli ottimi risultati che si possono raggiungere col mio metodo; contemporaneamente dimostravo

(¹) « Mem. Soc. Astr. Ital. » I. c., pag. 170 e 165.

(²) « Russian Astr. Journal », vol. XV, 1938, n. 5-6, pag. 437.

(³) « Rend. Lincei » Sc. Fis. Mat. e Nat., vol. XXIX, 1939, pag. 585.

che la nuova derivazione di k_2 proposta da Krat non poteva ritenersi valida e portava a risultati discordanti.

Sono lieto di constatare ora nella risposta del KRAT ⁽¹⁾ che egli ha adottato il mio punto di vista e cioè che il valore di k_2 non si può determinare dal profilo della riga distorta per rotazione, salvo quei casi in cui si possa applicare il metodo rigoroso del CARROLL. Il KRAT propone di adottare come valore della velocità di rotazione una quantità β_u ottenuta con la teoria del CARROLL. Questa quantità richiede la determinazione dell'area della riga e quindi anche misure di intensità. Il valore di β_u è teoricamente quasi uguale a quello che si ricava per la via da me proposta, con la differenza che questa richiede una misura di larghezza e una stima approssimata di intensità; dal punto di vista pratico ciò è un notevole vantaggio.

Il KRAT ribatte ancora sulla impossibilità di poter adottare un determinato valore di k_2 , cioè assumere una determinata larghezza per il profilo esponenziale delle righe spettrali non distorte per rotazione, e quindi la difficoltà pratica di avere significativi valori per la rotazione stellare con il mio metodo. In contrasto a ciò sta l'accordo praticamente ottenuto fra i risultati del mio metodo e quelli calcolati per un certo numero di casi in cui ciò era possibile. Questo sta ad indicare che per quei casi era lecito assumere $k_2 = 1$, e quindi a maggior ragione $k_2 > 1$.

Prendendo una stella particolare e determinandone la rotazione in base ad una qualsiasi riga spettrale è difficile ritenere che il numero ottenuto rappresenti realmente una velocità di rotazione, poichè potrebbe benissimo darsi che la riga avesse quel profilo proprio e la rotazione fosse nulla. Ciò è in accordo con quanto afferma il Krat; ma devo far rilevare che le cose non stanno così. Infatti non si prende una riga qualsiasi ma una che generalmente, è, in assenza di rotazione, ben definita. In più si considerano come risultati accettabili solo quelli che portano a velocità di rotazione superiore ai 50 km.sec. Bisogna poi rilevare che gli effetti della rotazione si ripercuotono su tutte le righe spettrali e quando la rotazione è notevole queste assumono una forma caratteristica appiattita. Quindi un competente esame dello spettro permette di farsi un'idea circa l'attendibilità dei risultati che ne conseguono.

Con ciò non si vuole, nè si può escludere, la possibilità di esistenza di altre cause che alterino tutte le righe spettrali, che non dipendano dalla origine delle righe e dal loro livello sull'atmosfera stellare, in un modo analogo a quanto fa la rotazione, ma si ritiene fino ad oggi che la migliore spiegazione in simili casi sia l'esistenza di una rotazione la quale, con il metodo da me svolto, si può determinare molto semplicemente.

(1) « Poulkovo Obs. Circular », n. 30, 1940, pag. 5.

Fisica. — *Nuove ricerche di centrifugazione fotoelettrica.*
Nota ⁽¹⁾ di QUIRINO MAJORANA, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Queste ricerche fanno seguito alle altre da me esposte in Note precedenti ⁽²⁾. Con la dicitura *centrifugazione fotoelettrica*, ho inteso riferirmi allo studio di particolari effetti, osservabili quando si pongano in rotazione delle cellule fotoelettriche, colpite dalla luce. Ho trovato infatti, che una simile azione meccanica può provocare, in opportune circostanze, variazioni nelle correnti fotoelettriche osservabili. I diagrammi a pag. 193 e 194, della terza Nota citata, mostrano le complesse particolarità di tale fenomeno. Essi si riferiscono all'uso di cellule fotoelettriche al sodio del commercio, in atmosfera gassosa, con griglia non rigida, e sottoposte a f. e. m. acceleratrice dei fotoelettroni, o degli ioni da questi generati. Era interessante rendersi conto di ciò che sarebbe avvenuto, sperimentando invece, con cellule, a griglia assolutamente indeformabile, ed a vuoto spinto. Con ciò, si sarebbe potuto verificare l'attendibilità di un certo ragionamento teorico, esposto in fine della Nota richiamata.

A tal fine, mi sono reso conto dapprima, della entità della deformazione elastica delle griglie delle cellule usate, sotto l'azione rotatoria. Ciò ho fatto eseguendo fotografie stroboscopiche delle cellule in moto, illuminate con sprazzi periodici di luce, con frequenza identica a quella della rotazione. La griglia di ciascuna cellula viene così sorpresa sempre nella stessa posizione angolare, e si può misurare il suo spostamento, da quella che essa ha nel caso di quiete. Tale spostamento, nel caso delle cellule indicate a pag. 189, è risultato dell'ordine di mm. 2, per velocità di 40 giri/sec. Rimaneva però a decidere, se una simile deformazione (allontanamento della griglia dalla placca) contribuisse in qualche modo, alla definizione dei diagrammi osservati.

Per rispondere a tale quesito, ho costruito delle cellule abbastanza simili a quelle già usate, avute dal commercio, ma fornite di griglie del

⁽¹⁾ Pervenuta all'Accademia il 28 agosto 1941-XIX.

⁽²⁾ Questi « Rendiconti » Serie VII, vol I, pag. 342, 438, 1940-XVIII; Id., vol. II, pag. 187, 1941-XIX.

tutto indeformabili, perchè appoggiate completamente sulle pareti di vetro di ciascuna cellula, opposte allo strato fotosensibile. Tali cellule sono state da me preparate al sodio od al potassio, sensibilizzato all'idrogeno, con atmosfera di neon od argon, oppure a vuoto spinto. Per vero, queste cellule, in conseguenza di qualche imperfezione nel processo di fabbricazione, non hanno la sensibilità e soprattutto la stabilità, di quelle fornite dal commercio. Purtuttavia, con esse ho potuto ripetere l'osservazione e la misura degli effetti di centrifugazione, di cui ho già fatto parola. I nuovi effetti sono apparsi così in generale assai ridotti, ma pur sempre evidenti; i diagrammi rilevati hanno andamenti notevolmente diversi, da quelli riportati nell'ultima Nota citata.

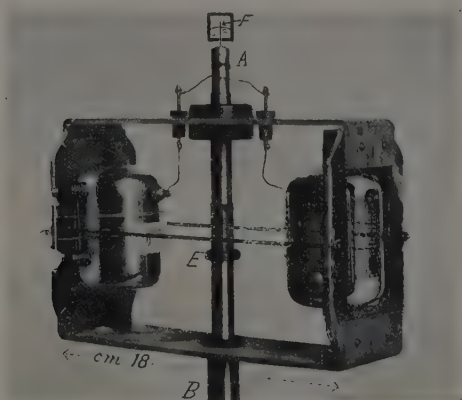


Fig. 1.

Simili indagini mi hanno fatto comprendere, come i complicati effetti di centrifugazione osservati, abbiano principalmente la loro sede nello spazio catodico, cioè fra lo strato fotosensibile e la griglia. La forza centrifuga riesce in qualche modo, ed in misura diversa da caso a caso, ad alterare le traiettorie dei fotoelettroni. Naturalmente, in base anche ad un computo precedentemente esposto, ciò non può avvenire, in misura apprezzabile, che là dove il campo elettrico è nullo o quasi.

In vista di tale conclusione preliminare, ed al fine di meglio precisarla, ho successivamente limitato il mio studio a cellule a metallo alcalino (cesio) sensibilizzato, in vuoto spinto, e con griglia indeformabile. E poichè le cellule da me costruite, al sodio od al potassio, non presentano come ho detto dianzi, grande sensibilità e stabilità; grazie all'interessamento cortese dell'Ing. A. CASTELLANI, della S. A. F. A. R., ho potuto disporre di cellule da lui fatte appositamente preparare. Sono anche esse

a vuoto spinto, ed a griglia indeformabile, e con esse ho potuto eseguire le osservazioni e misure di cui passo a discorrere.

Due di tali cellule sono state montate nell'apparecchio a rotazione, come è indicato nella fig. 1, la quale riproduce l'asse di rotazione, liberato dal sostegno e dai cuscinetti a sfere. Le cellule hanno forma tronco-cilindrica, diametro esterno mm. 48, altezza mm. 66. Esse sono montate in apposita intelaiatura di elektron, fissata sull'asse. Si scorge dalla figura, che le placche, costituite da strati argentati sensibilizzati al cesio, sono più prossime all'asse di rotazione; le griglie sono volte verso l'esterno. Queste sono costituite da filo di ferro di m. 0,6 di diametro, con maglie di mm. 2 di lato. Le parti libere di tali maglie risultano quadrate, di mm. 1,4 di lato. Le placche sono connesse metallicamente all'estremità superiore

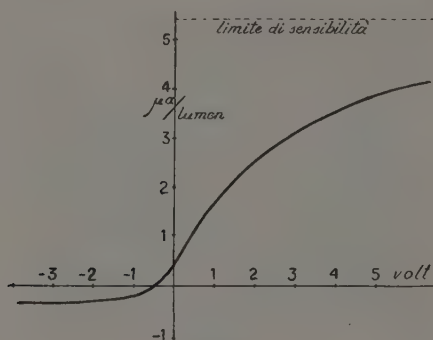


Fig. 2.

dell'asse, A; le griglie, all'inferiore, B. Le due metà, A. B. sono isolate elettricamente, perchè l'asse è costituito da due parti metalliche distinte, calettate su tubo di ebanite interno, del quale affiora all'esterno l'anello E. Le connessioni metalliche, o prese di corrente, dal di fuori del congegno ruotante, si eseguono: in alto, mediante il filo di rame F, penetrante in un pozzetto di mercurio chiuso, con forellino in basso, dal quale il mercurio, per capillarità, non può sfuggire, anche quando l'asse ruota: in basso, con altro filo simile, non indicato in figura, pescante in un secondo pozzetto, ma a pelo libero.

La sensibilità media delle cellule, in funzione del potenziale di griglia, è rilevabile dal diagramma della fig. 2. Esso è stato costruito, illuminando una cellula alla volta, in riposo, mediante una comune lampada ad incandescenza a luce bianca. La sensibilità è espressa in microampère per lumen. Basta già una tensione dell'ordine di 10 volt, positivi, sulla griglia, per avere, quasi, la massima sensibilità di 5,4 $\mu\text{a/lum}$. Questa scende a meno di 1/10, per potenziale nullo di griglia. Come fa vedere il diagramma,

essa diventa negativa, cioè la griglia emette elettroni, al di là di $-0,4$ volt. L'effetto può dipendere da un leggero deposito di cesio, su di essa.

Ponendo in rotazione il sistema, si può impunemente forzare la velocità sino a 51 giri/sec. A tale massima velocità, corrisponde, per le località mediane di ciascuna cellula (poste a circa cm. 7 dall'asse di rotazione), una forza centrifuga di gr. 733 per ogni grammo-massa, o di gr. $6,6 \cdot 10^{-25}$, per ogni elettrone.

Si possono fare ora più serie di osservazioni. Incominciamo con l'usare le cellule senza alcuna f. e. m. acceleratrice, illuminandole mentre sono in rotazione, con velocità regolabile da 3 a 51 giri/sec. Alla più piccola velocità, non corrisponde alcun effetto di centrifugazione, mentre il solito galvanometro non accusa, per la sua inerzia o smorzamento, la corrispondente fluttuazione di corrente fotoelettrica. È necessario in ogni caso sperimentare con cellule in moto e non ferme, perchè il flusso luminoso medio, cadente su di esse, sia lo stesso, indipendentemente dalla velocità. Si osservano così le correnti, i_v , a varie velocità, alternativamente con quella alla velocità piccola, i_o , che dovrebbe essere costante; ma che subisce col tempo accidentali piccole variazioni. Si fa il rapporto:

$$r = (i_v - i_o)/i_o.$$

L'esperienza fa vedere che, nelle dette condizioni, cioè per f. e. m. acceleratrice, aggiuntiva, nulla, e per la speciale conformazione delle cellule, r è sempre negativo. Cioè, la deviazione per cellule in rotazione, è più piccola che per cellule in moto. Si ritrova cioè un risultato che avevo già intravisto al principio di queste ricerche, per quanto alterato da causa perturbatrice successivamente eliminata. Il valore massimo assoluto di r è ora dell'ordine di 0,06. Cioè la deviazione fotoelettrica si abbatte del 6 % circa, per velocità di 51 giri/sec.

Il diagramma della fig. 3, ci indica il modo con cui cresce (in valore assoluto) r , al crescere della velocità di rotazione. Il suo andamento è sensibilmente rettilineo. Ovviamente, poichè la forza centrifuga cresce come i quadrati di quella velocità, il diagramma stesso assumerebbe andamento parabolico, se sulle ascisse si riportassero linearmente i valori di quella forza.

Possono ora tracciarsi altri diagrammi, sperimentando, sempre alla stessa velocità (per esempio, la massima di 51 giri/sec.) e sottoponendo le cellule, a f. e. m. diverse, da caso a caso. Si porti cioè la griglia a potenziale progressivamente variabile, tra $+10$ e -10 volt. Naturalmente, così operando, la sensibilità delle cellule cambia di molto da caso a caso, come ci dice il diagramma della fig. 2. Ma in prima indagine, e per semplicità, si può ammettere la proporzionalità degli effetti fotoelettrici alla intensità luminosa. Questo principio, comunemente ammesso, resta al-

quanto menomato, nel caso di f. e. m. nulla. Prescindendo da ciò, si regola la intensità luminosa, ogni volta, in modo da ottenere sempre la stessa corrente fotoelettrica i_0 , alla piccola velocità di 3 giri/sec. Si determina

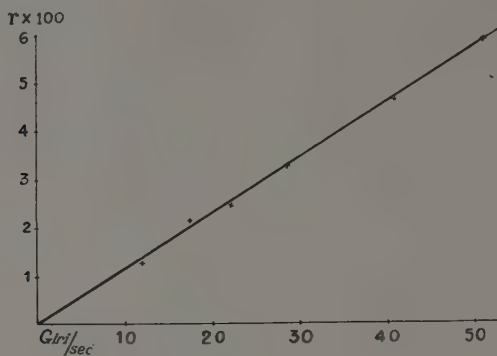


Fig. 3.

così il valore di r , per ciascuna velocità, man mano crescente. Le osservazioni così eseguite, danno il diagramma della fig. 4. Da esso si rileva:

Per potenziali, E , di griglia, positivi, r è positivo, sinché $E > 1$ volt, circa. Diminuendo E , r diminuisce rapidamente, assumendo valori nega-

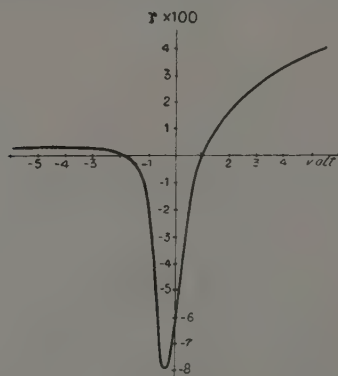


Fig. 4.

tivi. Per $E = 0$, si ha $r = -0,06$, conformemente a quanto risulta dalla fig. 3. Per $E < 0$, r seguita alquanto a crescere in valore assoluto, portandosi ad un massimo di circa $-0,08$, per poi diminuire rapidamente, avvicinandosi e raggiungendo di nuovo lo zero intorno ad $E = -2$ volt.

Per E anche fortemente negativo, si ha di nuovo un accenno a valori positivi di r .

Il complesso andamento di questo diagramma è naturalmente peculiare delle cellule con cui si è sperimentato. Per qualche altra cellula di mia costruzione (sebbene imperfetta nel suo funzionamento), fornita di griglia con estensione molto ridotta, ho potuto osservare talvolta valori di r , prossimi a 0,20. La speciale conformazione delle cellule usate può dunque portare a cambiamenti o trasformazioni, anche molto importanti dei diagrammi osservabili.

Comunque, l'esame del diagramma particolare della fig. 4, può permetterci di formulare qualche ipotesi, sulle ragioni della sua struttura. Ritengo, che per valori di E nulli, i fotoelettroni debbano vagare statisticamente tra placca e griglia. Se la cellula è in quiete, un certo numero di essi va a fissarsi sui fili della griglia, sospinto anche dalla accidentale piccola d. d. p. di contatto fra griglia e placca. Al ruotare delle cellule, questo equilibrio dinamico verrebbe turbato, e la corrente fotoelettrica diminuisce, perchè qualche elettrone, che sarebbe andato sui fili, traversa per forza centrifuga il vuoto delle maglie. Il fatto si accentua per un certo valore negativo di griglia (0,4 volt), al quale dovrebbe corrispondere l'annullamento di quella f. e. m. di contatto.

Il processo indicato muta, se si intercala una diversa e maggiore f. e. m. Nel caso in cui la griglia è abbastanza positiva, può darsi che elettroni, trovandosi fuori del massimo campo elettrico, e cioè che vanno di solito a colpire le rimanenti pareti di vetro, possano essere deviati e raggiungere la griglia. Rimane così spiegato l'accrescimento di corrente fotoelettrica osservato. Resta da esaminare il caso in cui la griglia è negativa, per il quale si può avere di nuovo $r > 0$. Sebbene si tratti di un fatto di entità assai ridotta, esso appare a prima vista inspiegabile; giacchè, se mai, gli elettroni che vanno dalla griglia alla placca, verrebbero ad essere ritardati e non accelerati dalla forza centrifuga. Forse, la spiegazione del lieve accrescimento di corrente fotoelettrica, va cercata, ammettendo che la luce provochi il distacco dalla placca, sia pure in misura assai ridotta, di ioni positivi o di particelle metalliche (che per azione fotoelettrica si caricano positivamente). Tali corpuscoli verrebbero facilmente accelerati dalla forza centrifuga, restando così spiegato il lieve aumento di azione fotoelettrica, indicato dal diagramma della fig. 4.

* * *

Il quadro complesso di fatti esposti, al quale sono ora pervenuto, modificando e perfezionando i dispositivi usati, ed eliminando cause perturbatrici svariate, potrà ancor più venir chiarito in seguito, quando cioè si potesse disporre di una maggior varietà di cellule fotoelettriche apposi-

tamente costruite. Ciò è stato, ed è, particolarmente difficile, nel momento attuale.

Termino facendo notare che, forse, si potranno ricavare ulteriori dati sugli effetti di centrifugazione esercitantesi su di un'atmosfera elettronica, estendendo le ricerche esposte, al caso di filamenti incandescenti nel vuoto, realizzando così delle esperienze di *centrifugazione termoionica*. Come avevo detto in una Nota precedente, una ricerca del genere era già da me stata tentata, prima ancora di accoppiare all'azione centrifuga, i fenomeni fotoelettrici. Ma ora, visti anche i risultati ottenuti in questo campo e di cui ho fatto parola, conto di riprenderla, forse con miglior successo.

Fisica (Fisica matematica). — *Sulle deformazioni elastiche dovute ad una coppia di braccio nullo.* Nota ⁽¹⁾ di G. GRIOLI, presentata da ANTONIO SIGNORINI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

In questa Nota mi propongo di mettere in evidenza che l'applicazione delle proprietà di media dello stress si presta a risultati particolarmente espressivi nel caso di un solido elastico omogeneo e isotropo S sollecitato solo da una coppia di braccio nullo, \mathfrak{F} .

Siano: l la distanza tra i punti di applicazione K' e K'' delle due forze di \mathfrak{F} ; M il punto medio del segmento $K'K''$; Δl il valore algebrico dell'allungamento della fibra $K'K''$ per effetto di \mathfrak{F} ; f l'intensità della coppia presa con segno $+$ o $-$ secondo che le due forze hanno il carattere di trazioni o di pressioni; E il modulo di YOUNG.

Assumiamo come terna di riferimento la terna centrale $Gx_1x_2x_3$ del volume \mathcal{C} corrispondente alla configurazione attuale di S e indichiamo con x'_r, x''_r e y'_r ($r=1, 2, 3$) le coordinate di K', K'' e M .

Poniamo infine

$$[1] \quad \rho_i^2 = \frac{1}{\mathcal{C}} \int_{\mathcal{C}} x_i^2 d\mathcal{C}$$

e

$$[2] \quad \psi^2 = \sum_i^3 \frac{y_i^2}{\rho_i^2}, \quad \mathcal{A} = \frac{\mathcal{C}}{l}.$$

Combinando una delle proprietà di media dello stress col teorema di CLAPEYRON, indipendentemente da una qualunque restrizione per la forma di \mathcal{C} [ved. n. 3] si trova

$$[I] \quad |\Delta l| > \frac{|f|l}{E\mathcal{A}} (1 + \psi^2).$$

Si noti che il secondo membro della disuguaglianza *neppure dipende dalla direzione di $K'K''$* : dipende invece da M [pel tramite di ψ^2] e *cae-*

(¹) Pervenuta all'Accademia il 25 luglio 1941-XIX.

teris paribus è minimo per $M \equiv G$ [condizione necessaria e sufficiente per l'annullarsi di ψ^2]. In riguardo al secondo membro della [I] converrà anche rilevare che il fattore $\frac{|f|l}{E\mathfrak{C}}$ coincide con la grandezza dell'allungamento in un cilindro di lunghezza l e sezione \mathfrak{C} [dello stesso materiale di S] soggetto a trazione o pressione semplice di intensità totale $|f|$. In particolare supponiamo che \mathfrak{C} sia un cilindro retto e che K' , K'' siano simmetrici rispetto alla sua sezione normale mediana. Allora, pur di intendere che l'asse x_1 abbia la direzione delle generatrici, la [I] si riduce a

$$[I'] \quad |\Delta l| > \frac{|f|l}{E\mathfrak{C}} \left(1 + \frac{y_2^2}{\rho_2^2} + \frac{y_3^2}{\rho_3^2} \right),$$

mentre ρ_1, ρ_2 (cfr. [1]) si riducono ai raggi centrali di inerzia della sezione del cilindro. È subito visto che il secondo membro della [I] coincide in grandezza con l'allungamento fornito per la fibra $K'K''$ dalla teoria della pressoflessione di DE SAINT-VENANT. Sempre indipendentemente da una qualunque restrizione per la forma di \mathfrak{C} , la stessa proprietà di media che porta alla [I] permette [ved. nn. 4 e 5] di stabilire limitazioni altrettanto semplici per il massimo valore assoluto del coefficiente di dilatazione lineare (corrispondente ad una direzione generica), del coefficiente di dilatazione cubica e degli scorrimenti.

2. - FORMOLE PRELIMINARI.

Siano $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ i coseni di direzione del vettore $K'K''$ rispetto alla $Gx_1x_2x_3$ e $X_r = X_{rr}$ ($r = 1, 2, 3$), $X_4 = X_{23}$, $X_5 = X_{31}$, $X_6 = X_{12}$ i valori delle caratteristiche dello stress in corrispondenza al punto generico P di \mathfrak{C} . Nelle condizioni da noi supposte — cioè, intendendo che la sollecitazione totale si identifichi con la sola coppia \mathfrak{F} — le coordinate astatiche e iperastatiche ⁽¹⁾ della sollecitazione totale rispettivamente restano espresse da

$$\begin{cases} -\mathfrak{C} a_{rst} = (x''_s - x'_s) f \varphi_r \\ -\mathfrak{C} b_{rst} = (x''_r x'_s - x'_r x''_s) f \varphi_t \end{cases} \quad (r, s, t = 1, 2, 3).$$

Poniamo anche

$$\mathfrak{C}_{rst} = \frac{1}{2} (b_{str} + b_{rts} - b_{rst}) \quad (r, s, t = 1, 2, 3)$$

⁽¹⁾ A. SIGNORINI, *Sollecitazioni iperastatiche*. « Rend. del R. Istituto Lombardo » (2), LXV, 1932.

nonchè

$$\begin{cases} a_r = a_{rr} & , & a_4 = a_{23} & , & a_5 = a_{34} & , & a_6 = a_{12} \\ c_{rt} = c_{rrt} & , & c_{4t} = c_{23t} & , & c_{5t} = c_{34t} & , & c_{6t} = c_{12t} \end{cases} \quad (r, t = 1, 2, 3).$$

Basta allora che la forma quadratica a coefficienti costanti

$$Q(\xi_1 \xi_2 \dots \xi_6) = \sum_{r,s}^6 m_{rs} \xi_r \xi_s$$

sia definita positiva o almeno semidefinita positiva perchè debba risultare ⁽¹⁾

$$[3] \quad \int_{\mathcal{C}} Q(X_1 X_2 \dots X_6) d\mathcal{C} \cong \mathcal{C} \left\{ \sum_{r,s}^6 m_{rs} \right\} a_r a_s + \sum_{t=1}^3 \frac{c_{rt} c_{st}}{\rho_t^2} \left\{ \right\}.$$

D'altra parte evidentemente è

$$x_r'' = y_r + \frac{l}{2} \varphi_r \quad , \quad x_r' = y_r - \frac{l}{2} \varphi_r \quad (r = 1, 2, 3)$$

in modo che, insieme a

$$[4] \quad -\mathcal{C} a_r = fl \varphi_r^2 \quad , \quad -\mathcal{C} a_{r+3} = fl \varphi_{r+1} \varphi_{r+2} \quad (r = 1, 2, 3)$$

si ha

$$-\mathcal{C} b_{rst} = fl (y_r \varphi_s + y_s \varphi_r) \varphi_t \quad (r, s, t, 1, 2, 3).$$

Di qui semplicemente risulta

$$-\mathcal{C} c_{rst} = fl \varphi_r \varphi_s y_t$$

cioè

$$c_{rt} = a_r y_t \quad (r = 1, 2, \dots, 6; t = 1, 2, 3)$$

Basta questo perchè la [3] si riduca [cfr. [1]] a

$$[5] \quad \int_{\mathcal{C}} Q(X_1, \dots, X_6) d\mathcal{C} \cong \mathcal{C} (1 + \psi^2) Q(a_1 a_2 \dots a_6).$$

In particolare, ove sia

$$Q(\xi_1 \xi_2 \dots \xi_6) = [\Sigma (\xi_1 \xi_2 \dots \xi_6)]^2$$

⁽¹⁾ A. SIGNORINI. *Sopra alcune questioni di statica dei sistemi continui.* « Annali della R. S. N. S. di Pisa », 1933, n. 4.

con $\mathcal{Q}(\xi_1 \xi_2 \dots \xi_6)$ forma lineare (a coefficienti costanti) nelle ξ , accennando con $|\mathcal{Q}(X)|_{\max}$ il massimo di $|\mathcal{Q}(X)|$ in \mathcal{C} dovrà essere ⁽¹⁾

$$[6] \quad |\mathcal{Q}(X_1 X_2 \dots X_6)|_{\max} \geq \sqrt{1 + \psi^2} |\mathcal{Q}(a_1 a_2 \dots a_6)|$$

3. - ALLUNGAMENTO DELLA FIBRA DIRETTAMENTE SOLLECITATA.

Indicando con ν il rapporto di POISSON e intendendo

$$I_1(\xi) = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \quad I_2(\xi) = \xi_1 \xi_2 + \xi_1 \xi_3 + \xi_2 \xi_3 - \sum_1^3 \xi_r \xi_{r+3}$$

assumiamo

$$\mathcal{Q}(\xi_1 \xi_2 \dots \xi_6) = \frac{1}{E} \left\{ I_1^2(\xi) - 2(1 + \nu) I_2(\xi) \right\}.$$

Con questo il primo membro della [5] si riduce al doppio dell'energia potenziale elastica di S , cioè - pel teorema di CLAPEYRON - assume il valore $f\Delta l$: onde la [5] dà luogo ⁽²⁾ a

$$[7] \quad f\Delta l > \mathcal{C} (1 + \psi^2) \frac{1}{E} \left\{ I_1^2(a) - 2(1 + \nu) I_2(a) \right\}.$$

Basta allora osservare che, stante le [4], è

$$I_1(a) = -\frac{fl}{\mathcal{C}} \quad , \quad I_2(a) = 0$$

per riconoscere l'esatta coincidenza di [7] con [I].

4. - COEFFICIENTE DI DILATAZIONE LINEARE E COEFFICIENTE DI DILATAZIONE CUBICA.

In corrispondenza a P , sia δ il coefficiente di dilatazione lineare nella direzione del vettore unitario $u \equiv (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)$. Detto θ l'angolo formato da u con $K'K''$, applicando convenientemente la [6] riesce facile stabilire che il massimo di $|\delta|$ (al variare di P in \mathcal{C} , fermo restando u) soddisfa alla limitazione

$$[8] \quad |\delta|_{\max} > \frac{|f|}{E\mathcal{C}} \sqrt{1 + \psi^2} |1 - (1 + \nu) \sin^2 \theta|$$

⁽¹⁾ Ad es. la [5] implica $|X_r|_{\max} \geq \sqrt{1 + \psi^2} |a_r|$.

⁽²⁾ Nelle condizioni attuali è subito visto che il segno = va escluso.

la quale evidentemente implica

$$[8'] \quad |\delta|_{\max} > \frac{|f|}{E\mathcal{C}} \sqrt{1 + \psi^2} = \Delta$$

per $\theta = 0$ e invece

$$[8''] \quad |\delta|_{\max} > |\nu| \frac{|f|}{E\mathcal{C}} \sqrt{1 + \psi^2} = |\nu| \Delta$$

$$\text{per } \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Invero, adottando per le caratteristiche di deformazione le notazioni classiche ε_r, γ_r ($r = 1, 2, 3$) è

$$[9] \quad \delta = \sum_r^3 \{ \varepsilon_r \alpha_r^2 + \gamma_r \alpha_{r+1} \alpha_{r+2} \},$$

insieme a

$$[10] \quad \varepsilon_r = \frac{1}{E} \{ \nu I_1(X) - (1 + \nu) X_r \}, \quad \gamma_r = - \frac{2(1 + \nu)}{E} X_{r+3} \quad (r = 1, 2, 3).$$

Applichiamo la [6] assumendo per la \mathcal{L} la forma lineare che viene a dare l'espressione di δ mediante le X ciò che riduce il primo membro della [6] a $|\delta|_{\max}$. Vuol dire che la $\mathcal{L}(a_1 a_2 \dots a_6)$ deve ricavarsi (cfr. ancora [4]) ponendo nella [9]

$$[10'] \quad \varepsilon_r = \frac{fl}{E\mathcal{C}} \{ (1 + \nu) \varphi_r^2 - \nu \}, \quad \gamma_r = 2(1 + \nu) \frac{fl}{E\mathcal{C}} \varphi_{r+1} \varphi_{r+2} \quad (r = 1, 2, 3)$$

ciò che dà

$$\mathcal{L}(a) = \frac{fl}{E\mathcal{C}} \left\{ -\nu + (1 + \nu) \left[\sum_r^3 \alpha_r \varphi_r \right]^2 \right\} = \frac{fl}{E\mathcal{C}} \{ -\nu + (1 + \nu) \cos^2 \theta \}$$

e quindi ⁽¹⁾ riduce la [6] a [8].

In modo del tutto analogo si ricava dalla [6] che il coefficiente di dilatazione cubica $\delta_o = \sum_r^3 \varepsilon_r$ soddisfa alla limitazione

$$[11] \quad |\delta_o|_{\max} > \frac{|f|}{E\mathcal{C}} \sqrt{1 + \psi^2} (1 - 2\nu).$$

5. - MUTUO SCORRIMENTO DI DUE DIREZIONI ORTOGONALI.

Mi limito per brevità al caso di ortogonalità, quantunque la trattazione del caso più generale non presenti affatto maggiore difficoltà.

In corrispondenza a P sia τ il mutuo scorrimento delle direzioni dei due vettori $u \equiv (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)$, $u' \equiv (\alpha'_1 \alpha'_2 \alpha'_3)$ unitari e mutuamente ortogonali.

⁽¹⁾ Cfr. la nota precedente.

Chiamando θ e θ' gli angoli formati da u ed u' con $K'K''$, l'applicazione della [6] dà luogo, come subito si vedrà, alla disuguaglianza

$$[12] \quad |\tau|_{\max} > 2(1+\nu) \sqrt{1+\psi^2} \frac{|f|}{E\mathcal{C}} |\cos \theta \cos \theta'|$$

la quale implica ⁽¹⁾, per ogni scelta di $K'K''$ u e u' (cfr. [8'] e [8'']),

$$[12'] \quad |\tau|_{\max} > (1+\nu) \frac{|f|}{E\mathcal{C}} \sqrt{1+\psi^2} = (1+\nu) \Delta.$$

Partendo dalla nota uguaglianza

$$\tau = \sum_r^3 \{ 2\varepsilon_r \alpha_r \alpha'_r + \gamma_r (\alpha_{r+1} \alpha'_{r+2} + \alpha_{r+2} \alpha'_{r+1}) \}$$

applichiamo la [6] assumendo per la ε la forma lineare che (in base alle [10]) viene a dare l'espressione di τ mediante le X (e quindi riduce il primo membro della [6] a $|\tau|_{\max}$). Corrispondentemente cfr. [10'] risulterà

$$\mathcal{L}(a) = \frac{fl}{E\mathcal{C}} \sum_1^3 \{ 2\alpha_r \alpha'_r + [(1+\nu)\varphi_r^2 - \nu] + 2(1+\nu)(\alpha_{r+1} \alpha'_{r+2} + \alpha_{r+2} \alpha'_{r+1}) \}.$$

Stante la supposta ortogonalità di u e u' , si ha pure

$$\mathcal{L}(a) = 2(1+\nu) \frac{fl}{E\mathcal{C}} \sum_1^3 \{ \alpha_r \varphi_r \cdot \alpha'_r \varphi_r - \alpha_r \varphi_r \cdot \alpha'_{r-1} \varphi_{r+1} + \alpha_r \varphi_r \cdot \alpha'_{r+2} \varphi_{r+2} \}$$

onde basta osservare che il secondo membro non differisce da

$$2(1+\nu) \frac{fl}{E\mathcal{C}} \sum_1^3 \alpha_r \varphi_r \cdot \sum_1^3 \alpha'_r \varphi_r = 2(1+\nu) \frac{fl}{E\mathcal{C}} \cos \theta \cos \theta'$$

perchè l'attuale applicazione della [6] dia senz'altro luogo ⁽²⁾ alla [12].

⁽¹⁾ Invero, chiamando θ'' l'angolo formato da $K'K''$ con la normale alla giacitura individuata dai due vettori ortogonali u , u' , dall'essere $\cos^2 \theta - \cos^2 \theta' = 1 - \cos^2 \theta''$ si ricava subito che in corrispondenza a un determinato valore di θ'' il prodotto $\cos^2 \theta \cos^2 \theta'$ diviene massimo ed uguale a $\left(\frac{1 - \cos^2 \theta''}{2} \right)^2$ per $\cos^2 \theta = \cos^2 \theta'$, ecc.

⁽²⁾ Cfr. La nota ⁽²⁾ a pag. 96.

Chimica. (Chimica biologica). — *Sulle relazioni che intercorrono tra attivabilità da Mg^{++} della fosfatasi alcalina e concentrazione dell'enzima e del substrato* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di FRANCESCO CEDRANGOLO, presentata da GAETANO QUAGLIARIELLO, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

In una precedente Nota ⁽³⁾ venni alla conclusione che l'attivabilità da Mg^{++} della fosfatasi alcalina è in ragione inversa del rapporto n/N , dove n è il numero di molecole di substrato, che sono impegnate nella formazione dei complessi enzima-substrato e N è il numero totale di molecole del substrato. In questo Laboratorio A. Rossi ⁽⁴⁾ ha confermato che lo stesso vale per l'attivazione della desmoarginasi del fegato per opera del complesso SH- Fe^{++} .

Alla relazione trovata è data qui una spiegazione, basata sulle leggi della cinetica enzimatica. Dati sperimentali sono riportati in appoggio.

Per la tecnica, da me elaborata, di separazione dell'enzima alcalino dalla miscela dei due isodinami come per ogni particolare di ricerca, rimando ai precedenti miei lavori ^(5, 6, 7, 8).

Le quattro curve della figura 1 spiegano la relazione che intercorre tra attivabilità e concentrazione del substrato. Si vede che mentre per cc. 0,2 di enzima, la concentrazione del substrato per cui l'enzima risulta saturo corrisponde a 36×10^{-5} g. Mol ($\log = -3,44$), tale concentrazione è invece $= 84 \times 10^{-5}$ ($\log = -3,07$) e 180×10^{-5} ($\log = -2,74$)

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica biologica della Regia Università di Napoli.

⁽²⁾ Pervenuta all'Accademia il 16 luglio 1941-XIX.

⁽³⁾ F. CEDRANGOLO, « Arch. Sc. Biol. », 1938, 24, 59.

⁽⁴⁾ A. ROSSI e A. RUFFO, « Arch. Sc. Biol. », 1940, 26, 265.

⁽⁵⁾ F. CEDRANGOLO, « Boll. Soc. It. Biol. Sperim. », 1935, 10, 374; « Arch. Sc. Biol. », 1935, 21, 337; « Arch. Italiennes de Biol. », 1935, 96, 146.

⁽⁶⁾ ID., « Boll. Soc. It. Biol. Sperim. », 1935, 11, 140; « Arch. Sc. Biol. », 1936, 22, 123.

⁽⁷⁾ ID., « Arch. Sc. Biol. », 1937, 4, 73.

⁽⁸⁾ ID., « Boll. Soc. It. Biol. Sperim. », 1939, 14, 22; *Enzymol.* 1939, 6, 72.

rispettivamente per quantità di enzima pari a cc. 0,6 e cc. 1,2; cioè a misura che aumenta la concentrazione dell'enzima, aumenta pure la concentrazione del substrato, capace di saturare l'enzima. L'aggiunta di Mg^{++} a una data quantità di enzima, ai fini della cinetica, si rivela come aggiunta di altro enzima, per cui la concentrazione del substrato per la quale la velocità di reazione è massima, è più grande in presenza che in assenza dei Mg^{++} . Consideriamo infatti le grafiche I e II nel tratto compreso tra le concentrazioni 36×10^{-5} e 72×10^{-5} ($\log = -3,14$) del substrato, che corrispondono alla concentrazione di saturazione per

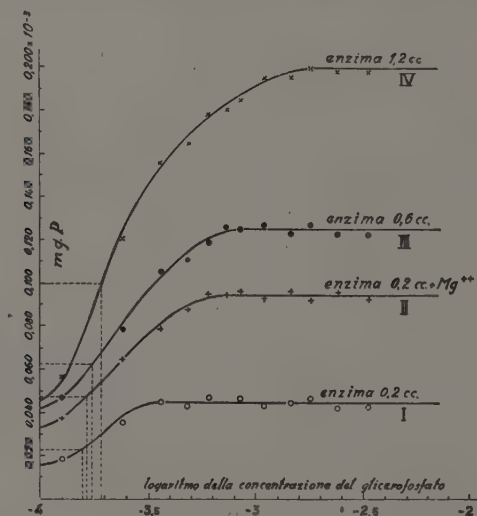


Fig. 1. — Ascisse: logaritmo della concentrazione del substrato. Ordinate: mg P scisso in 30' per cc. 25 della miscela. Grafica II: Mg 0,001 Mol.

cc. 0,2 di enzima rispettivamente senza e con aggiunta di Mg . In questo intervallo la grafica I corre parallela alle ascisse, mentre la II sale sino ad un massimo, che corrisponde all'ascissa 72×10^{-5} . Risulta quindi che l'attivabilità da Mg^{++} in tale intervallo aumenta coll'aumentare della concentrazione del substrato. Infatti essa è del 78,8 % a concentrazione 36×10^{-5} del substrato, del 100 % a concentrazione 48×10^{-5} , del 110 % a concentrazione 60×10^{-5} e infine del 111 % a concentrazione 72×10^{-5} .

Riferendoci al rapporto $\frac{n}{N}$, è chiaro ora come per una data quantità di enzima, esista una certa zona di concentrazione del substrato, in cui l'attivabilità a parità di n , aumenta parallelamente all'aumentare di N .

Da ciascuna delle quattro curve è possibile calcolare il valore numerico della costante di MICHAELIS e MENTEN (K_m) ⁽¹⁾. Questa infatti risulta $= 155 \times 10^{-6}$ da I; 163×10^{-6} da II; 175×10^{-6} da III; 189×10^{-6} da IV; cioè in media 171×10^{-6} ($\log = -3,76$). Il suo reciproco (costante di affinità) è quindi: 5848. K. V. GIRI e N. C. DATTA ⁽²⁾ calcolano invece per lo stesso complesso enzima-sostanza il valore di K_m . pari a $0,0121 \left(\frac{1}{K_m} = 83 \right)$. Poichè GIRI e DATTA hanno usato comuni estratti enzimatici nei quali sono presenti entrambi gli enzimi isodinami, si deve concludere che l'affinità dell'enzima alcalino aumenta con l'aumentare della purezza dei preparati, o, in altre parole, che nei preparati grezzi sono presenti sostanze (forse lo stesso enzima acido) che ne abbassano l'affinità.

Le curve I e II della figura 2 mostrano l'andamento della scissione del substrato in funzione della concentrazione dell'enzima e si riferiscono

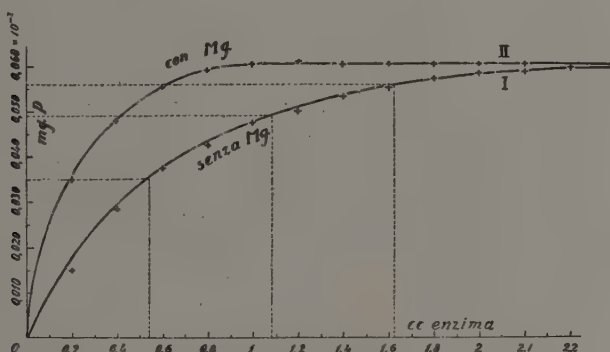


Fig. 2. - Ascisse: cc. enzima. Ordinate: mg P scisso in 30' per cc. 25 della miscela. Substrato 24×10^{-5} Mol. Grafica II: Mg 0,001 Mol.

rispettivamente a esperimenti senza e con aggiunta di Mg^{++} ⁽³⁾. La velocità di reazione per cc. 0,2 di enzima in assenza di Mg^{++} è espressa da mg. 0,015

⁽¹⁾ L. MICHAELIS e M. L. MENTEN, « Bioch. Zeit. », 1913, 49, 333.

⁽²⁾ K. V. GIRI e N. C. DATTA, « Bioch. J. », 1936, 30, 1089.

⁽³⁾ Le curve I e II hanno un andamento caratteristico, che può essere rappresentato dalla seguente relazione:

$$y = C(1 - e^{-kx}).$$

La costante C evidentemente è la stessa per tutte e due le curve, che si differenziano invece per un diverso valore della costante k . Dai nostri dati risulta $C = 6,1 \times 10^{-5}$; per I $k = 0,285$ e per II $k = 0,405$.

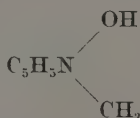
di P scisso, in presenza di Mg^{++} da mg. 0,035: l'attivazione è del 133 %. Abbassando dalla curva I in corrispondenza dell'ordinata 0,035 la verticale sulla ascissa, questa è tagliata a 0,54; cioè l'aggiunta di Mg^{++} ai 0,2 cc. di enzima ha aumentato del $\frac{0,54-0,2}{0,2} \times 100 = 170$ % la concentrazione dell'enzima. L'aggiunta di Mg^{++} a cc. 0,4 di enzima dovrebbe elevare la scissione al valore di quella che è determinata da cc. 1,08 di enzima $\left(-0,4 + \frac{170 \times 0,4}{100}\right)$, cioè a mg. 0,049 di P. Praticamente essa è di mg. 0,0475 di P e l'attivazione è del 76,6 %. Così ancora l'aggiunta di Mg^{++} a cc. 0,6 di enzima deve avere per effetto una scissione pari a quella operata da cc. 1,62 di enzima $\left(= 0,6 + \frac{170 \times 0,6}{100}\right)$ cioè a mg. 0,056 di P. Appunto la scissione è di mg. 0,055 di P: l'attivazione del 46,6 %. A partire da cc. 1,6-1,7 di enzima la velocità di reazione può praticamente considerarsi costante (substrato saturo di enzima). Quindi tale velocità in presenza di Mg^{++} è prevedibile che risulti costante a partire da cc. 0,6-0,7 di enzima. Infatti per la curva II non si è mai avuto un valore dell'ordinata maggiore di 0,060. Ne consegue che l'attivazione continui a decrescere in tutto il tratto che è compreso tra i valori 0,7-1,7 dell'ascissa. Per cc. 0,8 ; 1 ; 1,2 ; 1,4 ; 1,6 ; 1,8 ; 2 ; 2,2 l'attivazione infatti è rispettivamente del 37,2 % ; 27,3 % ; 22,2 % ; 15 % ; 10,9 % ; 7 % ; 5,1 % ; 3,4 %.

Riferendoci al rapporto $\frac{n}{N}$ è chiaro quindi come per una data quantità di substrato (N costante), l'attivabilità diminuisca parallelamente all'aumentare di n .

Chimica (Chimica biologica). — *Azione dell'istozima sull'acido nicotinurico* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di FRANCO LANFRANCHI, presentata da SABATO VISCO, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Da quando è stata scoperta l'azione antipellagrosa dell'acido nicotinic (acido β -piridincarbonico) ha acquistato un maggiore interesse il metabolismo di questo composto nell'organismo animale. Il primo che ha fatto ricerche sull'argomento è stato ACKERMANN ⁽³⁾, che riuscì ad isolare dalle urine di un cane, al quale era stato somministrato giornalmente per un certo periodo di tempo acido nicotinic, acido nicotinurico o β -piridinurico (dall'A. identificato come acido β -piridoil-aminoacetico) e trigonellina, che, come è noto, è una metilbetaina dell'acido nicotinic. Nel cane quindi parte dell'acido nicotinic si condensa con la glicocola, parte subisce un fenomeno di metilazione (all'azoto) con successiva formazione del legame betainico.

Già precedentemente HIS ⁽⁴⁾ aveva riconosciuto nel cane questa capacità di metilazione rispetto il nucleo piridinico. L'A. infatti trovò che la piridina, introdotta come sale dell'acido acetico nello stomaco del cane, si ritrova nell'urina come idrossido di metilpiridilammonio:



Il fenomeno è analogo quindi a quello osservato per l'acido nicotinic; mancando però il carbossile naturalmente non si ha la formazione del legame betainico.

D'altra parte la proprietà di condensarsi nell'organismo animale con la glicocola non è caratteristica solamente dell'acido nicotinic poichè anche l'acido picolinico o acido α -piridincarbonico, suo isomero, si condensa con detto aminoacido — come già COHN ⁽⁵⁾ precedentemente ad ACKERMANN aveva dimostrato — ad acido α -piridinurico o acido α -piri-

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia generale di Roma.

⁽²⁾ Pervenuta all'Accademia il 25 luglio 1941-XIX.

⁽³⁾ D. ACKERMANN, « Zeit. f. Biologie », 59, 17 (1912).

⁽⁴⁾ W. HIS, « Archiv f. exper. Pathol. u. Pharm. », 22, 253 (1887).

⁽⁵⁾ R. COHN, « Zeit. f. Phys. Chem. », 78, 112 (1893).

doil-aminoacetico. L'A. infatti isolò detto acido dalle urine dei conigli, ai quali era stato iniettato per via sottocutanea α -picolina (α -metilpiridina), che evidentemente viene in un primo tempo ossidata ad acido picolinico.

Dopo ACKERMANN YUTAKA KOMORI e YUZO SENDJU⁽⁶⁾ investigarono nuovamente sulla trasformazione dell'acido nicotinico nell'organismo animale (mammiferi e uccelli). Trovarono, come ACKERMANN, nelle urine del cane acido nicotinurico e trigonellina; mentre in quelle dei conigli riscontrarono solo acido nicotinurico (in più piccole quantità che nel cane) e non trigonellina. Nei piccioni e nei polli poi, secondo gli AA., l'acido nicotinico non subirebbe alcuna trasformazione. Questo ultimo risultato è alquanto strano se si considera che YUZO SENDJU⁽⁷⁾ trovò successivamente che l'acido picolinico viene trasformato nell'organismo degli uccelli ad acido α -piridoil-orniturico.

Ci è parso abbastanza interessante ricercare in base a quali meccanismi enzimatici si formino l'acido nicotinurico e la trigonellina nell'organismo animale. In questa nostra Nota ci occupiamo solo della questione dell'acido nicotinurico rimandando a più tardi quella della trigonellina, la sintesi della quale, da quanto è detto precedentemente, risulta fino ad oggi essere prerogativa del cane^(*).

Presa conoscenza della letteratura sull'istozima, abbiamo concluso che molto verosimilmente era l'istozima, che, nell'organismo animale, sintetizzava l'acido nicotinurico.

Infatti da quando SCHMIEDEBERG⁽⁸⁾ nel 1881 scoprì nel rene di maiale e nel fegato di cane un'aminoacilasi, da lui denominata istozima, che scinde l'acido ippurico in acido benzoico e glicocollo, numerosi altri ricercatori hanno dimostrato sia la sua grande diffusione nell'organismo animale⁽⁹⁾ sia la sua piccola specificità. L'istozima infatti non solo scinde l'acido ippurico; ma bensì secondo Mutch⁽¹⁰⁾ e SMORODINZEW⁽⁹⁾ i benzoil-derivati di altri aminoacidi, secondo BONDI e collaboratori⁽¹¹⁾ anche acil-

(6) YUTAKA KOMORI e YUZO SENDJU, « J. Biochem. », 6, 163 (1926).

(7) YUZO SENDJU, « J. Biochem. », 7, 273 (1927).

(*) Nota aggiunta. - Da recenti lavori, dei quali siamo venuti a conoscenza solo dopo che il lavoro era stato stampato, risulta che anche l'uomo, al quale è stato somministrato acido nicotinico, elimina nell'urina parte di detto acido sotto forma di trigonellina (D. MELNICK, W. D. ROBINSON, H. FIELD JR., « J. Biol. Chem. », 136, 131 (1940) e 136, 145 (1940); W. A. PERLZWEIG, E. D. LEVY, H. P. SARETT « J. Biol.-Chem. », 136, 729 (1940)).

(8) O. SCHMIEDEBERG, « Arch. f. exper. Pathol. », 14, 382 (1881).

(9) Per la letteratura sull'argomento vedi il lavoro di I. A. SMORODINZEW, « Zeit. f. Physiol. Chem. », 124, 123 (1922).

(10) N. MUTCH, « J. Physiol. », 44, 176 (1912).

(11) BONDI e FRANKI, « Biochem. Z. », 17, 555 (1909) e BONDI e EISSLER, Ibid. 23, 511 (1910).

derivati degli aminoacidi con acili della serie alifatica e secondo SMORDINZEW⁽⁹⁾, GRASSMANN e BASU⁽¹²⁾ e MAZZA e STOLFI⁽¹³⁾ gli acidi taurocolico e glicocolico. Altri numerosi derivati acilici degli aminoacidi sono scindibili dall'istozima, come risulta dagli interessanti lavori di MAZZA e PANNAIN⁽¹⁴⁾, HIROSHIGE AKIZUKI⁽¹⁵⁾ e KOTARO NAWA⁽¹⁶⁾ volti a chiarire il meccanismo di azione e la specificità dell'istozima.

D'altra parte è dimostrata per l'acido ippurico l'azione reversibile dell'istozima, cioè la capacità a sintetizzare detto acido oltre che a scinderlo. Infatti anche *in vitro* la sintesi, che con estratti enzimatici solamente - a partire da acido benzoico e glicocollo - fallisce (è dimostrabile termodinamicamente che non può avvenire), riesce qualora si accoppi un sistema capace di fornire sufficiente energia libera alla reazione di sintesi⁽¹⁷⁾. Così è molto verosimile che anche gli altri composti, che dall'istozima vengono scissi, dallo stesso enzima, in presenza o assenza di un tale sistema fornitore di energia, vengano sintetizzati a partire dai prodotti che si formano nell'idrolisi.

Da quanto precede risultava verosimile, come già abbiamo detto, che l'istozima scindesse anche l'acido nicotinurico (non sono stati, per quanto ci consta, idrolizzati con l'istozima derivati acilici degli aminoacidi con acili eterociclici), che quindi lo stesso enzima lo sintetizzasse nell'organismo.

Per risolvere la questione postaci abbiamo sottoposto l'acido nicotinurico (detto acido fu da noi preparato sinteticamente) all'azione del sopra detto enzima. L'esperienze di scissione hanno dato risultati positivi. Con un estratto enzimatico, preparato secondo la tecnica del KIMURA da rene di maiale (da diversi AA. è stato riconosciuto uno degli organi più ricchi in istozima), abbiamo eseguito due serie di esperienze comparativamente su soluzioni equimolecolari di acido ippurico e nicotinurico (sotto forma dei loro sali di sodio).

Nella prima serie di esperienze, eseguite con l'estratto conservato per cinque giorni in ghiacciaia dopo la sua preparazione, fu determinata la scissione percentuale ogni 24 ore contemporaneamente per l'acido ippurico e nicotinurico. Dopo sole 48 ore l'equilibrio era raggiunto per entrambi gli acidi. Ad equilibrio raggiunto l'acido ippurico era scisso

⁽⁹⁾ W. GRASSMANN e K. P. BASU, « Zeit. f. Physiol. Chem. », 198, 247 (1931).

⁽¹²⁾ F. P. MAZZA e G. STOLFI, « Arch. Sc. Biol. », 17, 434 (1932).

⁽¹⁴⁾ F. P. MAZZA e L. PANNAIN, « Rendiconti Acc. Lincei », vol. XIX, ser. 6ª, fasc. 2 (1934).

⁽¹⁵⁾ HIROSHIGE AKIZUKI, « J. Biochem. », 25, 43 (1937).

⁽¹⁶⁾ KOTARO NAWA, « J. Biochem. », 28, 237 (1938).

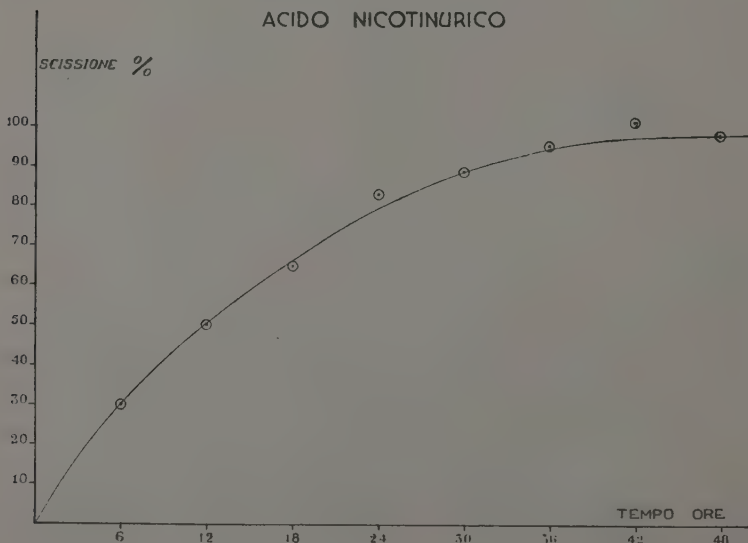
⁽¹⁷⁾ Per la letteratura sull'argomento vedi il lavoro di F. CADRANGOLO e V. BACCARI, « Atti R. Acc. d'Italia », Cl. sc. fis. mat. e nat. vol. II, ser. VII, fasc. 1-2 (1940).

per circa il 99 % (MUTCH⁽¹⁰⁾) con enzima preparato in altro modo indica una scissione del 97 %) e l'acido nicotinurico per circa il 96 % (vedi tabelle I e II).

Nella seconda serie di esperienze, eseguite con l'estratto enzimatico conservato per 20 giorni in ghiacciaia dopo la sua preparazione, fu determinato contemporaneamente per i due acidi la scissione percentuale ogni sei ore in modo da avere un maggior numero di dati, che permettessero di seguire l'andamento della scissione enzimatica. Dalle tabelle I e II si può concludere che l'acido ippurico e nicotinurico vengono scissi con velocità presso a poco eguale. Anche in questa seconda serie di esperienze dopo 48 ore l'equilibrio si poteva dire raggiunto per i due acidi, il che dimostra che l'attività dell'enzima per conservazione in ghiacciaia durante 15 giorni non era minimamente diminuita. Ciò risulta anche da un confronto delle scissioni percentuali dei due acidi nelle due serie di esperienze dopo 24 ore.

Abbiamo anche tracciato con i dati riportati nella tabella II (Estr. II) la curva relativa alla scissione enzimatica dell'acido nicotinurico ponendo in ordinata la scissione percentuale e in ascisse il tempo in ore. La curva presenta il solito andamento delle reazioni d'idrolisi enzimatica e i punti cadono con buona approssimazione su di essa.

Concludendo si può dire che l'acido nicotinurico poichè *in vitro* viene scisso idroliticamente dall'istozima, dallo stesso enzima *in vivo* viene dall'organismo animale sintetizzato.



Ad ogni modo ci ripromettiamo di tentare con l'istozima, a partire da acido nicotinico e glicocola, la sintesi *in vitro* dell'acido nicotinurico.

PARTE SPERIMENTALE.

A) Preparazione dei substrati.

1° *Preparazione dell'acido ippurico.* — La preparazione dell'acido ippurico fu eseguita benzoilando la glicocola in ambiente alcalino secondo le regole della reazione SCHOTTEN-BAUMANN⁽¹⁸⁾. Ricristallizzato due volte dall'acqua fu ottenuto un acido ippurico bianchissimo e purissimo con P. F. = 187°.

2° *Preparazione dell'acido nicotinurico.* — La sintesi dell'acido nicotinurico fu eseguita con il metodo di MEYER e GRAF⁽¹⁹⁾, cioè condensando il cloruro dell'acido nicotinico con l'estere etilico della glicocola in ambiente cloroformico, preparando dal cloridrato dell'estere etilico dell'acido nicotinurico ($\text{HCl} \cdot \text{NC}_5\text{H}_4\text{-CO-NH-CH}_2\text{-COOC}_2\text{H}_5$) così formatosi l'estere etilico dell'acido nicotinurico stesso ($\text{NC}_5\text{H}_4\text{-CO-NH-CH}_2\text{-COOC}_2\text{H}_5$) e da questo per saponificazione a freddo e successiva acidificazione l'acido nicotinurico.

Per preparare il cloruro dell'acido nicotinico (MEYER e GRAF⁽²⁰⁾) furono fatti reagire, in un palloncino munito di refrigerante a ricadere, 30 grammi di nicotinato di sodio, purissimo e perfettamente seccato per riscaldamento nel vuoto (18 ore) a 110° su anidride fosforica, con 150 grammi di cloruro di tionile del commercio, che fu prima ulteriormente purificato. La reazione inizialmente vivace fu terminata per breve riscaldamento su bagno d'olio. La massa oleosa risultante, avente in sospensione cloruro di sodio colloidale, fu sottoposta a distillazione frazionata, su bagno d'olio, prima a pressione ordinaria per eliminare la quasi totalità del cloruro di tionile in eccesso e poi a pressione ridotta (12–20 mm.). Eliminata una prima frazione costituita da cloruro di tionile, distillò infine a 85–90° il cloruro dell'acido nicotinico (25 grammi) del tutto incolore e che presenta un caratteristico non sgradevole odore. Pur essendosi depositato sul fondo del palloncino di raccolta un sottilissimo velo di una sostanza cristallina bianca, evidentemente cloridrato del cloruro, il cloruro dell'acido nicotinico fu considerato sufficientemente puro per il nostro scopo e non fu successivamente purificato per dissoluzione in etere di petrolio anidro, che, mentre scioglie il cloruro, non scioglie il cloridrato del cloruro.

⁽¹⁸⁾ V. GATTERMANN WIELAND, *Die Praxis des Organischen Chemikers*. Walter De Gruyter, 1936, pag. 274.

⁽¹⁹⁾ H. MEYER e R. GRAF, « *Biochem. Zeit.* », 229, 154 (1930).

⁽²⁰⁾ H. MEYER e R. GRAF, « *Ber. der deutsch. chem. Ges.* », 61, 2205 (1928).

L'estere etilico della glicocola fu preparato secondo E. FISCHER ⁽²¹⁾ dal suo cloridrato, preparato a sua volta per esterificazione diretta della glicocola secondo HARRIES e WEISS ⁽²²⁾.

La condensazione dell'estere etilico della glicocola con il cloruro dell'acido nicotinico fu eseguita in cloroformio. Essendo il cloruro oltre-modo idrolizzabile, particolare cura fu posta per l'anidificazione del cloroformio. Fu impiegato cloroformio puro per analisi contenente l'1 % di aleool, del quale fu privato mediante lavaggio ripetuto con acqua. Seccato con carbonato di potassio anidro durante 5-6 ore e poi con anidride fosforica durante una notte, fu infine distillato. Il cloroformio così ottenuto, purissimo e perfettamente anidro, fu subito impiegato prima che si fosse potuto formare fosgene. 12 grammi del cloruro dell'acido nicotinico (1 Mol.) furono sciolti in cme. 60 di cloroformio (in modo che non venisse anche travasato il cloridrato del cloruro) e 8,8 grammi di estere etilico della glicocola (1 Mol.) in cme. 20 dello stesso solvente. Alla soluzione raffreddata con ghiaccio dell'estere etilico della glicocola fu aggiunta lentamente la soluzione del cloruro d'acido. Per la reazione si ha forte riscaldamento e dopo breve tempo, per raffreddamento, comincia a separarsi una sostanza bianchissima microcristallina. Dopo mezz'ora la sostanza fu filtrata, lavata con un po' di cloroformio, e di questo solvente privata nel vuoto. Rendimento grammi 20,5 (rendimento teorico gr. 12 + 8,8 = = gr. 20,8). Una piccola porzione ricristallizzata dall'aleool si presentò cristallizzata in tavole con P. F. = 174 — 176°.

Per preparare ora dal cloridrato dell'estere, l'estere etilico stesso, 15 grammi del cloridrato furono sciolti nella più piccola quantità possibile di acqua e alla sua soluzione fu aggiunta, a piccole porzioni, una soluzione concentrata di carbonato di sodio fino a che non si ebbe più effervescenza. La soluzione leggermente alcalina fu estratta con cloroformio e l'estratto cloroformico, seccato col carbonato di potassio anidro, fu sottoposto a distillazione. Eliminata la quasi totalità del cloroformio, rimase un olio leggermente giallo, che, posto nel vuoto in essiccatore su acido solforico, dopo poche ore si solidificò tutto in una massa cristallina bianca dai lunghi aghi setacei. Rendimento gr. 11 (rendimento teorico gr. 12,7) P. F. = 61-62°.

Per preparare l'acido nicotinurico dal suo estere etilico si operò nel seguente modo: gr. 6,5 dell'estere etilico furono sciolti in 32,5 cme. di idrato di potassio N e la soluzione fu lasciata a sè per 12 ore alla temperatura ambiente; dopo di che si acidificò con 32,5 cme. di acido cloridrico N. Dopo alcuni minuti cristallizzò l'acido nicotinurico in una polvere cristallina bianca. La sostanza ricristallizzata dalla minore quantità possibile

⁽²¹⁾ E. FISCHER, « Ber. der deutsch. chem. Ges. », 34, 436 (1901).

⁽²²⁾ C. HARRIES e M. WEISS, « An. der Chem. », 327, 365.

di acqua si presentò in una massa bianchissima di macrocristallini con P. F. = 237 — 238°. Rendimento gr. 3 (rendimento teorico gr. 5,6).

Furono fatti anche alcuni tentativi sbrigativi di condensazione fra la nicotinamide e il monobromo e monoiodoacetato di etile; ma senza successo.

B) *Tecnica e risultati delle ricerche enzimatiche.*

1° *Preparazione delle soluzioni tampone.* — Come soluzioni tampone furono impiegate una soluzione M/15 di fosfato monopotassico (KH_2PO_4) ed una M/15 di fosfato disodico ($\text{Na}_2\text{HPO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$). I sali impiegati furono riconosciuti corrispondere alle condizioni richieste; fra l'altro furono riconosciuti assolutamente esenti da solfati e cloruri. Le soluzioni furono mescolate nel rapporto di 1 della prima a 4 della seconda in modo che il miscuglio risultante presentasse a 18° un $\text{P}_\text{H} = 7,38$.

2° *Preparazione delle soluzioni di ippurato e nicotinurato di sodio.* — Furono preparate due soluzioni equimolecolari dei sali di sodio dell'acido ippurico (P. M. = 179,08) e nicotinurico (P. M. = 180,08) introducendo in due palloncini tarati da 100 cme. rispettivamente gr. 1,250 e gr. 1,257 di acido ippurico e acido nicotinurico finemente polverizzati, neutralizzandoli con idrato di sodio N/10 e portando a volume con acqua distillata.

3° *Preparazione dell'estratto enzimatico.* — L'estratto enzimatico fu preparato con la tecnica indicata dal KIMURA a partire da un rene di maiale del peso di 84 gr. Questo asportato dall'animale appena aperto dopo la macellazione e conservato sotto ghiaccio fino al momento dell'impiego (2–3 ore dopo la macellazione), privato della capsula e del connettivo e lavato, fu in un mortaio con polvere di quarzo ridotto in densa poltiglia. La poltiglia veniva travasata in una bevuta e addizionata con tre volte il suo peso (250 gr.) di glicerina all'87 %, dopo di che veniva lasciata stare in ghiacciaia per 48 ore. Dopo tale tempo si centrifugava e l'estratto enzimatico veniva conservato in ghiacciaia fino al momento dell'impiego.

4° *Preparazione delle soluzioni deproteinizzanti.* — Per la deproteinizzazione dei campioni d'analisi dopo l'incubazione in termostato e prima delle microdeterminazioni di azoto amminico (vedi protocollo delle esperienze) fu seguito il metodo originario di FOLIN e WU⁽²³⁾. Furon così preparate una soluzione di wolframato di sodio al 20 % e una soluzione di acido solforico 2/3 N. Essendo la soluzione di wolframato notevolmente alcalina, mentre come riconobbe più tardi FOLIN⁽²⁴⁾ non deve essere nè troppo alcalina nè troppo acida perchè altrimenti la precipitazione è incompleta, venne neutralizzata con acido cloridrico. Inoltre nell'aggiunta di acido solforico 2/3 N., fu seguita la tecnica modificata dal FOLIN⁽²⁵⁾

(23) O. FOLIN e H. WU, « J. Biol. Chem. », 38, 81 (1919).

(24) O. FOLIN, « J. Biol. Chem. », 51, 419 (1922).

(25) O. FOLIN, « J. Biol. Chem. », 54, 153 (1922).

in un terzo lavoro, non seguendo la quale si corre il rischio di precipitare con le proteine altre sostanze contenenti azoto non proteico.

5° *Protocollo delle esperienze.* — La scissione idrolitica dell'acido ippurico e nicotinurico veniva seguita mediante determinazioni di azoto amminico con il microapparecchio di VAN SLYKE. Ci si accertò innanzi tutto del buon funzionamento dell'apparecchio e dell'esattezza della nostra tecnica facendo diverse determinazioni preliminari con una soluzione di alanina contenente 3 mgr. dell'aminoacido per cmc. Infatti con 6 mgr. fu trovato che l'alanina contiene il 15,40 % di N; con 4,5 mgr. fu trovato il 15,45 %, 15,84 %; con 3 mgr. il 15,73 %, 15,56 %, 15,40 %; con 1,5 mgr. il 15,58 %, 16,20 %. (Teoria 15,75 %).

Per le ricerche enzimatiche venivano introdotti in termostato, regolato con l'approssimazione di $\frac{1}{2}$ grado a 38,5°, gruppi di cinque campioni così costituiti:

	A) Estr. Enz. cc. 1 + Puffer ($P_H = 7,4$) cc. 3 + H_2O cc. 4.
Acido ippurico	B) Puffer ($P_H = 7,4$) cc. 3 + Ippurato Na cc. 4 + H_2O cc. 1.
	C) Estr. Enz. cc. 1 + Puffer ($P_H = 7,4$) cc. 3 + Ippurato Na cc. 4.
Acido Nicotinu- rico	B) Puffer ($P_H = 7,4$) cc. 3 + Nicotinurato Na cc. 4 + H_2O cc. 1.
	C) Estr. Enz. cc. 1 + Puffer ($P_H = 7,4$) cc. 3 + Nicotinurato Na cc. 4.

In tutti i campioni per evitare possibili azioni batteriche, il Puffer e le soluzioni come pure l'acqua venivano saturate con toluolo per agitazione prolungata mediante agitatore meccanico con l'idrocarburo, che veniva poi separato per decantazione dallo strato acquoso limpido. Per determinare la scissione idrolitica dell'acido ippurico e nicotinurico in funzione del tempo, veniva prelevato dal termostato un gruppo dei cinque campioni dopo 0,24,48 ecc. ore per la prima serie di esperienze (vedi tabelle I e II) e dopo 0, 6, 12, 18 ecc. ore per la seconda serie di esperienze (vedi tabelle I e II). I campioni A e C venivano deproteinizzati per aggiunta di 1 cmc. di soluzione di wolframato e 1 cmc. di acido solforico e successiva filtrazione. I campioni B venivano portati a 10 cmc. per aggiunta di 2 cmc. di acqua. Le analisi venivano eseguite su 2 cmc. e i risultati riferiti ai 10 cmc. Come dalla quantità di azoto amminico dei campioni sia stato possibile risalire alla quantità di azoto amminico della glicocolleina messa in libertà per idrolisi e quindi alla scissione percentuale risulta chiaramente dalle tabelle.

TABELLA I. - *Acido Ippurico* $t = 38,5^{\circ} \text{C}$.

Estratto	Ore	mgr. di Azoto aminico nei 10 cc. dei campioni				Aumento in mgr. di Azoto aminico nei 10 cc. dei campioni A, B, C.			Azoto aminico della glicocola messa in libertà dall'enzima	Quantità della glicocola messa in libertà per scissione idrolitica	Scissione Percentuale
		A	B	C		A'	B'	C'			
I ⁽¹⁾	0	0,2655	0,0310	0,2955		—	—	—	—	—	—
	24	0,2907	0,0875	3,6922		0,0242	0,0565	3,3967	3,3160	mgr. 17,75	84,73
	48	0,3158	0,0875	4,2740		0,0493	0,0565	3,9785	3,8727	» 20,73	98,75
	72	0,3158	0,0855	4,2942		0,0503	0,0545	3,9987	3,8937	» 20,84	99,49
	96	0,3150	0,0866	4,2645		0,0495	0,0556	3,9690	3,8639	» 20,68	98,73
II ⁽²⁾	0	0,3167	0,0292	0,3147		—	—	—	—	—	—
	6	0,3232	0,0301	1,3855		0,0065	0,0009	1,0708	1,0634	» 5,69	27,17
	12	0,3207	0,0591	2,1167		0,0040	0,0299	1,8020	1,7681	» 7,51	45,18
	18	0,3300	0,0875	3,1617		0,0133	0,0583	2,8470	2,7754	» 14,86	70,91
	24	0,3192	0,0875	3,6522		0,0025	0,0583	3,3375	3,2767	» 17,54	83,72
	30	0,3180	0,0875	3,8440		0,0013	0,0583	3,5293	3,4697	» 18,58	88,65
	36	0,3180	0,0875	4,1387		0,0013	0,0583	3,8240	3,7644	» 20,15	96,18
	42	0,3197	0,0875	4,3192		0,0030	0,0583	4,0045	3,9432	» 21,11	100,70
	48	0,3180	0,0875	4,2610		0,0013	0,0583	3,9463	3,8867	» 20,81	99,31

⁽¹⁾ L'estratto I è stato impiegato 5 giorni dopo la sua preparazione. Durante tale tempo veniva conservato in ghiacciaia.⁽²⁾ L'estratto II è lo stesso estratto I conservato però in ghiacciaia per venti giorni dopo la sua preparazione.

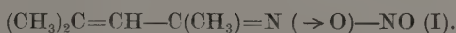
TABELLA II. — *Acido Nicotinurico* $t = 38,5^{\circ} \text{C}$.

Estratto	Ore	mgr. di Azoto aminico nei 10 cc. dei campioni			Aumento in mgr. di Azoto aminico nei 10 cc. dei campioni A, B, C.			Azoto aminico della glicocola messa in libertà dall'enzima	Quantità della glicocola messa in libertà per scissione idrolitica	Scissione Percentuale
		A	B	C	A'	B'	C'			
I (1)	0	0,2655	0,0178	0,3230	—	—	—	—	—	—
	24	0,2907	0,1162	3,6922	0,0242	0,0984	3,3692	3,2466	mgr. 17,40	82,16
	48	0,3158	0,1162	4,2587	0,0493	0,0984	3,9357	3,7880	» 20,30	95,85
	72	0,3158	0,1151	4,2660	0,0503	0,0973	3,9430	3,7954	» 20,34	96,05
	96	0,3150	0,1152	4,2932	0,0495	0,0974	3,9702	3,8233	» 20,40	96,75
II (2)	0	0,3167	0,0292	0,3147	—	—	—	—	—	—
	6	0,3232	0,0591	1,5325	0,0065	0,0299	1,2178	1,1814	» 6,33	29,90
	12	0,3207	0,0875	2,3450	0,0040	0,0583	2,0303	1,9680	» 10,54	49,80
	18	0,3300	0,1168	2,9657	0,0133	0,0876	2,6510	2,5501	» 13,66	64,53
	24	0,3192	0,1168	3,6795	0,0025	0,0876	3,3648	3,2747	» 17,55	82,87
	30	0,3180	0,1168	3,8942	0,0013	0,0876	3,5795	3,4906	» 18,70	88,33
	36	0,3180	0,1168	4,1782	0,0013	0,0876	3,8635	3,7746	» 20,23	95,52
	42	0,3197	0,1168	4,3192	0,0030	0,0876	4,0045	3,9139	» 20,97	99,05
48	0,3180	0,1168	4,2610	0,0913	0,0876	3,9463	3,8574	» 20,67	97,62	

⁽¹⁾ L'estratto I è stato impiegato 5 giorni dopo la sua preparazione. Durante tale tempo veniva conservato in ghiacciaia.⁽²⁾ L'estratto II è lo stesso estratto I conservato però in ghiacciaia per 20 giorni dopo la sua preparazione.

Chimica (Chimica organica). — *Ricerche sui pernitrosoderivati*. Nota ⁽¹⁾ III di RAFFAELLO FUSCO e FRANCO D'ALÒ, presentata da GIUSEPPE BRUNI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

In due recenti comunicazioni apparse su questi « Rendiconti » ⁽²⁾, abbiamo riferito le nostre esperienze relative alle cosiddetta « mesitilnitrimina » di HARRIES, per la quale abbiamo potuto dimostrare la seguente struttura pernitrosilica:



Le ricerche su questa sostanza e sugli interessanti composti a cui essa dà origine per successivi trattamenti con HCl, NaOCH₃, H₂SO₄ ecc. sono state nel frattempo continuate portandoci a nuovi risultati che saranno qui esposti.

Sono state anzitutto condotte nuove esperienze sul pernitrosomesitilossido stesso (I), con riferimento ai seguenti punti: a) azione del bromo; b) azione del calore in seno ad un solvente inerte; c) comportamento ai reattivi del GRIGNARD; d) riduzione con SnCl₂ e HCl.

Già HARRIES ⁽³⁾ aveva osservato che la « mesitilnitrimina » dava per trattamento con bromo un bromoderivato la cui struttura non era stata oggetto di ulteriore studio da parte dell'A. stesso. Riottenuta questa sostanza per unione diretta dei componenti in seno all'acido acetico, noi abbiamo anzitutto constatato trattarsi di un composto C₆H₁₀O₂N₂Br₂ risultante quindi dall'addizione di una mol di bromo al pernitrosomesitilossido, verosimilmente al doppio legame etilenico presente in questa sostanza.

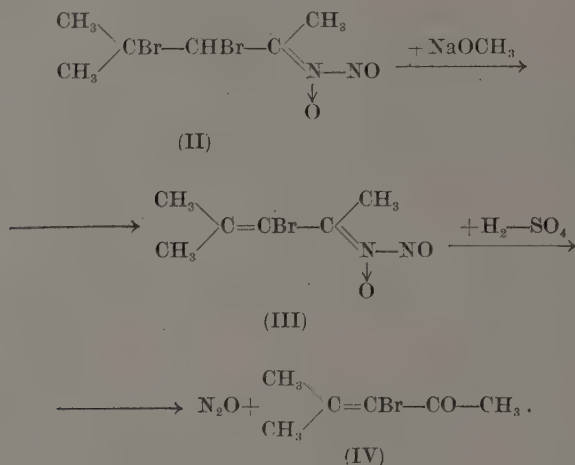
Trattando infatti questo bibromuro (II) con una mol di metilato sodico in alcool metilico, si ha l'eliminazione di una mol di HBr e risulta

⁽¹⁾ Pervenuta all'Accademia il 18 ottobre 1941-XIX.

⁽²⁾ R. FUSCO e G. TRISOGLIO, *Ricerche sui pernitrosoderivati. Sulla così detta « mesitilnitrimina » di Harries*. Nota I questi « Rendiconti », Serie VII, vol. II, fasc. 8, pag. 618; e Nota II id. fasc. 9, pag. 751.

⁽³⁾ « Ann. » 319, 230 (1901).

un monobromoderivato (III) la cui struttura è senz'altro stabilita dal comportamento all'acido solforico diluito a caldo, che ne provoca la scissione in N_2O e bromomesitilossido (IV):



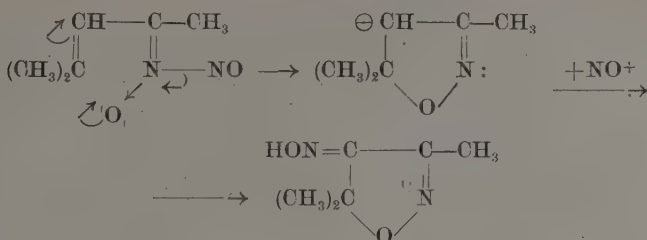
Quest'ultimo composto venne facilmente riconosciuto alle caratteristiche proprietà lacrimogene e per trasformazione in acetilisobutirile: $(\text{CH}_3)_2\text{CH}-\text{CO}-\text{CO}-\text{CH}_3$ mediante acetato potassico e poi acido solforico ⁽⁴⁾.

Al di fuori della facile decomponibilità con acidi minerali con svolgimento di N_2O (e in parte anche vapori nitrosi) e formazione dei rispettivi chetoni bromurati, i due nuovi pernitrosoderivati (II) e (III) non presentano però alcuna delle altre interessanti proprietà del pernitrosomesitilossido, quali il comportamento all' HCl conc. e l'isomerizzazione in trimetilsossazolonossima, da noi già discusse nelle note precedenti.

A proposito di quest'ultima trasformazione del pernitrosomesitilossido, diremo di un'altra esperienza che conferma l'interpretazione da noi data alla reazione suddetta nella prima di queste note ⁽⁵⁾. Facemmo allora notare come questa rivesta tutti i caratteri di una migrazione cationoide di un aggruppamento dall'azoto al carbonio nucleare in orto all'atomo di azoto stesso, quale frequentemente si riscontra nella chimica aromatica, e ne proponemmo il seguente meccanismo elettronico:

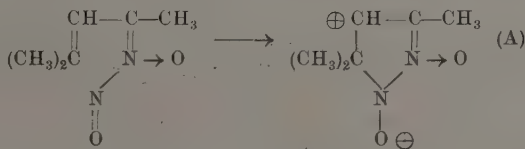
⁽⁴⁾ « Ber. », 33, 500 (1900).

⁽⁵⁾ Loc. cit., pag. 626.

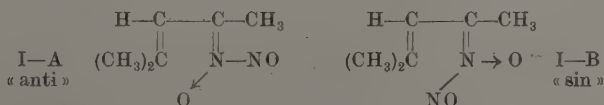


Abbiamo ora potuto verificare come questa trasformazione avvenga anche per riscaldamento in seno ad un solvente anidro, come il benzolo, e non solo in presenza di acqua, che secondo l'interpretazione di HARRIES entrerebbe nella reazione (6).

(6) Un'interessante osservazione si lascia trarre confrontando da un punto di vista spaziale la reazione di isomerizzazione del pernitrosomesitilossido, ora discussa, e la trasformazione che esso subisce per azione dell'HCl, di cui abbiamo già fornito l'interpretazione elettronica nella prima di queste Note. Cogliamo l'occasione per riaffermare che, a ragion veduta, l'interpretazione più verosimile che si possa fornire a questo processo è la seconda tra quelle da noi proposte nel lavoro citato (pag. 629 in nota, in fondo alla pagina), che ha come presupposto che il pernitrosomesitilossido possa reagire con HCl come ione anfibo (A):

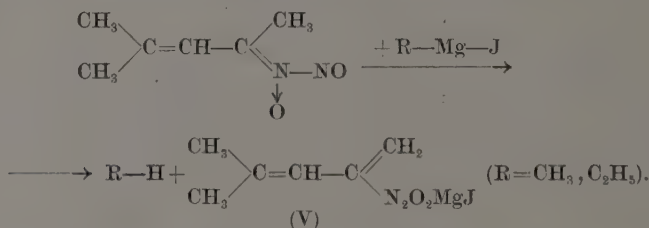


Confrontando dunque le due reazioni dal punto di vista spaziale, si vede che la prima (l'isomerizzazione) richiede che l'atomo di ossigeno del pernitrosomesitilossido legato semipolarmente stia, rispetto al doppio legame tra C ed N dalla stessa parte del gruppo isobutenilico: $(\text{CH}_3)_2\text{C}=\text{CH}-$, mentre l'opposto deve accadere per la seconda reazione:



Si è quindi condotti ad ammettere che il pernitroso in questione reagisca ora secondo l'una ora secondo l'altra delle due forme stereoisomere (I-A e I-B) una delle quali sarà quella stabile che si lascia isolare. Alla domanda quale delle due sia quella stabile si può, noi pensiamo, rispondere con questo ragionamento: delle due mesitilossime stereoisomere quella che si pernitrosa facilmente e con rendimenti quantitativi è, secondo le esperienze di Harries quella alcalistabile o forma α , mentre la β richiede un trattamento a caldo e non dà rese quantitative in pernitrosoderivato. Siccome alla prima spetta con molta probabilità la struttura « sin »

In un'altra serie di esperienze abbiamo studiato l'azione dei reattivi del GRIGNARD sul pernitrosomesitilossido. Aggiungendo alla sospensione di questa sostanza in etere anidro una quantità equimolecolare di ioduro di metil (o etil) magnesio, notammo svolgimento gassoso (metano o etano) e formazione di un precipitato il cui peso corrispondeva esattamente al calcolato per un magnesiacio del pernitrosomesitilossido (V):



Sottoposto infatti all'azione dell'acqua, esso rigenerò il pernitroso accanto a ioduro e idrato di magnesio.

L'esperienza ha un certo interesse perchè dimostra che anche il pernitrosomesitilossido è suscettibile di fornire sali derivanti da una forma « aci », analogamente agli altri pernitrosoderivati (della canfora, della pinacolina ecc.). L'unica differenza sta nella molto minore acidità del pernitrosomesitilossido, tanto piccola che si può mettere in evidenza solo mediante i reattivi del GRIGNARD (reattivo di Zerewitinoff per la mobilità protonica) e che finora era sfuggita all'osservazione (7).

(dell'OH rispetto al CH₃) così è probabile che anche nel pernitrosoderivato la posizione dell'ossigeno sia rimasta la stessa, ciò che porta ad ammettere la I-B o « sin » come forma stabile. Dato che per l'isomerizzazione del pernitrosomesitilossido l'atomo di ossigeno deve invece trovarsi dalla parte opposta al CH₃, si può pensare che la prima fase di questa isomerizzazione stessa consista nella trasformazione, per riscaldamento in acqua o in altro solvente, della forma « sin » stabile nella « anti » facilmente trasponibile.

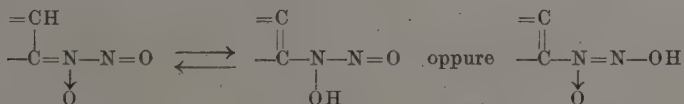
(7) Giunge qui opportuno fare qualche considerazione sulla struttura di queste forme « aci » ed in generale sul comportamento agli alcali dei pernitrosoderivati o nitrimine. Tutti i pernitrosoderivati — ed abbiamo visto che il pernitrosomesitilossido non si sottrae alla regola — sono suscettibili di essere trasformati in sali, derivanti da una forma « aci » che solo in casi eccezionali può essere isolata allo stato libero. La stabilità di questi sali in soluzione alcalina è molto diversa da caso a caso: alcuni sono stabili, come il derivato pinacolinico, altri si idrolizzano rigenerando il pernitroso di partenza con maggiore o minore facilità (derivati della canfora, dell'ossido di mesitile ecc.). Interessante è pure l'azione degli alcali concentrati a caldo che provoca spesso la scissione del gruppo pernitrosilico fornendo nitrito alcalino e mesitilossima nel caso del pernitrosomesitilossido, ed in parte anche nitrato alcalino e chetimina come nel caso della pernitrosocanfora. Tra le

Un eccesso di reattivo di GRIGNARD provoca la formazione di una sostanza oleosa, colorata in azzurro, facilmente decomponibile, probabilmente un nitrosocomposto, che non abbiamo preso in ulteriore esame.

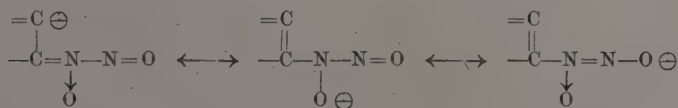
altre proprietà di questi sali è inoltre da notare la facile ossidabilità, l'attitudine a copularsi coi diazo all'atomo di carbonio attiguo al gruppo CN_2O_2 - particolarmente studiate nel caso della pernitrosocanfora - ed anche la possibilità di fornire con alogenuri alchilici due serie di alchilderivati isomeri, come ha mostrato SCHOLL per il derivato pinacolinico.

È logico chiedersi se e in quale misura tutte queste proprietà si lascino interpretare e coordinare in base ad una sola ed unica struttura dell'aggruppamento CN_2O_2 . Già nella prima comunicazione sui pernitrosoderivati facemmo notare che delle varie strutture fin qui proposte per il gruppo suddetto, la sola in accordo coi vari metodi di formazione osservati per questa classe di corpi fosse quella pernitrosilica di ANGELI, da noi riconfermata in modo inconfutabile per la « mesitilnitrimina » di HARRIES. Ora vogliamo aggiungere che la stessa formula pernitrosilica è in grado di interpretare egregiamente anche il comportamento dei pernitrosoderivati agli alcali e le singolari proprietà dei loro sali.

Per ciò che riguarda il passaggio a forma « aci » si possono prendere in considerazione due possibilità, tra le quali non abbiamo alcun criterio di scelta, non essendo mai state studiate queste forme allo stato libero per la loro grande instabilità:

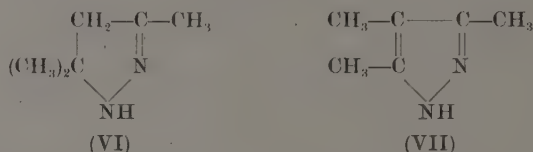


D'altra parte questa distinzione non ha più ragione di sussistere nei rispettivi sali, poichè in essi l'anione è mesomero ed ammette queste tre forme limiti principali (oltre quelle portanti la carica negativa all'atomo di azoto):

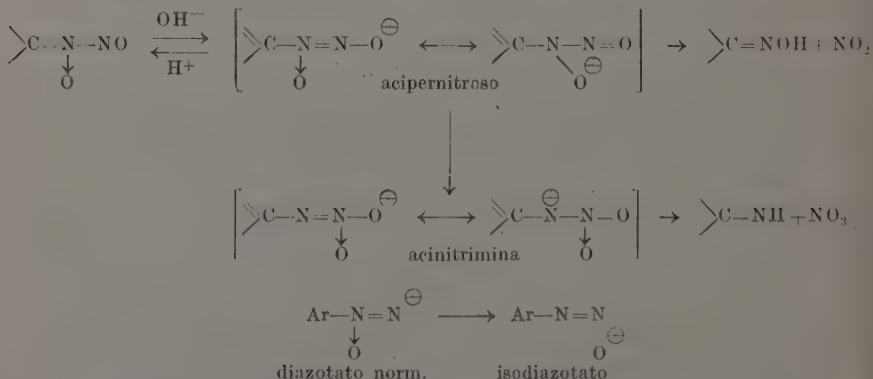


Questa mesomeria spiega inoltre alcune delle proprietà dei sali stessi: anzitutto si può prevedere la formazione di alchilderivati isomeri, varie essendo le posizioni di attacco possibili per il gruppo alchilico; inoltre si comprendono senza difficoltà le caratteristiche proprietà dell'atomo di carbonio attiguo al gruppo pernitrosilico il quale può assumere la carica negativa e dare quindi luogo a copulazione coi diazo, isonitrosarsi ecc. Non si incontra inoltre alcuna difficoltà per interpretare la scissione che subiscono i pernitrosoderivati ad opera degli alcali in ossima e nitrito alcalino, essendo questo processo idrolitico l'inverso del processo di formazione da ossima e acido nitroso; meno comprensibile risulta invece a prima vista l'altro possibile schema di scissione presentato da alcuni pernitroso, che

Risultati pure degni di menzione sono stati da noi ottenuti saggiando la riduzione del pernitrosomesitilossido ad opera del cloruro stannoso in ambiente fortemente cloridrico. Ricorderemo in proposito che già HARRIES⁽⁸⁾ aveva effettuata questa riduzione, servendosi però di polvere di zinco e acqua, ed aveva ottenuto della trimetilpirazolina (VI). Noi potemmo notare che impiegando invece SnCl_2 e HCl conc. si otteneva, accanto a trimetilpirazolina, anche una piccola quantità di un altro composto, facilmente isolabile come picrato p. f. 238° , che non tardammo a riconoscere per 3, 4, 5 trimetilpirazolo (VII)⁽⁹⁾:



conduce a nitrato alcalino e iminochetone. Si potrebbe notare in proposito che simili fenomeni di ossi riduzione sono abbastanza frequenti in ambiente alcalino; a noi però sembra più probabile - e ci riserviamo di dimostrarlo sperimentalmente - che sia possibile sotto l'azione degli alcali e del calore il passaggio di un atomo di ossigeno dall'atomo di azoto più vicino al carbonio al più lontano, secondo un meccanismo che ricorda il passaggio dei diazotati normali negli isodiazotati. Successivamente avverrebbe la scissione della forma acinitriminica instabile così formata in chetimina e nitrato alcalino:

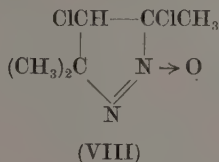


Come si vede in base a questa interpretazione, la struttura nitriminica di SCHOLL è da noi ammessa come fase transitoria nei processi di decomposizione dei pernitrosoderivati ad opera degli alcali.

⁽⁸⁾ « Ann. », 319, 234 (1901).

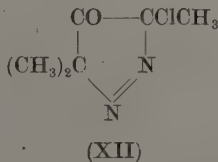
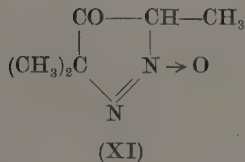
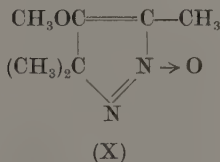
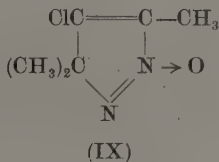
⁽⁹⁾ KNORR e OETTINGER l'ottennero da metilacetilacetone e idrazina (« Ann. », 279, 244.

La formazione, sia pure non prevalente, di questo composto che reca nella sua molecola un concatenamento di atomi di carbonio diverso da quello presente nel pernitrosomesitilossido, non ci è parsa dapprima molto semplice da interpretare. Pensammo perciò che esso dovesse risultare non direttamente dal pernitrosomesitilossido, bensì dal dicloroderivato (VIII) che dal pernitroso stesso prende origine per azione dell'HCl conc (10).



Dei saggi di riduzione con SnCl_2 , condotti sul dicloroderivato (VIII) confermarono infatti l'esattezza di questa supposizione.

Per giungere ad una interpretazione soddisfacente di questi casi di trasposizione, che già si delineavano del tipo *retropinacolinico*, abbiamo esteso lo studio della riduzione con SnCl_2 anche ad altri azossi ed azoderivati ciclici, da noi descritti nell'ultima nota sull'argomento (11) e precisamente ai composti:

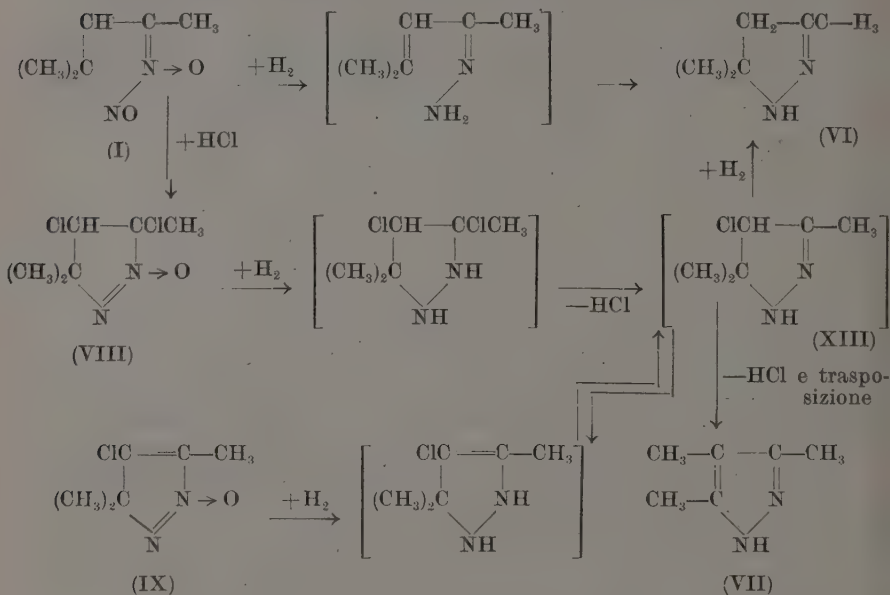


I risultati furono i seguenti: dal cloroderivato (IX) ottenemmo poco trimetilpirazolo (VII) e molta trimetilpirazolina (VI), dagli altri tre viceversa molto trimetilpirazolo e solo tracce di pirazolina. È ora possibile ricondurre le reazioni di riduzione dei composti citati a due schemi

(10) La struttura VIII è stata da noi dimostrata nella Nota II.

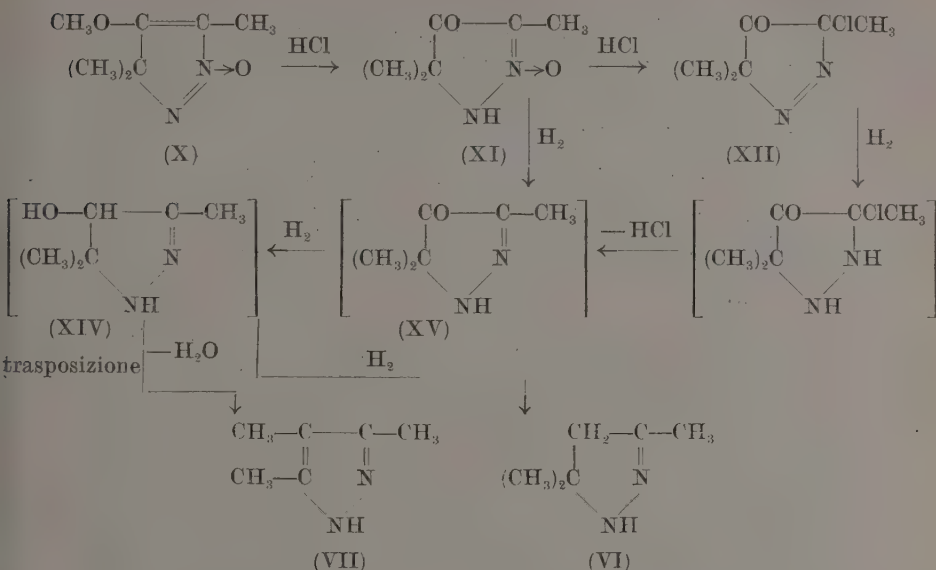
(11) Vedi nota (2).

fondamentali, che secondo noi ne interpretano abbastanza bene i risultati non solo dal lato qualitativo ma anche da quello quantitativo.



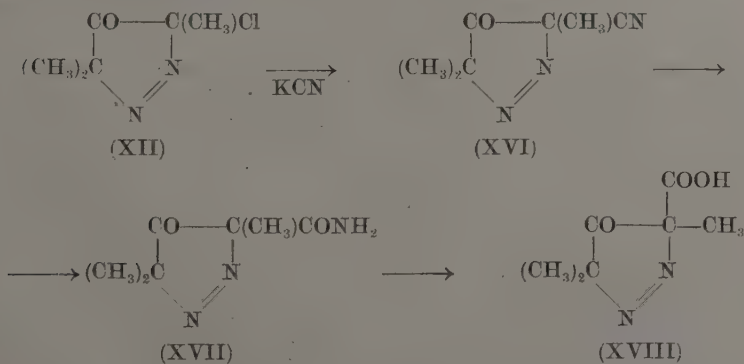
Nello schema ora riportato è sintetizzato il probabile decorso della riduzione dei composti che forniscono in prevalenza trimetilpirazolina (prodotto di riduzione normale), accanto a poco trimetilpirazolo (prodotto di riduzione con trasposizione); penultimo gradino della riduzione sarebbe la clorotrimetilpirazolina (XIII), che dovrebbe più facilmente ridursi ulteriormente piuttosto che trasporre con perdita di HCl.

In questo secondo schema sono invece raccolte le probabili trasformazioni subite dai composti (X), (XI), (XII) che danno, secondo l'esperienza, più facilmente la riduzione con trasposizione che la riduzione normale. Questo fatto è ricondotto nella nostra interpretazione alla maggior tendenza della ossitrimetilpirazolina (XIV) a trasporre con perdita di acqua piuttosto che a ridursi ulteriormente:

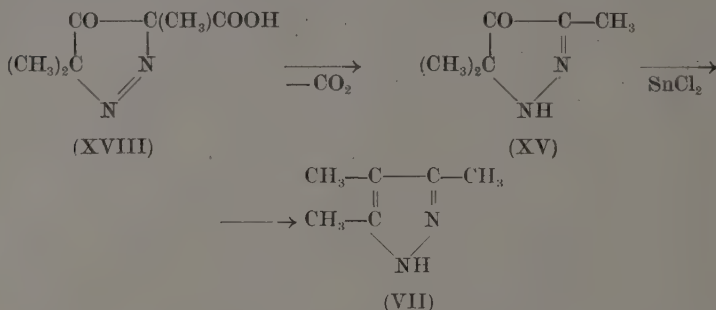


Avrebbe potuto confermare questa nostra interpretazione l'isolamento di qualche prodotto da noi assunto qual intermedio, oppure la sua sintesi per altra via e la successiva riduzione con SnCl_2 . Dopo qualche tentativo infruttuoso di preparare la clorotrimetilpirazolina (XIII), rivolgemmo la nostra attenzione al trimetilpirazolone (XV), sostanza che non risulta descritta in letteratura, ma che ci riuscì di ottenere per sintesi dal cloroazocetone (XII).

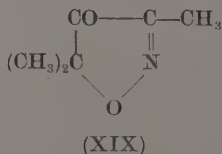
Con KCN in soluzione alcoolica questo cloroderivato sostituisce infatti facilmente il suo alogeno con un gruppo nitrilico fornendo un cetonitrile (XVI) che può essere saponificato successivamente ad opera degli alcali nella corrispondente amide (XVII) e nell'acido (XVIII):



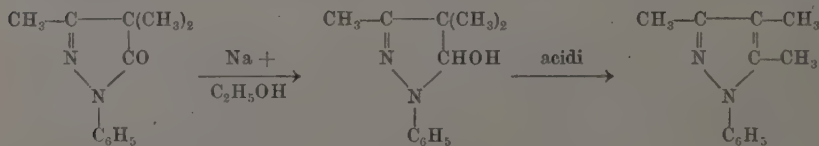
Riscaldato al suo p. f., l'acido(XVIII) si decarbossila e fornisce l'atteso trimetilpirazalone, che si può facilmente ottenere puro dal miscuglio di reazione estraendolo con etere di petrolio. Come ci si attendeva, il composto diede per riduzione con SnCl_2 del 3, 4, 5 trimetilpirazolo, accanto a quantità assolutamente trascurabili di trimetilpirazolina ⁽¹²⁾:



Tra le altre interessanti proprietà del trimetilpirazalone (XV) v'è pure da notare l'inerzia presentata dal suo carbonile a reagire con idrossilamina, semicarbazide e fenilidrazina. Questo fatto è tanto più singolare in quanto che il 3, 5, 5, trimetilisossazolone (XIX), di struttura assolutamente analoga, reagisce invece normalmente coi reattivi del gruppo carbonilico ⁽¹³⁾.



⁽¹²⁾ La letteratura chimica è ricca di esempi di trasposizioni retropinacoliniche; non ci consta però che questo tipo di reazione sia stato prima d'ora riscontrato nei 4-pirazoloni, che d'altra parte risultano scarsamente noti. Un caso abbastanza simile al nostro è invece quello descritto dallo KNORR, riguardante l'1 fenil 3, 4, 4 trimetil 5 pirazolone, che per riduzione con sodio ed alcool passa al corrispondente carbinolo e successivamente per azione degli acidi nell'1 fenil 3, 4, 5 trimetilpirazolo:



⁽¹³⁾ HARRIES, loc. cit.

Con la trasformazione, ora riferita, del cloroazochetone (XII) in trimetilpirazolone, si arricchisce di tre nuovi termini la serie degli azossi ed azocomposti ciclici che prendono origine dal pernitrosomesitilossido.

Lo studio di queste sostanze verrà proseguito.

PARTE SPERIMENTALE.

Azione del bromo sul pernitrosomesitilossido: pernitroso 4 metil 3, 4 dibromo pentanone (2) (form. II).

Si sospendono in cc. 20 di acido acetico glaciale gr. 14 di pernitrosomesitilossido e si aggiungono, poco per volta, e raffreddando esternamente con acqua, di cc. 5 di bromo. Il pernitroso passa rapidamente in soluzione. Dopo qualche minuto si diluisce con acqua e si filtra alla pompa il precipitato, di color verde pisello per impurità, costituito dal dibromuro greggio. Rendimenti gr. 15 circa. Si purifica per cristallizzazione da alcol, da cui si ottiene in magnifici cristalli incolori splendenti fondenti a 125° con decomposizione. Il composto è facilmente solubile in acido acetico, poco in alcol freddo, quasi insolubile in acqua. Riscaldato in seno all'acqua si decompone lentamente, più velocemente se si aggiunge un po' di acido minerale: si ha sviluppo gassoso e formazione di una sostanza di odore molto pungente. Analisi:

N % trov.	9,24	Br	51,8
per $C_6H_{10}O_2N_2Br_2$	calc.	9,27	52,95

Pernitroso 4 metil 3 bromo penten (3)one(4) (form. IV) e sua scissione con acidi.

A gr. 7 di dibromuro (form. II) sospesi in cc. 30 di alcol metilico si aggiunge una soluzione di metilato sodico ottenuta sciogliendo gr. 0,5 di sodio in cc. 10 di alcol metilico. Si ha reazione immediata: il bibromuro passa in soluzione e subito dopo riprecipita un nuovo corpo in cristallini incolori splendenti, consistente nel bromocomposto III, già praticamente puro. Un'altra porzione si ottiene dall'alcol metilico per concentrazione. Si ricristallizza dall'alcol in cui la sostanza è poco solubile. P. f. 134° con decomposizione. Analisi:

N % trov.	12,68
per $C_6H_9O_2N_2Br$	calc. 12,68

Una porzione di bromoderivato viene sospesa in acido solforico diluito e scaldata a ricadere per circa un'ora.

Si nota sviluppo di vapori nitrosi e contemporaneamente la sostanza passa in soluzione dando origine ad un nuovo corpo volatile in goccioline oleose, pesanti di odore pungentissimo. Quando lo sviluppo gassoso è terminato si lascia raffreddare, si estrae con etere ed il residuo della distillazione dell'etere costante di bromomesitilossido si trasforma direttamente in acetossimesitilossido e quindi in acetilisobutirrilico secondo la tecnica descritta da PAULY e LIECK ⁽¹⁴⁾. Il dichetone così formato è facilmente riconosciuto attraverso il suo osazone fondente a 117°.

Isomerizzazione del pernitrosomesitilossido in 3, 5, 5 trimetil 4 isossazonossima per riscaldamento in benzolo.

Riscaldando una sospensione di pernitrosomesitilossido in benzolo anidro a ricadere, si nota che il prodotto passa lentamente in soluzione svolgendo un po' di vapori nitrosi. Dopo un'ora circa si distilla su b. m. buona parte del solvente e si lascia a sè il residuo che cristallizza col raffreddamento quasi completamente. Si filtra e si ricristallizza dall'acqua ottenendo dei cristalli incolori p. f. 156°-157° in tutto identici ad un campione di trimetilisossazonossima preparata secondo HARRIES ⁽¹⁵⁾. Come sottoprodotto della reazione si ha un liquido oleoso scuro, che non è stato preso in ulteriore esame.

Azione dei reattivi del Grignard sul pernitrosomesitilossido: magnesiaci del pernitroso (form. V).

Si prepara nel modo solito una soluzione eterea di ioduro di metil- (oppure etil)-magnesio e la si decanta, lavando poi con poco etere anidro i residui di magnesio inattaccati, in un imbuto a rubinetto. Di qui la si lascia sgocciolare, con vigorosa agitazione meccanica e raffreddamento con acqua corrente in una sospensione di pernitrosomesitilossido (1 gr. mol. per 1 gr. at. di Mg) in etere assoluto. Si nota durante l'aggiunta uno sviluppo gassoso (metano od etano) e la formazione di un precipitato pesante che si raccoglie sul fondo del pallone quando si interrompe l'agitazione. Si scalda brevemente a ricadere per completare la reazione e, dopo raffreddamento, si decanta via l'etere e si filtra alla pompa il precipitato. Questo seccato in essiccatore a vuoto pesa gr. 28,7 (da gr. 14,2 di pernitroso) pari al 98 % del teorico. Ripreso il precipitato con acqua tiepida e filtrato dall'idrato di Mg, si lascia concentrare spontaneamente il liquido

⁽¹⁴⁾ « Ber. », 33, 503 (1900).

⁽¹⁵⁾ « Ann. », 319, 236 (1901).

in essiccatore a vuoto su acido solforico. Cristallizza un composto che viene riconosciuto identico al pernitrosomesitilossido. Analisi:

N % trov.	C 50,4	H 6,8	N 19,4
per $C_6H_{10}O_2N_2$ calc.	50,7	7,04	19,7

Se il reattivo del Grignard viene impiegato in notevole eccesso, il liquido si colora in azzurro per successivo trattamento con acqua e lavaggio con iposolfito. Per evaporazione dell'etere si ottiene del pernitroso inalterato ed un olio verde facilmente decomponibile.

È stato pure esteso il saggio coi Grignard alla pernitrosocanfora a scopo di confronto: operando su quantità equimolecolari di Grignard e di pernitrosocanfora si ebbe una reazione vivace. Decomposto il magnesiacio formatosi direttamente con acqua, separato l'etere, lavato con iposolfito e distillato diede un residuo cristallino da cui fu ottenuta la pernitrosocanfora per purificazioni dall'alcol diluito.

Riduzione con $SnCl_2$ e HCl dei composti: I-VIII-IX-X-XI-XII-XV isolamento e riconoscimento della 3, 5, 5 trimetilpirazolina (VI) e del 3, 4, 5 trimetilpirazolo (VII).

La riduzione è stata effettuata su tutti i composti citati seguendo la stessa tecnica: si scioglieva il cloruro stannoso biidrato, in quantità eccedente il teorico, in HCl conc., si aggiungeva la sostanza da ridurre ben macinata e si agitava. La riduzione procedette in ogni caso da sola sviluppando calore e completandosi in pochi minuti. Dopo riposo di qualche ora su stagno granulare per ridurre a stannoso il sale stannico formatosi, la soluzione veniva fortemente diluita con acqua calda e saturata di acido solfidrico. Il filtrato dal solfuro stannoso veniva concentrato a piccolo volume su b. m. a pressione ridotta quindi versato in capsula e lasciato in essiccatore su acido solforico fino a secchezza. Nei casi in cui si aveva prevalente formazione di trimetilpirazolo (X, XI, XII, XV) era sufficiente disciogliere la miscela di cloridrati in poca acqua ed alcalinizzare con KOH per ottenere la precipitazione di questa base solida che purificata per cristallizzazione da acqua fondeva a 138° – 139° ⁽¹⁶⁾ e diede alla determinazione dell'azoto:

N % trov.	25,38
per $C_6H_{10}N_2$ calc.	25,45

Una porzione, disciolta in acqua e addizionata di acido picrico in soluzione acquosa, diede un precipitato giallo di picrato purificabile, per cristallizzazione dall'alcole e fondente a 238° – 239° (in accordo coi dati della

⁽¹⁶⁾ KNORR, OETTINGER, loc. cit.

letteratura). In questi casi la formazione della trimetilpirazolina è stata riconosciuta più che altro all'odore caratteristico e confermata distillando in vapore le acque madri alcaline della precipitazione del trimetilpirazolo, precipitandole con acido picrico e cristallizzando frazionatamente i picrati ottenuti (quello della trimetilpirazolina è molto più solubile di quello del trimetilpirazolo e fonde a 138°).

Nei casi in cui la trimetilpirazolina era il prodotto predominante (I, VIII, IX) la miscela di cloridrati diede per dissoluzione in poca acqua e saturazione con KOH separazione di un liquido che fu distillato nel vuoto (p. e. 70 a 20 mm.) e riconosciuto per trimetilpirazolina ⁽¹⁷⁾; dalle code della distillazione o anche direttamente dal liquido primitivo con acido picrico si ottiene una miscela di picrati da cui facilmente si isola il picrato del trimetilpirazolo, molto più difficilmente solubile in alcol.

Azione del cianuro di potassio sulla 3, 5, 5 trimetil 3 cloro 4 cheto Δ^1 pirazolina (form. XII): 3, 5, 5, trimetil 3 cian 4 cheto Δ^1 pirazolina (form. XVI) ⁽¹⁸⁾.

20 gr. di cloroderivato (XII) vengono disciolti in cc. 100 di alcol assoluto, addizionati di gr. 10 di KCN secco ben macinato e riscaldati a ricadere su b. m. per mezz'ora. Si filtra dopo raffreddamento il KCl alla pompa, lo si lava con poco alcol assoluto che si unisce al filtrato. Questo avviene distillato a b. m. fino ad eliminare cc. 70 di alcool, poi ripreso con acqua estratto due volte con etere, lavato lo strato eterico con acqua ed eliminato il solvente. Il residuo viene distillato nel vuoto (p. e. 70° a 20 mm.). Il nitrile così ottenuto è un liquido leggermente oleoso di odore caratteristico un po' pungente, poco solubile in acqua, facilmente miscibile coi più comuni solventi organici. Scaldato a pressione normale, distilla a 178°-180° con leggera decomposizione. Analisi:

N % trov. 27,2
per $C_7H_5ON_3$ calc. 27,8

Saponificazione del nitrile XVI con alcali: 3, 5, 5 trimetil 4 cheto Δ' pirazolina 2 carbonamide (XVII) e acido 3, 5, 5 trimetil 4 cheto Δ' pirazolina 2 carbossilico (XVIII).

Una parte di nitrile XVI viene diluita con 2 parti di alcol e aggiunta di KOH al 10 % (p. 0,5). Si scalda per 15 minuti a ricadere poi si raffredda.

⁽¹⁷⁾ Alla formazione di picrato p. f. 138° (CURTIUS, « Wirsing Journ. f. prakt. Chem. » (2) 50, 546).

⁽¹⁸⁾ Per la nomenclatura adottata per questi composti vedasi la nota ⁽¹⁾ a pag. 759 della seconda comunicazione sull'argomento.

Cristallizza un nuovo corpo che viene filtrato e cristallizzato dall'acqua in cui è assai solubile a caldo, poco a freddo. Esso fonde a 144° e costituisce l'amide XVII. Analisi:

N %	trov.	25,05
per $C_7H_{11}O_2N_3$	calc.	24,85

Per riscaldamento con KOH svolge ammoniaca e si trasforma in acido XVIII. Il liquido alcalino viene estratto con etere per eliminare l'amide ancora inalterata e le altre impurità presenti (è bene non prolungare troppo il riscaldamento con alcali) poi acidificato con acido solforico e nuovamente estratto con etere. Per eliminazione del solvente resta un olio che col riposo e più rapidamente per innesco cristallizza completamente in lunghi aghi aciculari di acido XVIII. Lo si purifica per cristallizzazione dal benzolo o da miscele di benzolo ed etere di petrolio, ottenendolo così in ciuffetti di aghi scintillanti fondenti a 89° , facilmente solubili in acqua.

N %	trov.	16,28
per $C_7H_{10}O_3N_2$	calc.	16,47

L'acido XVIII è stabile in soluzione acquosa bollente e non reagisce con p. nitrofenilidrazina in soluzione acetica.

Decarbossilazione dell'acido XVIII: 3, 5, 5 trimetil 4 pirazolone (XV).

Per ottenere buoni rendimenti in questa decarbossilazione è necessario impiegare un acido molto puro ed operare il riscaldamento molto lentamente. Nel modo migliore si opera come segue: Si pone l'acido in una provetta immersa in un bagno di acido solforico, che si scalda cautamente fino a che non incominci lo sviluppo gassoso: ciò che si verifica verso i 110° – 112° ; si mantiene questa temperatura per circa mezz'ora e poi si sale lentamente a 115° – 120° per pochi minuti per completare la reazione. Dopo raffreddamento si spezza la provetta in mortaio e si estrae il pirazolone dalle peci scure che lo accompagnano mediante etere di petrolio decolorando la soluzione con nero animale. Concentrando la soluzione cristallizza il pirazolone in aghetti incolori p. f. 74° – 75° . Analisi:

N %	trov.	21,95
per $C_8H_{10}ON_2$	calc.	22,22

Il composto XV è molto solubile in acqua calda e un poco meno in quella fredda; offre una grande stabilità al calore per cui lo si può distillare in piccole porzioni in provetta senza alterazione. Non reagisce con semicarbazide nè con fenilidrazina.

Chimica. — *Defosforizzazione dell'amido di patate con la fosfatasi cerebrale* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di MAX SAMEC, presentata da GUIDO BARGELLINI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

L'ipotesi che nell'amido di patate l'acido fosforico sia combinato con la sostanza organica alla maniera degli esteri organici, fa presupporre la possibilità di liberare quest'acido con processi caratteristici per la saponificazione degli esteri.

Anni or sono abbiamo mostrato la possibilità di togliere a soluzioni di amido la maggior parte dell'acido fosforico riscaldandole per più ore sotto pressione e dializzando il prodotto così ottenuto ⁽³⁾. Più tardi raggiungemmo lo stesso scopo per via enzimatica ⁽⁴⁾. Gli estratti degli organi allora adoperati contenevano, oltre alla fosfatasi, anche amilasi e perciò non ci fu possibile di studiare le proprietà dell'amido defosforizzato, ma non ancora decomposto.

E. WALDSCHMIDT-LEITZ e K. MAYER ⁽⁵⁾ hanno più tardi mostrato come si possa separare la fosfatasi dalle amilasi che l'accompagnano nell'estratto d'orzo: ambedue gli enzimi si fanno assorbire dall'allumina C_{γ} , si eluisce con una soluzione di fosfato alcalino e dalle eluizioni si separa la β -amilasi col caolino.

Sottoponendo la colla d'amido, in presenza di tampone di acetato 1/10 n ($P_H = 5,6$) all'influenza della fosfatasi così preparata si osserva un forte abbassamento della viscosità della colla ed una separazione d'acido fosforico: si constata pure un piccolo aumento del potere riduttore. Il prodotto ottenuto, quando è terminata l'azione dell'enzima, dà colorazione turchina con una soluzione di iodio ed ha un potere riduttore che corrisponde ad una catena di 36 resti glucosidici ($M \sim 5832$).

Considerando, che, come differenti autori unanimemente sostengono, la colla nativa di patate ha particelle molto più grandi, questa

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico dell'Università di Lubiana.

⁽²⁾ Pervenuta all'Accademia il 25 ottobre 1941-XIX.

⁽³⁾ M. SAMEC, « Kolloidchemische Beihefte », 6, 23 (1914).

⁽⁴⁾ M. SAMEC, « Compt. Rend. Acad. Sciences », Paris, 181, 532 (1925).

⁽⁵⁾ E. WALDSCHMIDT-LEITZ e K. MAYER, « Zeitsch. f. physiol. Chem. », 236, 168 (1935).

esperienza indica che sotto l'influenza della sopracitata fosfatasi ha avuto luogo una rilevante diminuzione di grandezza delle particelle della colla d'amido.

E. WALDSCHMIDT-LEITZ e K. MAYER controllarono la separazione della fosfatasi dalle amilasi servendosi del potere riduttore di queste ultime sulla destrina pura di KAHLEBAUM. Si potrebbe pensare però che questo metodo non possa dimostrare quantità minime di α -amilasi perchè questo enzima, in concentrazioni sufficientemente piccole produce, è vero, una forte diminuzione della viscosità ma non produce quasi alcun aumento del potere riduttore e inoltre perchè le destrine sono spesso molto meno attaccabili dalle diastasi che l'amido stesso.

Noi abbiamo perciò ripetuta la prova sull'amilasi servendoci del nostro amilosio-sol. Anche con questo substrato non si poté notare entro 24 ore, un aumento misurabile del potere riduttore.

100 cc. di amilosio-sol al 0,35 %, 20 cc. di soluzione tampone di acetato 1/10 N ($P_H = 5-5,10$), 20 cc. di soluzione di amilofosfatasi priva di maltasi. Temperatura 40°. Durata 24 ore. Aumento del potere riduttore 0,02 cc. di soluzione 1/10 N di iodio per campione di 20 cc.

Contrariamente a questo, con l'esperienza di diffusione di WYSMANN trovammo dopo 5-6 giorni sotto la goccia della soluzione d'enzima e nelle immediate vicinanze di questa un distinto campo di diffusione incolore che dimostra la presenza di α -amilasi.

Abbiamo perciò ripetuta la depurazione col caolino tante volte finchè anche la prova di WYSMANN non mostrò l'assenza di α -amilasi.

Nel prodotto così depurato però era praticamente scomparsa anche l'attività della fosfatasi, sia di fronte all'acido glicerico-fosforico che all'amido di patate.

Più facile riuscì l'isolamento di una fosfatasi priva di amilasi dal cervello di coniglio, secondo EMDEN-BUCHER.

38 gr. di cervello fresco di coniglio furono ben spappolati per 10 minuti con una quantità quintupla di acetone appena distillato: dopo filtrazione rimangono 17 gr. di sostanza. Questa fu torchiata due volte per 3 minuti con la quantità tripla di acetone. Il residuo fu trattato con la quantità tripla di etere e poi immediatamente filtrato e asciugato, prima all'aria e poi in essiccatore sopra P_2O_5 . Risultano 6,9 gr. di preparato cerebrale. La fosfatasi fu estratta da questo con 500 cc. di acqua ammoniacale ($P_H = 9$).

Questo prodotto, allo stato solido, entro otto giorni, non mostra alcun campo di diffusione: solamente la superficie della soluzione di iodio, immediatamente sotto il prodotto, ha un colore alquanto più chiaro. Come risulta dai dati della Tabella I, il prodotto non contiene maltasi.

TABELLA I.

Saggio della maltasi.

50 cc. di soluzione di maltosio (al 5%), 10 cc. di soluzione tampone di citrato ($P_H = 6.2$) e 10 cc. di estratto cerebrale. Temperatura 30°. Fu determinata la riduzione in 25 cc. (= 1,25 gr. di maltosio).

Durata in ore	Consumati cc. di tiosolfato 1/10 n		
	<i>a</i>	<i>b</i>	media
0	43.7	43.75	43.75
48	43.8	43.80	43.80

Per determinare l'azione fosfatica del prodotto, facemmo agire 200 cc. di soluzione di fosfatasi su 3000 cc. di colla d'amido al 3 %, in presenza di 300 cc. di soluzione tampone di borato 1/10 n ($P_H = 9.2$) per otto giorni alla temperatura di 40°. Il prodotto fu dializzato di fronte ad acqua distillata fino alla scomparsa della reazione del borato e poi elettrodializzato fino a conducibilità elettrica costante. Qui si mostrò la fondamentale differenza fra l'amido nativo e il defosforizzato. Le soluzioni d'amido nativo, elettrodializzate, si separano nei due noti componenti: il sol limpido che praticamente non contiene fosforo e la fase gelatinosa che contiene il componente ricco di fosforo. Una tale separazione non avviene con l'amido defosforizzato: si separano in questo caso soltanto quantità irrilevanti di fiocchi mentre il liquido rimane omogeneo.

Dopo aver allontanato il precipitato, abbiamo evaporato nel vuoto la soluzione e determinato il fosforo secondo EMDEN.

Da gr. 2,9984 di amido defosforizzato si ottengono gr. 0,0159 di molibdato di stricnina, pari a gr. 0,00013 di P_2O_5 , cioè 0,012 %.

Se si considera che l'amido nativo contiene 0,158 % di P_2O_5 si vede che con la defosforizzazione fu eliminato il 93 % dell'acido fosforico che vi era contenuto.

L'amido defosforizzato è una polvere bianca igroscopica che non si scioglie completamente nemmeno in acqua bollente. In una soluzione al 0,1 % nell'osmometro con membrana di collodio, osservammo un innalzamento della colonna liquida di 4 mm. che, considerando la parte dializzabile in rapporto al resto non diffusibile, indica una grandezza media delle particelle $M \sim 19500$.

Sebbene il saggio di WYSMANN abbia mostrato una totale assenza dell'amilasi, osservammo durante la defosforizzazione con la fosfatasi cerebrale, un forte abbassamento della viscosità ed un piccolo aumento del potere riduttore (Tabella II).

TABELLA II.

Viscosità e potere riduttore dell'amido trattato con la fosfatasi cerebrale.

500 cc. di colla d'amido di patate (turbinati a 90°), 66 cc. di soluzione tampone di borato 1/10 N ($P_H = 9,2$) e 50 cc. di soluzione ammoniacale di fosfatasi. Temperatura 40°. La riducibilità fu determinata in 5 cc. contenenti 151 mgr. di amido.

Durata minuti	Attrito relativo t_s/t_c	Riducibilità in cc. di tiosolfato 1/10 N		mgr. di mal- tosio Willstät- ter-Schudel	Per cento T. M.
0	10,7				
5	10,1	0,13	0,10	1,05	0,64
20	9,8				
40	9,1				
ore					
24	5,0	0,20	0,18	3,25	2,05
60	3,3	0,21	0,22	3,77	2,36
93	2,8	0,25	0,30	4,63	2,92
112	2,4				

La diminuzione della viscosità è dunque caratteristica per l'andamento della defosforizzazione. Se abbia qui importanza solamente la perdita della carica elettrica del colloide liofilo e se il mutamento dello stato di aggregazione delle macro-molecole sia collegato con questo cambiamento elettrochimico, è tema di studio separato nel quale esaminiamo la defosforizzazione con agenti chimici.

Vogliamo accennare qui che, ad esempio C. S. HANES parla da una parte dell'amilasi disaggregatrice che dovrebbe agire insieme con la fosfatasi e d'altra parte accenna che potrebbe proprio l'acido fosforico rappresentare un centro di aggregazione in modo che, togliendolo al complesso, ne cadrebbe automaticamente il grado di aggregazione.

Geologia. — *La serie stratigrafica cenozoica tra Pianoro, Loiano e Vado nel Bolognese.* Nota ⁽¹⁾ di ROBERTO SIGNORINI presentata da GIUSEPPE CHECCHIA RISPOLI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

L'area qui presa in esame si estende dalla valle dell'Idice a quella del Setta, a nord della linea Loiano-Monzuno, limite della formazione arenaceo-marnosa di Monghidoro, già descritta in altro mio lavoro ⁽²⁾.

Le precedenti conoscenze sulla geologia di questa zona sono riassunte nella Carta al 100.000 del R. Ufficio Geologico, Fogli di Bologna e Vergato, e relative Note illustrative ad opera del Sacco (1935).

Espongo qui brevemente nuovi dati, risultati dei miei rilievi e osservazioni, su la serie stratigrafica locale e la distribuzione dei suoi vari termini ⁽³⁾.

Procedendo da Pianoro a Monghidoro, o comunque da NE a SO nella zona sopra indicata, si incontrano successivamente i vari termini della serie stratigrafica cenozoica dai più recenti ai più antichi, poichè in quel tratto essi hanno tutti pendenza a NE.

I primi sono i noti terreni pliocenici del vasto lembo di Pianoro, «entrappenninico», disposto a sinclinale molto dolce: da Pianoro a Livergnano va rialzandosi l'ala SO e si alza anche topograficamente, data la resistenza all'erosione della formazione sabbioso-conglomeratica che costituisce l'orizzonte superiore di questi terreni pliocenici. Si alza verso SO dando luogo morfologicamente ad una serie di gradinate di cui l'ultima risalta a cornice, nella cresta a leggio di Livergnano (m. 556) e in quella del monte Adone (m. 655) da cui si allunga verso NO il marcato costone della Rocca (m. 475) e Monte Mario (m. 469), che scende gradatamente alla valle del Setta.

È da porre in rilievo la distinzione, lungo tutto questo bordo meridionale del grande lembo sinclinale di Pianoro, di tre diversi complessi

⁽¹⁾ Pervenuta all'Accademia il 23 agosto 1941-XIX.

⁽²⁾ R. SIGNORINI, *Una vasta zona a strati rovesciati tra l'Idice e il Setta nell'Appennino Bolognese.* « Boll. Soc. Geol. It. », 1938.

⁽³⁾ Ringrazio vivamente la Direzione dell'Azienda Generale Italiana Petroli che ha autorizzato la pubblicazione di questa Nota.

litologici nella pila sedimentaria, corrispondenti a tre fasi del ciclo completo di sedimentazione del mare pliocenico. Infatti a Scasecoli, a Monterumici e su tutto un costone che da Monterumici scende verso NO fin lungo il fianco destro della valle del Setta, affiorano altri conglomerati in linea parallela a quelli sopra citati di Livergnano e Monte Adone. Mentre questi stanno alla sommità della serie e sono accompagnati da prevalenti sabbioni gialli, gli altri, di color rossiccio o aranciato, sono inferiori, anzi nettamente basali e trasgressivi su termini più antichi del Pliocene. Tra i due complessi psefitici si apre una zona argillosa corrispondente al tempo della massima ingressione marina. In confronto al tipico Piacenziano della zona pliocenica più esterna, marginale, queste argille hanno spessore molto ridotto e carattere più grossolano (abbondante sabbiosità; talora anche con ciottoli).

Queste tre zone stratigrafiche, nonostante la variabilità di spessore inerente alla natura dei depositi conglomeratici, hanno una distinzione e una continuità ben maggiore di quanto non appaia dalla Carta geologica del Sacco, che considera le sabbie e ghiaie come lenti inglobate nella formazione argillosa. Dal confronto con la cartina geologica qui unita, si osserva così, tra l'altro, che il tratto pianeggiante a sud di Livergnano, percorso dalla strada nazionale in cresta all'ampia sella a cui si attestano le opposte valli del Rio dei Cani, affluente del torrente Zena, e di quell'affluente del Savena che passa a SO di Livergnano, si trova in corrispondenza della zona argillosa intermedia nella serie pliocenica.

A sud di essa, i conglomerati presso la Fornace di Ca Bertino non hanno a che fare con i conglomerati di Livergnano, ma vanno sotto alla zona argillosa come quelli di Monterumici e Scasecoli: è lo stesso orizzonte basale che poi continua ancora verso est scendendo in fondo al Rio dei Cani e lungo la sponda sinistra di questo ed ergendosi, con maggiore spessore, al di là del Torrente Zena a costituire la sommità del Monte delle Formiche (m. 635). Anche questo appartiene dunque all'orizzonte basale (inclinazione 20-25° a N) e non a quello di Livergnano, da cui è separato dalla, sia pure assottigliata, zona argillosa. L'orizzonte di Ca Bertino è costituito da sabbie con ciottoli e da conglomerati: sedimentazione tutta grossolana, in cui neppure nelle intercalazioni più argillose ho trovato microfauna.

Mentre al bordo settentrionale del grande lembo sinclinale di Pianoro i terreni pliocenici poggiano sopra argille scagliose, qui, al bordo meridionale, tre l'Idice e la Fornace di Ca Bertino, sotto al conglomerato basale si trova una zona di argille grigie di aspetto simile a quelle plioceniche. Ho prelevato campioni di questa argilla scendendo un poco a est della Fornace di Ca Bertino e ne ho dato ad esaminare i microforaminiferi allo specialista dott. E. di Napoli Alliata, il quale ha determinato le seguenti forme:

Textularia abbreviata d'Orb.

* *Spiroplectammina carinata* d'Orb.

Eggerella Bradyi Cushman.

Karrerella Bradyi Cushman

Listerella communis d'Orb.

Sigmoilina celata Costa

Robulus calcar Linneo

Robulus echinatus d'Orb.

Robulus cultratus Montf.

Robulus Clericii Fornasini

Lenticulina gibba d'Orb.

Dentalina elegantissima d'Orb.

Dentalina pauperata d'Orb.

Nodosaria scalaris Batsch.

Saracenaria italica Defr.

Marginulina hirsuta d'Orb.

Marginulina glabra d'Orb.

* *Vaginulinopsis inversa* Costa var. *carinata* Silvestri

* *Lingulina costata* d'Orb.

Vaginulina legumen L. var. *elegans* d'Orb.

* *Vaginulina legumen* L. var. *margaritifera* Batsch.

Uvigerina pigmea d'Orb.

Bulimina striata d'Orb.

Bulimina pyrula d'Orb.

Bulimina ovata d'Orb.

Bulimina aculeata d'Orb.

Bolivina punctata d'Orb.

Nonion umbilicatum Mont.

Discorbis globularis d'Orb.

Gyroidina Soldani d'Orb.

Siphonina reticulata Czjzek var. *planoconvexa* Silvestri

* *Eponides Schreibersii* Czjzek

Eponides tenera Brady

Epistomina elegans d'Orb.

Sphaeroidina bulloides d'Orb.

Globigerinoides helicina d'Orb.

Globigerinoides conglobata Brady

* *Globorotalia Menardii* d'Orb.

Planulina ariminensis d'Orb.

Sebbene la maggior parte di questa fauna sia costituita da forme tuttora viventi, la presenza di alcune forme che abitualmente sono più frequenti nel Miocene (segnate con asterisco) porta a riferire questi campioni,

della parte più alta della zona argillosa, al Miocene superiore o al Tortonianiano alto. Del resto sul terreno si segue con continuità l'affiorare di questa zona argillosa sottostante all'orizzonte conglomeratico inferiore, la quale si estende verso est andando a comprendere, tre il torrente Zena e l'Idice, quei dintorni di Villa di Cassano già noti per la loro fauna tortonianiana (¹), ad *Ancillaria glandiformis* Lk., *Cardita Jouanneti* Bast. var. *laevioplana*, ecc.

Verso SO la zona delle argille tortonianiane passa con continuità di sedimentazione, scendendo la serie stratigrafica data la generale pendenza a NE, a depositi più grossolani, molto sabbiosi: una formazione molassica di colore grigio. Campioni che ho prelevati negli interstrati più marnosi nella parte più alta di questa formazione molassica, presso Barbarolo, presentano una fauna riferibile al Miocene medio. Ecco le forme determinate dal dott. di Napoli:

Spiroplectammina carinata d'Orbigny

Vulvulina pennatula Batsch

Listerella communis d'Orb.

Robulus vortex Fichtel e Moll

Robulus calcar Linn.

Nodosaria consobrina d'Orb.

Dentalina pauperata d'Orb.

Vaginulina legumen Linn.

Marginulina hirsuta d'Orb.

Glandulina laevigata d'Orb.

Nonion pompilioides Fichtel e Moll

Nodogenerina hirsuta d'Orb.

Bulimina pyrula d'Orb.

Bulimina inflata Seguenza

Uvigerina tenuistriata Reuss.

Ellipsoglandulina labiata Schw.

Ellipsonodosaria Verneuilii d'Orb.

Siphonina reticulata Czj.

Sphaeroidina bulloides d'Orb.

Orbulina universa d'Orb.

Globigerina bulloides d'Orb.

Globigerinoides conglobata Brady

Globigerinella aequilateralis Brady

Cibicides praecinctus Karrer

Cibicides ungerianus d'Orb.

Anomalina ammonoides Reuss.

(¹) A. MANZONI, *Il Tortonianiano e i suoi fossili nella provincia di Bologna*, « Boll. R. Com. Geol. It. », 1889; D. SANGIORGI, *Il Tortonianiano dell'alta valle del-*

Non vi è quindi da modificare, per questo orizzonte che si trova alla sommità della formazione molassica, l'attribuzione all'Elveziano, se non per avvicinarlo al Tortoniano. Vi è infatti continuità di sedimentazione, in accordo con quella faunistica, tra la formazione molassica che qui comincia e la formazione argillosa che ho descritto prima e riferita tutta al Tortoniano.

Morfologicamente questa formazione molassica risalta sulla precedente argillosa con i suoi rilievi più vivi. Oltrepassata questa parte stratigraficamente superiore, la formazione molassica grigia diviene ancor più arenacea e resistente, e dà luogo ad una zona di maggiori elevazioni: da Monte Bibele (m. 617) e Ca' di Mezzo (m. 631) a Monte Castellari (m. 709), con direzione nettamente SE-NO e con pendenze sempre a NE.

Segue ancora più a SO, da Sabbioni a Loiano, un'altra zona che finora non è stata distinta dalle precedenti molasse elvezie, ma che ne differisce litologicamente: si tratta di sabbioni bianco-giallicci, male stratificati, senza più interstrati marnosi. Anche nell'insieme del paesaggio questa zona si distingue per il suo tipico colore biancastro. Così i sabbioni di Scanello sono diversi dalle molasse di Monte Bibele e quelli tra Sabbioni e Loiano sono diversi dalle molasse, parimente soprastanti, del Monte Castellari.

A NO di Sabbioni, in corrispondenza della valle che da Anconella scende al Molino di Scascoli, si interpone, tra le molasse del Monte Castellari e i sottostanti sabbioni biancastri, una zona piuttosto argillosa in cui si potrebbe forse vedere il rappresentante del Langhiano, ma non ho prove paleontologiche al riguardo.

Nella zona dei sabbioni biancastri non ho trovato microfauna. Non posso quindi precisarne l'età, limitandomi alla constatazione che stanno sotto a sedimenti del Miocene medio. Nella parte inferiore, presso Loiano come presso Monzuno, vi abbondano ciottoli di ogni dimensione e vi si trovano anche inglobati dei pezzi di un'argilla marnosa indurita: dal lavaggio di campioni di quest'ultima non ho purtroppo rilevato altro che assenza di fossili.

In questi sabbioni presso Loiano si trovano talora sparse tra gli elementi grossolani delle nummuliti molto alterate, che facilmente si disfano in una farina bianca. Le vidi per la prima volta facendo un'escursione con l'ing. Migliorini e fu lui a trovarle per primo. In altra occasione ne ho raccolto un certo numero per studiarle. Si tratta di forme microsferiche della *Nummulites perforata* Montf. aventi per lo più diametri di 12-18 mm. e spessori di 4-8 mm. Sono pure frequenti le corrispondenti forme megasfe-

l'Idice. « Rivista Ital. di Paleontologia », A. II, f. IV^o. 1896: D. SANGIORGI, *Fossili tortoniani dell'alta valle dell'Idice.* « Rivista Ital. di Paleontologia », A. IV, f. III, 1899.

riche di circa 5 mm. di diametro. Vi si trovano inoltre delle *Nummulites Tchihatcheffi* d'Arch. di eguale diametro. Sono dunque forme dell'Eocene medio, evidentemente rimaneggiate. Da quali mai rocce nummulitiche esse sono state ereditate? Non se ne conoscono nella regione.

La linea Quinzano, Loiano, Monzuno, S. Nicolò della Gugliara segna il limite meridionale dei sabbioni bianchi. A SO si stende la formazione di Monghidoro: l'esame di numerosi campioni degli interstrati argillosi, che ho prelevati in differenti località, distanti tra loro, di questa grande placca arenaceo-marnosa che si stende dall'Idice al Setta, non ha dato che assenza di fossili. Soltanto in qualche campione (presso al ponte sul Savena della strada Loiano-Monzuno) si osservano dei foraminiferi agglutinanti, tra cui *Glomospira*. Non oso quindi ancora pronunziarmi sull'età di questa formazione. Si tratta di una formazione che si ritrova in varie altre placche poggianti sulle argille scagliose nel versante emiliano dell'Appennino, e che è particolarmente analoga alla grande placca di Montefiorino nell'Appennino modenese, sia come caratteri litologici, sia come struttura a pacchi di strati in massima parte rovesciati.

La cartina qui unita mette in evidenza che le singole zone sopra indicate delle argille tortoniane, delle molasse grigie elveziane e dei sabbioni biancastri, sono dirette da SE a NO, cioè obliquamente al bordo meridionale dei terreni pliocenici. Le prime due vanno così successivamente a sparire, verso NO, sotto ai conglomerati basali del Pliocene trasgressivo. A Monterumici e poi lungo la sponda destra del Setta, questi poggiano direttamente sopra ai sabbioni bianchicci. Le molasse grigie, distinte e soprastanti ai sabbioni biancastri, ricompaiono più ad ovest, al di là del Setta, nel gruppo del Monte Sole. Nella valle del Setta infatti le formazioni tendono tutte a immergersi verso NO.

Al di sotto dei sabbioni bianco-giallastri ho trovato un interessante affioramento di marne, sulla destra del Setta, a un chilometro a NE di Vado. Sono marne argillose grigio-verdastre il cui aspetto rammenta i terreni marnosi oligocenici di altre località dell'Appennino emiliano. L'esame della microfauna dei campioni raccolti in questo nuovo affioramento presso Vado mi ha accertato il suo riferimento all'Oligocene.

Il dott. di Napoli vi ha determinato le seguenti forme, di cui quelle con asterisco caratterizzano un Oligocene basso:

Bathysiphon sp.

* *Ammobaculites Humboldti* Reuss

* *Glomospira charoides* Jones e Parker

Cyclamina acutidorsata Hantken

* *Nodosaria schlichti* Reuss

Nodosaria acuminata Hantken

Nodosaria soluta Reuss

- Dentalina Buffalorae* Martinotti
* *Virgulina* cfr. *Mustoni* Andreae
· *Pleurostomella brevis* Schwager
* *Pleurostomella rapa* Gümbel
Ellipsonodosarella rotundata d'Orb.
Eponides umbonatus Reuss
Cibicides pigmea Hantken
Cibicides Cushmani Nuttal
Laticarinina pauperata Parker e Jones
* *Anomalina Dorri* var. *aragonensis* Nuttal.

Lungo il bordo NE dell'affioramento, dove tutti gli strati mantengono una generale pendenza verso NE, le marne di quest'orizzonte oligocenico vanno sotto ai sabbioni biancastri in modo regolare. Sul bordo meridionale le marne rimangono pure sottostanti alle bancate di sabbioni, ma queste appaiono alquanto dislocate.

La presenza dell'Oligocene, già nota nel subappennino modenese e reggiano, non può fare meraviglia nell'analogo ambiente bolognese. E non è neppure un fatto isolato: più ad ovest della zona qui considerata, tra il Setta e il Reno (tra Monte Sole e Monte Alcino), come pure più oltre, tra il Reno e il Panaro, si trovano più estesi affioramenti di marne che non sono langhiane, bensì eguali litologicamente e faunisticamente a quelle presso Vado qui descritte, cioè oligoceniche. Esse si trovano alla base dei sabbioni e poggianti sopra alle argille scagliose, oppure comprese in zone di disgiunzione tra pacchi di sabbioni sconnessi.

Vi si trovano anche delle argille varicolori, spesso rosse, con aspetto di « argille scagliose ». Campioni che ho raccolto in un piccolo affioramento di tale argilla rossa, prossimo alla zona qui descritta e precisamente presso Vado, tra Casa Cerrè e S. Mamante, hanno presentato all'esame microscopico, oltre a denti di squalo, una fauna di foraminiferi agglutinanti, tra cui *Glomospira*, *Bathysiphon*, *Trochamminoides*, che ha analogia con quella dell'Oligocene basale del Parmense.

Importanti sono le conseguenze tettoniche della presenza dell'Oligocene nella porzione inferiore dei lembi di sedimenti miocenici nel Bolognese. Accenno l'argomentazione. Questi lembi poggiano indubbiamente sopra alle argille scagliose. Nell'alto Appennino bolognese emerge il substrato delle argille scagliose ⁽¹⁾. Esso risulta costituito da una potente formazione arenacea che è in massima parte riferibile all'Oligocene e giunge molto probabilmente anche al Miocene (fossili di Porretta in macigno identico a

⁽¹⁾ R. SIGNORINI, *Osservazioni geologiche sull'alto Appennino Bolognese*. « Boll. Soc. Geol. It. », 1939.

quello della piega marginale della massa arenacea appenninica; fossili della dorsale appenninica modenese). Le argille scagliose sono indubbiamente e costantemente soprastanti a detta massa arenacea dell'alto Appennino (non si trovano mai argille scagliose nella serie delle arenarie appenniniche nè dei terreni a queste sottostanti), e poichè esse sono costituite da materiale più antico (noti ritrovamenti di fossili vari mesozoici), la loro posizione è dovuta a sovrascorrimento; questo è avvenuto posteriormente all'Oligocene e probabilmente anche al Miocene. (Verso est emerge pure il substrato delle argille scagliose costituito ivi dalla massa marnoso-arenacea miocenica romagnola: quivi ho dimostrato facilmente l'età supramiocenica del sovrascorrimento delle argille scagliose ⁽¹⁾). I terreni oligocenici che si trovano sopra alle argille scagliose del Bolognese non possono essere sedimentati in posto, poichè le argille scagliose non erano ancora ivi giunte nell'Oligocene, e devono essere avanzati con le argille scagliose stesse da una zona più interna, da SO dell'attuale dorsale appenninica.

Si avvalora così l'ipotesi che anche gli uniti terreni miocenici non siano sedimentati in posto, bensì sovrascorsi da una zona più interna: ipotesi che avanza come offrente una spiegazione del fatto della brusca diversità di facies tra le due zone mioceniche affiancate lungo la linea trasversale della valle del Sillaro. La zona a O, a facies molassica del Bolognese, è infatti nettamente di sedimentazione più interna, littoranea, che non la zona a SE, a facies marnoso-arenacea romagnola, di mare aperto.

⁽¹⁾ R. SIGNORINI, *Sulla tettonica dell'Appennino Romagnolo*. « Rendic. R. Accademia d'Italia », f. 8, S. VII, v. I, 1940.

Paleontologia. — *Sulla presenza del genere Hantkenina, Cushman 1924, in Italia.* Nota ⁽¹⁾ di ENRICO DI NAPOLI ALLIATA, presentata dall'Accademico RAMIRO FABIANI.

Il genere *Hantkenina* fu fondato da CUSHMAN (1) nel 1924 su alcuni esemplari rinvenuti negli strati a *Zeuglodon* dell'Eocene superiore dell'Alabama.

Già però, nel 1875 HANTKEN (7) aveva descritto negli strati a *Clavulina Szaboi* dell'Ungheria la *Siderolina Kochi*, che indubbiamente è da considerare come una *Hantkenina*.

I primi rappresentanti del genere cominciano nel Cretaceo, ma presentano dei caratteri tali, specialmente nella forma e distribuzione delle camere e delle spine, da giustificare la formazione del sottogenere *Schackoina* (THALMANN, 1932). Il genere si sviluppa nell'Eocene, con un massimo nell'Eocene medio-superiore e si estingue bruscamente nell'Oligocene inferiore, dove arrivano soltanto pochissime specie.

Come distribuzione geografica le *Hantkenine* sono state ritrovate: in America (Venezuela, Messico, Texas, Alabama, Mississippi) dove sono molto diffuse e permettono una distinzione fra i vari piani dell'Eocene e dell'Oligocene.

Nel Marocco, REY (9) ha recentemente trovato quasi tutte le forme americane, stabilendo una successione nel Rharb, dall'Eocene inferiore all'Oligocene inferiore.

In Europa SHOKHINA (10) nel Caucaso ha rinvenuto pure molte forme. Nell'Europa centro-meridionale il genere *Hantkenina* è quasi mancante; si ritrova infatti la sola *Hantkenina Kochi* negli strati a *Clavulina Szaboi* dell'Eocene dell'Ungheria, nell'Eocene medio di Zara, della penisola Zaratina, della Dalmazia e Nord Dalmazia e nell'Nizzardo.

Notizie più precise sulla distribuzione del genere *Hantkenina* si trovano nel lavoro di THALMANN (11) su tale genere.

In Italia, a parte una citazione di HANTKEN (8) dell'*Hantkenina Kochi* nell'Eocene degli Euganei, non mi risulta siano state mai ritrovate

(1) Pervenuta all'Accademia il 25 luglio 1941-XIX.

altre *Hantkenina*. Ritengo pertanto utile dare notizie del ritrovamento delle seguenti forme, nell'Eocene inferiore di Teolo (Colli Euganei, Padova) e nell'Eocene superiore di Gioitto (Enna) e di Bronte (Catania) ⁽¹⁾.

HANTKENINA DUMBLEI Weinzierl & Applin (fig. 1).

1929. «Journ. Pal.», vol. III, n. 4, pag. 402, tav. 43, fig. 5 *a*, *b*.

1937. *Hantkenina Dumblei* WEINZ. & APPLIN, «Pubbl. Lab. Moskow Univer.»; Probl. of Pal., vol. II-III, pag. 437, tav. II, fig. 12, 13.

1938. *Hantkenina Dumblei* WEINZ. & APPLIN, Rey M., «Bull. Soc. Géol. France», ser. V, vol. VIII, pag. 324, tav. XXII, fig. 10, 12.

Numerosi esemplari ritrovati in marne dell'Eocene inferiore gentilmente datemi in esame dall'ing. R. SIGNORINI. Tali marne sono state raccolte a Teolo sotto la Chiesa. Detta località è stata considerata dal prof. R. FABIANI (6), che ha studiato la zona, come appartenente all'Eocene inferiore. Nel campione in esame, ho rinvenuto pure varie *Nummulites bolcensis*.



Fig. 1. - *Hantkenina Dumblei* WEINZIERL & APPLIN (x 40, Teolo, Eoc. inf.).

Gli esemplari sono abbastanza numerosi, ma quasi tutti con le spine rotte; presentano tuttavia i caratteri sufficienti per permetterne la determinazione e corrispondenti alla descrizione fattane dagli autori e da REY (9). La forma generale è infatti ellittica, le camere sono piatte e crescenti rapidamente in altezza e addossate le une alle altre, senza nessuna tendenza ad essere separate, come in molte altre specie. Le ultime camere sono molto alte. La periferia è appena lobata, le suture, leggermente depresse, hanno un andamento rettilineo, che si incurva appena verso il centro. Questo carattere la differenzia dalla *Hantkenina Liebusi* Shokhina, che presenta invece le suture fortemente incurvate, fino a divenire sigmoidi. Le spine sono rotte, però si distingue abbastanza bene l'attacco, che è posto sull'angolo anteriore delle logge.

Distribuzione. - Questa specie è stata riscontrata in America nell'Eocene medio (Yegua-Formation, Coastal Domes e nel Texas).

Nel Marocco (Rharb) REY (9) l'ha ritrovata nel Bartoniano superiore, nel Bartoniano e alla base dell'Oligocene.

Il ritrovamento nell'Eocene inferiore del Veneto, viene quindi ad abbassarne il limite stratigrafico.

(1) Colgo l'occasione per ringraziare vivamente i dirigenti dell'A. G. I. P. che molto graziosamente mi hanno permesso la pubblicazione della presente Nota.

HANTKENINA ALABAMENSIS Cushman (fig. 2, 3, 4).

1924. « Proc. U. S. Nat. Mus. », vol. 66, pag. 3, tav. I, fig. 1, 6, tav. II, fig. 5.
1925. *Hantkenina alabamensis* Cushman. « Contr. Cushman lab. Foramin. Res. », vol. I, pt. I, pag. 7, tav. I, fig. 2.
1926. *Hantkenina alabamensis* Cushman. « Bull. Am. Ass. Petr. Geol. », vol. X, n. 2, pag. 177, tav. X, fig. 3.
1932. *Hantkenina alabamensis* Cushman. « Louisiana Geol. Bull. », II, pag. 54, tav. X, fig. 3.
1933. *Hantkenina alabamensis* Cushman. « Bull. Amer. Ass. Petr. Geol. », vol. XVII, n. 11, pag. 6, fig. 5.
1935. *Hantkenina alabamensis* Cushman. « Upper Eocene Foramin. of the South Eastern U. S. ». — « U. S. Geol. Survey », Prof. Pap. 181.
1937. *Hantkenina alabamensis* Cushman, Shokhina. « Pubbl. Lab. Pal. Moskow University ». Probl. of Pal., vol. II-III, pag. 434, tav. I, fig. 3-7.
1938. *Hantkenina alabamensis* Cushman, Rey M. « Bull. Soc. Géol. France », ser. V, vol. VIII, pag. 324, tav. XXII, fig. 13, 15, 17.

Gli esemplari provengono da campioni di argille scure scagliettate della regione di Gioitto (Enna) e Bronte (Catania).



Fig. 2. — *Hantkenina alabamensis* CUSHMAN (x 40, Gioitto, Eoc. sup.).



Fig. 3. — *Hantkenina alabamensis* CUSHMAN (x 40, Bronte, Eoc. sup.).

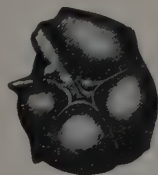


Fig. 4. — *Hantkenina alabamensis* CUSHMAN (x 40, Bronte, Eoc. sup.).

I campioni di Gioitto sono, in base alla posizione stratigrafica e a dati paleontologici, riferibili all'Eocene superiore. L'età delle argille di Bronte, compresa fra l'Eocene medio e l'Eocene superiore, non è stata però stratigraficamente ancora ben definita. Nelle due località sono stati rinvenuti soltanto pochi esemplari.

I primi due esemplari (fig. 2, 3) corrispondono abbastanza alla descrizione ed alle figure di CUSHMAN. Le camere sono appiattite, la periferia appena lobata e le suture non molto depresse e rette. Si vede chiaramente l'attacco delle spine, disposto nell'angolo anteriore della loggia, vicinissimo alla sutura; malgrado rotte, le spine sembra siano dirette radialmente.

L'esemplare della fig. 4 è alquanto differente. La forma è nettamente circolare, le ultime spine mostrano un accenno ad una disposizione tangenziale; le camere sono piuttosto globose e le suture depresse. Per questi caratteri si avvicina molto alla *Hantkenina inflata* Howe, dalla quale però differisce, perchè le camere non sono così marcatamente globose e perchè la periferia è leggermente lobata, anzichè marcatamente lobata.

Tale esemplare però è da considerare come un termine di passaggio fra le due specie, analogamente a quanto aveva osservato e figurato REY (9) nel Rharb (Marocco).

Distribuzione. — Questa specie è molto diffusa in America nell'Eocene superiore del Messico, dell'Alabama, del Texas e del Mississippi e nell'Oligocene inferiore del Mississippi. Nel Marocco nell'Eocene superiore e Oligocene inferiore del Rharb, nel Caucaso nell'Eocene superiore.

La *Hantkenina alabamensis* e specialmente la *Hantkenina inflata* sono considerate come le specie più giovani finora conosciute.

BIBLIOGRAFIA

- (1) CUSHMAN J. A., *A new Genus of Eocene Foraminifera*. «Proceedings of the U. S. Nat. Museum», vol. LXVI, Art. 30, pagg. 1-4, tav. I-II. Washington, 1924.
- (2) CUSHMAN J. A. & APPLIN E. R., *Texas Jackson Foraminifera*. «Bulletin of the American Association of Petroleum Geologist», vol. X, n. 2, pagg. 154-189, tav. VI-X. Chicago, 1926.
- (3) CUSHMAN, J. A., *Foraminifera their Classification and Economic Use*. «Cushman Laboratory for Foraminiferal Research special publication», n. 4. Sharon, 1933.
- (4) CUSHMAN J. A., *An illustrated key to the genera of the Foraminifera*. «Cushman Laboratory for Foraminiferal Research special publication», n. 5. Sharon, 1933.
- (5) CUSHMAN J. A., *Upper Eocene Foraminifera of the Southeastern United States*. «Department of interior United States Geological Survey Professional Paper», 181, 1935.
- (6) FABIANI R., *Il Paleogene veneto*. «Memorie Ist. Geol. di Padova», vol. II. Padova, 1913.
- (7) HANTKEN (VON) MAX, *Die Fauna der Clavulina Szaboi Schichten*. «Mitt. aus dem Jahrb. d. kgl. Ungar. Geol. Anstalt», Band. IV, Heft 1, tav. I-XVI. Budapest, 1875.
- (8) HANTKEN (VON) MAX, *Die Clavulina Schichten in Euganeen*. «Mathem. und Naturwiss. Berichten aus Ungarn», Bd. II, pp. 121-169, tav. I-IV. Budapest, 1884.
- (9) REY M., *Distribution stratigraphique des Hantkenina dans le nummulitique du Prérif (Maroc)*. «Bulletin de la Société Géologique de France», vol. VIII, fasc. 5-6, tav. XXII, pag. 321. Paris, 1938.
- (10) SHOKHINA, «Publ. Lab. Moskow University; Problem of Paleontology», vol. II-III. Moscow, 1937.
- (11) THALMANN HANS E., *Die Foraminiferen Gattung Hantkenina Cushman 1924 und ihre regional stratigraphische Verbreitung*. «Eglogae geologicae Helveticae», vol. XXV, n. 2, pag. 287. Basel, 1932.
- (12) WEINZIERL L. & APPLIN E. R., *The Claiborne formations on the Coastal Domes*. «Journ. of. Paleont.», vol. III, n. 4, pagg. 384-410, tav. XLII-XLIV, 1929.

Mineralogia. — *Ricerche roentgenografiche sulla dawsonite. Primi risultati sperimentali* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di CARLO LAURO, presentata dall'Ecc. FEDERICO MILLOSEVICH.

Lo studio roentgenografico della dawsonite ($\text{Al}_2\text{O}_3 \cdot \text{Na}_2\text{O} \cdot 2\text{CO}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$) mi è stato suggerito dall'Ecc. Federico MILLOSEVICH che mi ha anche offerto a tale scopo un campione di questo minerale proveniente dal giacimento di Komana in Albania.

Come è noto è questo un minerale abbastanza raro, tanto che, sino ad oggi, la sua presenza è stata segnalata solamente in quattro località del mondo. Oltre che in Albania dal PELLOUX (1924-32), la dawsonite è stata infatti sino ad ora rinvenuta solamente nel Canada (Mac Gill College-Montreal) da B. J. HARRINGTON (1874), in Toscana (Monte Amiata) da M. C. FRIEDEL e M. M. CHAPER (1881) ed in Algeria (Ténès-Orano) da CURIE e FLAMAND (1889).

È quindi una specie minerale scoperta da lunga data, anche se poco frequente, ed è forse per questo, ma sopra tutto certo per l'abito costante che essa specie presenta, che le nostre conoscenze su di essa non sono del tutto complete e sicure.

Ciò vale in particolare per le sue proprietà morfologiche, le sole notizie in proposito essendo, per quel che mi consta, quelle dateci dal GRAHAM ⁽³⁾ a conclusione delle sue ricerche sul materiale del Canada che gli permisero di classificare il minerale nel sistema rombico e di darne anche le costanti cristallografiche.

Meglio conosciute paiono le sue proprietà fisiche e quelle ottiche in particolare, dovute ancora al GRAHAM, confermate da altri studiosi e che sono forse le sole determinate in modo certo.

Per quanto riguarda infine le proprietà chimiche, risale appena al 1938 l'attento studio fattone da E. BADER ⁽⁴⁾ che, riallacciandosi alle

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia e Petrografia della R. Università di Cagliari.

⁽²⁾ Pervenuta all'Accademia il 9 luglio 1941-XIX.

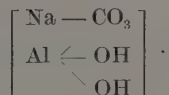
⁽³⁾ R. P. D. GRAHAM, *Ueber den Dawsonit, ein Natrium Thonerdecarbonat*. « Zeitschrift für Kristallographie », 1910, 48, pag. 683.

⁽⁴⁾ E. BADER, *Ueber die Bildung und Konstitution des Dawsonits und seine synthetische Darstellung*. « N. Jahrbuch f. Mineralogie », 1938, 74, pag. 449.

ricerche fatte da numerosi studiosi sino ad allora, in base ai risultati delle sue esperienze e per confronto con le caratteristiche dello stesso composto preparato sinteticamente, ha portato un notevole contributo a questo proposito.

Il BADER infatti, oltre che eseguire con particolare cura una nuova determinazione del peso specifico di questo minerale ed averne discusso la più probabile genesi, appunta in particolare modo l'attenzione sulle sue proprietà chimiche e sulla sua costituzione.

Egli pertanto, in base alle sue ricerche, conclude confermando che la dawsonite deve essere considerata un sale basico ed indicandone quale formula di costituzione:



Anche da questo punto di vista sarebbe pertanto assai interessante un completo studio roentgenografico e strutturale della dawsonite; studio che per altro ho appena iniziato e presentemente ho dovuto interrompere per cause di forza maggiore.

In attesa di poter riprendere le ricerche sperimentali, il che spero poter fare presto, credo utile intanto dar notizia in questa Nota dei primi risultati ottenuti.

La natura del materiale rende assai laboriose e delicate anche le ricerche roentgenografiche. Le dimensioni dei cristallini che si riescono ad isolare dai ciuffi di aghetti raggiati od a rosetta, abito costante della dawsonite, se raggiungono alcuni decimi di millimetro per l'allungamento secondo z non superano alcune decine di centesimi di millimetro per lo spessore. Se è pertanto facile il centramento dei cristallini stessi secondo l'allungamento, esso diventa problematico per le altre direzioni.

I Polanyi e naturalmente ancora di più i Weissenberg che sino ad ora ho potuto ottenere (per rotazione [001]) riescono poi debolissimi, anche dopo una esposizione di circa una ventina di ore e presentano un numero molto esiguo di macchie di diffrazione; appena 4 il Weissenberg, strato 1 [001]; alcune di più, ma un poco irregolari, quello dello strato 2 [001].

Per tutte queste caratteristiche, i Weissenberg degli strati $n = 0$, tanto più che si tratta di fotogrammi ad incidenza normale, rendono un poco incerta la loro interpretazione ai fini del controllo della simmetria del minerale.

Comunque, pur con qualche riserva, stando a quanto risulta dai fotogrammi attualmente in mio possesso, che paiono confermare la simmetria rombica della dawsonite, a mezzo del Polanyi [001] e del Weissenberg

dello strato equatoriale [001], la cui interpretazione riesce sicura, ho ottenuto per la misura delle costanti reticolari i valori riportati nelle tabelline seguenti (¹).

Polanyi [001].

strato spettrale	2 e in mm.	lg. tang μ	log sen μ	T	media
1	20,2	9,45870	9,44144	5,57	5,565 = c_0
2	46,7	9,82267	9,74322	5,56	

Weissemberg strato 0 [001]

2 ξ	lg θ	lg sen θ	d_{hkl}	hkl	T	media
42,4	1,23781	9,47306	2,589	040	10,36	10,34 = b_0
65,2	1,42469	9,65089	1,719	060	10,32	
89,7	1,56323	9,77521	1,292	080	10,33	
32,4	1,12099	9,35908	3,367	200	6,73	6,72 = a_0
67,0	1,43651	9,66178	1,677	400	6,71	
106,5	1,63779	9,83725	1,119	600	6,72	

Per cui le costanti reticolari della dawsonite sono:

$$a_0 = 6,72 \text{ \AA} \quad b_0 = 10,34 \text{ \AA} \quad c_0 = 5,565 \text{ \AA}$$

Il rapporto assiale che da queste si ricava

$$a_0 : b_0 : c_0 = 0,650 : 1 : 0,538$$

risulta in buono accordo con quello determinato per via cristallografica dal GRAHAM:

$$a : b : c = 0,6475 : 1 : 0,5339$$

Con i valori per le costanti reticolari sopra riportati si calcola per il volume della cella elementare $V_0 = 386,5$.

Con questo valore, con quello per il peso specifico misurato dal BADER (p. sp. = 2,44) e con il valore per il peso molecolare calcolato in base alla formula $\text{Al}_2\text{O}_3 \cdot \text{Na}_2\text{O} \cdot 2\text{CO}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ (p. m. = 287,9) si ottiene per il numero delle molecole contenute nella cella elementare $n = 1,99 \sim 2$.

(¹) Anticatódo Cu. Diametro della camera mm. 70.25.

Ciò risulta anche più chiaramente dalle tabelline seguenti in cui, alla colonna 1 sono riportate le % teoriche calcolate per la dawsonite in base alla formula di cui sopra; alla 2 le % analitiche ottenute dal PELLOUX ⁽¹⁾ per il materiale di Komana ed alla colonna 3 le stesse percentuali riportate a 100. Alla colonna 6 è riportato il numero di atomi di ciascun elemento che compare nella cella elementare, calcolato partendo dal valore per la densità e da quello M_0 del peso molecolare della cella stessa ricavato dalla $M_0 = \frac{V_0 d}{A}$ ⁽²⁾.

	1	2	3	4		5	6	7
Al ₂ O ₃	35,42	34,90	34,94	0,3428				
Na ₂ O	21,53	21,98	22,01	0,3550				
CO ₂	30,55	30,30	30,34	0,6896 = 2 × 0,3448				
H ₂ O	12,50	12,70	12,71	0,7055 = 2 × 0,3527				
Al						0,6856	3,92	4
Na						0,7101	4,06	4
C						0,6896	3,95	4
H						1,4110	8,09	8
O						3,4681	19,90	20

Per cui appunto si ricava per la formula corrispondente alla cella elementare 2 [Al₂O₃ Na₂O 2CO₂ 2H₂O].

Per quanto riguarda la determinazione del gruppo spaziale, rilevo anzi tutto che nei Weissenberg degli strati 0, 1 e 2 [001] risultano presenti le macchie di riflessione che corrispondono ad indici del tipo (dove p e d significano rispettivamente pari e dispari):

pOO , OpO , ddO , ppO , Odd , Opp , pOp , ddp , pdd , dpd , ppp .

Dall'esame della statistica di questi indici si deduce che il reticolo di traslazione della dawsonite è quello a maglia centrata I (Γ''). Le riflessioni hkl compaiono infatti solamente quando $h + k + l = 2n$ e ciò spiega, almeno in parte, il piccolo numero di riflessioni che in alcuni dei fotogrammi compaiono.

Risulta inoltre ancora, in modo certo, che le riflessioni hkO e Okl sono presenti solo quando siano rispettivamente $h + k = 2n$ e $k + l = 2n$.

⁽¹⁾ A. PELLOUX, *Contributi alla mineralogia Albanese*. Nota II, «Periodico di Mineralogia», 1932, III, pag. 69.

⁽²⁾ V_0 = volume nella elementare; d = densità; A = reciproco del numero di Avogadro.

Tenendo allora presente le sei possibili orientazioni della cella, i gruppi spaziali che soddisfano a queste condizioni e riescono possibili per la dawsonite sono (1):

$$C_{2v}^{20} - C_{2v}^{22}, \text{ Ima e I2am} - D_2^8 - D_2^9 - D_{2h}^{25} - D_{2h}^{28}, \text{ Ibmm e Imam.}$$

Questi sei possibili gruppi si riducono ulteriormente ai due seguenti

$$C_{2v}^{22}, \text{ Ima e I2am} - D_{2h}^{28}, \text{ Ibmm e Imam}$$

se si considera che nel Weisseberg dello strato 1 non compare alcuna riflessione ad indice del tipo hOl ed in quello dello strato 2 compaiono riflessioni di questo tipo solamente quando sia (oltre che $l = 2n$) anche $h = 2n$.

Pertanto, allo stato attuale delle ricerche ed accettando la simmetria bipiramidale determinata dal GRAHAM cristallograficamente, il gruppo spaziale più probabile per la dawsonite risulta quello D_{2h}^{28} . Dai Weisseberg risultano infatti, per le riflessioni di questo minerale, le seguenti caratteristiche di presenza: hkl , con $h + k + l = 2n$; hko , con $h + k = 2n$; Okh , con $k + l = 2n$ e hOl , con $h = 2n$ ed $l = 2n$.

(1) Vedi *International Tabellen*.

Biologia. — *Sul metabolismo dei pigmenti carotenoidi nel bruco di cavolaia «Pieris brassicae» e nel suo endoparassita «Microgaster conglomeratus»* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di CARMELA MANUNTA, presentata dall'Accademico FILIPPO BOTTAZZI.

I risultati interessanti da me conseguiti in tutta una serie di indagini chimico-biologiche e fisiologico-comparate su *Bombyx mori* mi hanno indotto a condurre in questa stagione un allevamento di bruchi di cavolaia e del suo endoparassita il *Microgaster conglomeratus*, onde chiarire il metabolismo dei pigmenti.

Questo studio offre un certo interesse specialmente se messo in relazione con quanto avviene nel filugello. Si può dire che la *Pieris brassicae* si comporti come una razza di bachi da seta a sangue giallo ed a bozzolo bianco, razza cioè che possiede permeabilità intestinale ed impermeabilità ghiandolare ai carotenoidi: infatti mentre il suo endoparassita assorbe i pigmenti dal sangue e dai tessuti dell'ospite e lo trasferisce nelle sue ghiandole serigene e quindi nel bozzolino (giallo pallido) la cavolaia invece presenta impermeabilità ghiandolare, poichè bianca, anzi candida è la pochissima seta che il baco tesse sulla foglia ed i tenui fili serici con i quali si lega a maturità completa.

Si sa che i bruchi di *Pieris* si presentano di colore variabile dal verde azzurrastrato al verde grigiastro punteggiati di nero e con tre strisce longitudinali di un giallo più o meno intenso a seconda degli individui; la crisalide appena formata è verde intenso ma va diventando di color verde sempre più grigiastro fino a grigio punteggiato di nero, man mano che si avvicina allo starfallamento.

POULTON (1893) riteneva che la pigmentazione verdastra dei bruchi dipendesse dalla clorofilla, PALMER (1922) da un precursore della clorofilla. JUCCER pensò (1932) che il colore verde dei bruchi di *Pieris* potesse esser dovuto a sostanze di natura flavonica; MANUNTA (1935) non riuscì però a svelare tracce di clorofilla o di suoi derivati e neanche di flavoni

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Biologia e Zoologia generale della R. Università di Sassari.

⁽²⁾ Pervenuta all'Accademia il 19 luglio 1941-XIX.

sia nel sangue che nella pelle: trovò invece pigmenti carotenoidi soltanto (oltre i pigmenti melanici) costituiti da un miscuglio di carotene e di xantofille ⁽¹⁾.

Ho estratto i pigmenti carotenoidi dalla pelle, dal sangue, dagli intestini nei vari stadi (a massimo crescimento ed a maturità) ed anche dalle crisalidi e dalle farfalle e li ho dosati come carotene (non avendo creduto opportuno eseguire la separazione in carotene e xantofille data la scarsa quantità).

I dati sono riportati nella tabellina seguente.

Stadio	Quantità di Carotenoidi (espressa in mgr. di carotene)					
	nella emolinfa da 100 bruchi	in 100 cc. di emo- linfa	in 100 pelli di bruco	in 100 intestini di bruco	in 100 crisalidi	in 100 farfalle
Massimo cresci- mento	(4 cc.) 0,0376	0,94	0,4935	tracce non ap- prezzabili	0,7005	0,6000
Maturi	(3,5 cc.) 0,03567	1,02	0,4300	0,04935		

Dal complesso dei dati risulta che i pigmenti man mano che vengono assorbiti con gli alimenti passano traverso la mucosa intestinale nel sangue donde vanno accumulandosi nell'ipoderma sino a massimo crescimento. Nello stadio di maturazione invece una certa quantità di pigmento si accumula nell'intestino, proprio come avviene per certe razze di bachi da seta a sangue bianco ed a bozzolo bianco, quali il Bagdad ed il 13 V

(¹) È molto probabile che il colore verde azzurrastro nei bruchi di cavolaia sia dovuto alla presenza di una proteina rameica che si comporta come una polifenolossidasi. Ho infatti potuto osservare nella preparazione del materiale per studiare il comportamento all'analisi cromatografica e la distribuzione dei carotenoidi, che mettendo in acqua distillata le pelli dei maturi per allontanare eventuali tracce di foglia o di escrementi, l'acqua dopo rimozione delle pelli ed anche dopo filtrazione (per privarla da tracce di tessuti) si va colorando in verde azzurro che tosto si incupisce in azzurro, sempre più intenso fino a bleu, poi passa a nero; dopo pochi giorni (avevo aggiunto qualche cristallo di timolo per impedire la putrefazione) si ottiene un precipitato nero intenso. Pare quindi che si tratti realmente di una polifenolossidasi solubile in acqua e che il processo melanico si sia compiuto *in vitro* forse perchè anche tracce di aminoacidi come la tirosina sono passati in soluzione durante la permanenza delle pelli in acqua. Certo sarebbe interessante poter isolare questo fermento.

ed in altre a sangue giallo ed a bozzolo bianco (anche però, sebbene in minor quantità, in razze a sangue giallo ed a bozzolo giallo come il Maiella e 13 K).

La migrazione dei pigmenti nella pelle è dunque precoce arrestandosi a maturità mentre l'accumulo nell'intestino è tardivo.

La quantità di pigmento presente nel sangue si mantiene presso a poco costante (la concentrazione sale un po' data la disidratazione che accompagna il processo di maturazione) e così anche la quantità di pigmento presente complessivamente nel corpo. Il fatto che la piccola quantità che si fissa nell'intestino corrisponde presso a poco a quella che si trova in meno nella pelle, potrebbe far supporre che avvenga una ridissoluzione del pigmento dai tegumenti nel sangue. Il fatto che nello stadio di crisalide il contenuto in carotenoidi è maggiore che nello stadio adulto può far pensare ad una trasformazione dell' α carotene in vitamina A. Certo che una parte dei pigmenti migra dai tessuti materni nelle uova che presentano, appena deposte, un color giallo intenso.

I vari estratti di pigmenti riuniti, concentrati, saponificati in corrente di gas inerte sono stati portati all'analisi cromatografica su colonna di Ca CO_3 . Si ottengono due zone nettamente distinte una superiore giallo limone ed una inferiore gialla che si dilava rapidamente con benzina. Il filtrato assorbito su idrossido di Ca forma un anello giallo che si dilava con benzina p. e. 70-80°; esso all'analisi spettroscopica dà due bande di assorbimento a μ . 478 e a μ . 448; all'analisi di separazione tutto il pigmento resta nella fase benzenica. Evidentemente si tratta di α carotene. La zona superiore dopo diluizione con benzina 70-80 e 10 % di alcool metilico si trasferisce nella fase metanolica; la soluzione benzenica alla analisi spettroscopica mostra due bande di assorbimento a 471,5 μ . e a 443; non dà alcuna colorazione azzurra dopo trattamento con acido cloridrico al 25 %: si tratta, secondo ogni probabilità di taraxantina. Dunque i pigmenti carotenoidi della *Pieris brassicae* risultano di un miscuglio di α carotene e di taraxantina.

Quanto al *Microgaster conglomeratus*, di cui le larve assorbono dal sangue dell'ospite i pigmenti e li accumulano nelle ghiandole della seta (hanno color giallo intenso) donde passano poi nel bozzolo (giallo pallido) proprio come in una razza di *Bombyx mori* a bozzolo giallo.

Ho potuto ottenere grammi 2 di bozzolini.

Il contenuto in carotenoidi è di gr. 0,0352 per un grammo di seta (quantità abbastanza rilevante poichè è pressochè uguale a quella contenuta in cc. 1 di emolinfa ricavata da 100 bruchi (0,037). All'analisi cromatografica, di separazione, e spettroscopica i pigmenti del bozzolo si presentano identici a quelli del sangue e della pelle dei bruchi: constano cioè di un miscuglio di α carotene e di taraxantina.

Biologia. — *Sul comportamento di alcune reazioni delle perossidasi nello sviluppo embrionale di « Petromyzon fluviatilis » e di « Bufo viridis »* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di MILENA PITOTTI, presentata dall'Accademico FILIPPO SILVESTRI.

Lo studio di molte sostanze (enzimi, vitamine, ecc.) nello sviluppo embrionale è stato, soprattutto negli ultimi anni, oggetto di molte ricerche tendenti essenzialmente a scoprire legami tra le loro localizzazioni nel germe e metabolismo embrionale. Ricordo a tal proposito i lavori di HERLITZKA, VOSS, BRUNELLI, SPIRITO, RIES, GERSCH, RANZI, FALKENHEIM, REVERBERI, PITOTTI, ecc.

Tra le sostanze prese in esame, in quanto considerate come facenti parte del metabolismo respiratorio, sono da ricordare innanzi tutto le perossidasi, anche perchè il metodo usato per metterle in evidenza, basato su una reazione colorata, ne facilita lo studio ai fini delle ricerche in questione.

Senza volermi addentrare nei problemi relativi al chimismo di questi composti, accennerò soltanto che nelle concezioni attuali essi vengono considerati come enzimi agenti sui perossidi, con liberazione, da questi, di ossigeno atomico e perciò attivo. Le reazioni usate per metterle in evidenza si basano appunto su questa proprietà e si attuano aggiungendo al materiale in esame, un perossido (H_2O_2) e una soluzione di benzidina (o di altri reattivi equivalenti): dove sono presenti perossidasi, la benzidina si trasforma in un composto fortemente colorato in blu.

Se la reazione usata per lo studio delle perossidasi può essere così riassunta, tuttavia le modalità con cui i reattivi vengono adoperati sono molteplici; e poichè a volte i risultati ottenuti possono differire notevolmente tra loro, ho voluto studiare sperimentalmente la questione per poter valutare il significato di reperti diversi.

La reazione delle perossidasi col metodo della benzidina, come ho già detto, si può far avvenire in più modi, ma di due di essi desidero trattare. Uno è quello della benzidina alcolica; l'altro è quello della benzidina acquosa. Il primo è stato usato da SPIRITO (1934-38) nello sviluppo di

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Biologia e Zoologia generale della Regia Università di Perugia.

⁽²⁾ Pervenuta all'Accademia il 31 agosto 1941-XIX.

Invertebrati e Vertebrati, tra i quali i Petromizonti; del secondo, da me adoperato precedentemente (1939-1940) su vari materiali, riferirò in questo lavoro a proposito dei Petromizonti, per i quali ho potuto rilevare risultati differenti da quelli che si hanno con l'impiego della benzidina alcolica.

Riassumo qui brevemente le modalità seguite in entrambi i metodi adoperati. La reazione con la benzidina alcolica ⁽¹⁾ si svolge fissando innanzi tutto le uova o gli embrioni con alcole assoluto. Successivamente, dopo breve tempo, si aggiungono 15 gocce di una soluzione fresca di benzidina al 2 % in alcole a 90°, 3 gocce di H₂O₂ a 12 volumi e 1 goccia di acido acetico.

La reazione con la benzidina acquosa si inizia fissando le uova o gli embrioni per 2' in alcole assoluto: si toglie poi quest'ultimo e si aggiunge un po' di soluzione satura di benzidina in acqua acidificata con acido acetico: dopo qualche minuto si toglie la benzidina e si aggiungono 10 gocce di H₂O₂ a 12 volumi. Con entrambi i metodi, in presenza di perossidasi, si ottiene una bella colorazione blu.

Inizio l'esposizione dei risultati da me ottenuti, con quelli rilevati nello sviluppo embrionale di *Petromyzon fluviatilis*, mettendoli a lato di quelli ottenuti precedentemente da SPIRITO ⁽²⁾ sullo stesso materiale, per facilitarne il confronto nei vari stadi considerati.

Risultati ottenuti da SPIRITO su <i>Petromyzon fluviatilis</i> con l'impiego della benzidina alcolica (v. sopra).	Risultati da me ottenuti su <i>Petromyzon fluviatilis</i> con l'impiego della benzidina acquosa (v. sopra).
Uova vergini	
Reazione intensa in tutta la massa dell'uovo.	Reazione intensa in tutta la massa dell'uovo.
Uova fecondate	
Reazione intensa in tutta la massa dell'uovo.	Reazione intensa in tutta la massa dell'uovo; leggermente più intensa intorno al micropilo.
Blastula	
Reazione intensa in tutta la blastula.	Reazione in tutta la blastula; più intensa nei macromeri.

⁽¹⁾ A. SPIRITO, « Arch. Sc. Biol. », 20, 1934.

⁽²⁾ A. SPIRITO, « Arch. Sc. Biol. », 20, 1934; « Riv. Biol. », 19, 1935.

Inizio gastrulazione

Reazione intensa in tutta la gastrula.	Reazione in tutta la gastrula; più intensa nei macromeri e nel labbro del blastoporo.
--	---

Gastrula a termine

Neurula

Reazione intensa in tutta la gastrula e in tutta la neurula.	Reazione in tutta la gastrula e in tutta la neurula, con minore intensità nei macromeri (inversione rispetto agli stadi precedenti).
--	--

Sollevamento della testa sulla massa vitellina ventrale

Reazione intensa in tutto l'embrione, ma leggermente più debole nelle parti embrionali propriamente dette.	Reazione in tutto l'embrione; sempre meno intensa nella massa vitellina ventrale.
--	---

Stadi successivi

Permane la intensa reazione nella massa vitellina ventrale in riassorbimento. Le parti embrionali propriamente dette danno una reazione sempre più debole.	Reazione in tutte le parti embrionali propriamente dette. Assenza di reazione nella massa vitellina ventrale (tranne alcune macchie corrispondenti alle isole del sangue e poi, a circolazione iniziata, nei vasi di questa regione).
--	---

Dal confronto tra i risultati suesposti si rileva chiara e netta la differenza di comportamento con l'impiego dei due metodi diversi. Pertanto per cercare di chiarire le ragioni di queste diversità sono state fatte varie esperienze le quali rientrano in un ampio piano di ricerche che si va svolgendo nell'Istituto a proposito della natura e della reale funzione di queste sostanze nelle cellule viventi. Mi limiterò intanto ad accennare che, tra le ipotesi prospettate nell'intento di spiegare la differenza di comportamento rilevata con l'impiego dei due metodi, per prima vi è stata quella che contemplava la possibilità di una diversa penetrabilità dei due reattivi negli esemplari di *Petromyzon fluviatilis* e che la benzidina acquosa non desse la reazione blu nella massa vitellina ventrale (negli stadi successivi alla neurulazione) per mancata penetrazione di essa ⁽¹⁾. Pertanto in soste-

⁽¹⁾ Il fatto che lo stesso vitello, negli stadi precedenti a quelli di neurula, si presentasse colorato con la reazione della benzidina, non toglie alcun valore all'ipotesi prospettata in quanto la mancata penetrazione del reattivo acquoso negli

tuzione del fissativo, da impiegarsi prima dell'aggiunta della benzidina acquosa, ho usato per gli embrioni una miscela 3:1 di alcoole-cloriformio ⁽¹⁾ allo scopo di vedere se il materiale così trattato desse risultati diversi da quando trattato col solo alcoole: realmente ho trovato che con tale fissativo la reazione avviene anche nella zona ventrale, come con la benzidina alcolica.

Altre prove sono state fatte col calore. Gli embrioni di *Petromyzon fluviatilis*, posti in acqua di fonte e tenuti per pochi minuti in una pentola di Koch a vapore fluente, danno con la benzidina acquosa la reazione blu nella massa vitellina ventrale, come con la benzidina alcolica. Allora si è cercato di vedere a quale temperatura occorresse sottoporre il materiale per far avvenire questo cambiamento e si è visto che la temperatura di 75° è sufficiente per far verificare tale possibilità nel vitello ventrale.

Questi brevi cenni sulle esperienze da me fatte con l'impiego della benzidina acquosa su *Petromyzon fluviatilis* e i risultati con esse ottenuti, che la rendono simile a quella in soluzione alcolica, servono anche a mettere in luce l'interesse che presentava l'estensione delle indagini ad altro materiale: a tal proposito sono stati scelti logicamente uova ed embrioni di *Bufo viridis* che per le ricerche di SPIRITO ⁽²⁾ si conoscevano avere abbondanti perossidasi nell'embrione e nella massa vitellina ventrale.

Le indagini svolte su tale materiale hanno dimostrato invece un perfetto parallelismo tra i risultati ottenuti a tutti gli stadi con i due metodi, contrariamente a quanto si è visto verificarsi in *Petromyzon fluviatilis*.

Ho già detto più sopra che lo studio delle cause responsabili delle differenze notate nell'uso dei due metodi su *Petromyzon fluviatilis* (non verificatesi in *Bufo viridis*) e conseguentemente del modo di agire del diverso fissaggio e del calore nell'annullare tali differenze, sarà oggetto di tutta un'altra serie di indagini. Tutto ciò sarà correlato con esperienze su altre reazioni, sia delle perossidasi, sia di altre sostanze, studiando anche i rapporti che tra essi possono intercorrere a seconda delle modalità con le quali vengono ad essere messe in evidenza.

Ma all'inizio della presente Nota è detto, ad impostazione di essa, che molto sono state studiate in questi ultimi anni varie sostanze, e tra esse le perossidasi, da un punto di vista delle loro localizzazioni, allo scopo

stadi successivi potrebbe esser dovuto a condizioni nuove verificatesi nella massa vitellina ventrale a seguito degli intensi processi che portano al suo riassorbimento graduale durante la vita embrionale propriamente detta.

⁽¹⁾ Questo fissativo era stato già da me adoperato in precedenza (Pubbl. Staz. Zool. Napoli, 27, 1939) su uova di echinodermi, ottenendo la reazione delle perossidasi là dove altri autori non l'avevano riscontrata o soltanto in scarsa misura.

⁽²⁾ « Riv. Biol. », 19, 1935. ●

di mettere in evidenza l'intimo funzionamento delle zone del germe in sviluppo che le contengono in rapporto alle conoscenze che abbiamo attualmente di tali sostanze in base al loro modo di agire *in vitro*.

Ma i miei reperti ottenuti con l'impiego della benzidina acquosa in *Petromyzon fluviatilis*; le differenze tra essi e i reperti di SPIRITO con la benzidina alcolica e l'annullamento di tali differenze con particolari accorgimenti a carico della prima, debbono essere presi in seria considerazione a proposito del valore che si vuole attribuire alle cosiddette localizzazioni di tali sostanze nello sviluppo.

Potremmo infatti dare alla localizzazione della reazione di una data sostanza il valore di un contrassegno colorato per seguire, con l'analisi dei vari stadi, il destino della parte del germe in cui tale reazione si può rilevare ⁽¹⁾; ma essa non ci può permettere, senza ulteriori indagini, di affermare che la sostanza ricercata sia presente soltanto in quella data regione e perciò attribuire esclusivamente a quest'ultima particolari funzioni inerenti alle proprietà intrinseche della sostanza in questione.

Il caso del *Petromyzon fluviatilis* a tal proposito è un esempio chiaro e preciso: con la benzidina acquosa si sarebbe rilevata una localizzazione delle perossidasi nelle parti embrionali propriamente dette e assenza di esse nella massa vitellina ventrale, mentre con modifiche di tecnica la reazione appare da per tutto, così come SPIRITO aveva dimostrato con la benzidina alcolica.

Il volere attribuire quindi alla regione, nella quale con la prima si erano rilevate perossidasi, particolari funzioni in rapporto a questa presenza, sarebbe un grave errore ⁽²⁾, per lo meno considerando le perossidasi così come le conosciamo tuttora: se poi le differenti reazioni e modalità tecniche servano a rilevare stati particolari di esse in alcune zone rispetto ad altre, o particolari stati di tali zone che ne permettano soltanto in certi casi la dimostrazione, son tutte ipotesi che si possono prospettare e pertanto lo studio delle localizzazioni germinali di queste sostanze dovrà essere ripreso con criteri nuovi sulla base delle acquisizioni che saranno via via raggiunte.

⁽¹⁾ È ovvio che in questo senso un tal metodo può essere utile così come l'uso dei colori vitali o lo studio dei pigmenti naturali dell'uovo.

⁽²⁾ Lo stesso si può dire per altre sostanze: in un lavoro di GIOLITTI (« Boll. Soc. Ital. Biol. Sper. », 14, 1939) sulle sostanze a gruppi -SH negli Anfibi e nei Petromizonti è dimostrato che tali composti, localizzati dal BRACHET, con la reazione al nitroprussiato, in date parti dell'uovo di *Triton* e in seguito in maggior quantità al livello del labbro dorsale del blastoporo, appaiono invece distribuiti omogeneamente in tutta la massa del germe con la medesima reazione leggermente modificata nelle sue modalità di impiego.

Biologia. — *Sulla innervazione del labirinto carotideo nei batraci* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di MARCO FEDELE, presentata da UMBERTO PIERANTONI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Numerose e perspicaci ricerche fisiologiche come anatomiche ed istologiche hanno, con particolare insistenza in questi ultimi anni, chiarita nei suoi aspetti essenziali le caratteristiche della innervazione della zona aortica e carotidea nei Mammiferi ed Uccelli, come di quella del tronco arterioso nei Rettili, ed ultimamente nei Batraci, in modo che è da ritenersi messa fuori dubbio l'omodinamia degli apparati nervosi recettivi di queste zone, nei riguardi della regolazione dell'attività cardiaca e del circolo sanguigno.

Un altro aspetto del problema riguardante il *glomero carotico*, il quale se ancora non trova concordia generale nei consensi sulla interpretazione dell'organo stesso, va raccogliendo prove sempre più persuasive sul significato funzionale della sua innervazione ricca di espansioni recettive, che si tende a mettere in rapporto con stimolanti chimici.

Nelle recenti ricerche sui territori pressorecettori in relazione al funzionamento cardiaco, si tende sempre più ad unire lo studio della innervazione aortica (depressore) con quella carotidea (n. intercarotico o nervo del seno di Hering); e come nella prima si tende ad unire lo studio dei nervi in rapporto al paraganglio aortico, così al secondo si unisce quello dei nervi del *glomero carotico*, come di due centri chemorecettori con gli stessi effetti dei pressorecettori aortici e carotidei. In una recente importante memoria del DE CASTRO (1940) sulla innervazione della regione carotidea nei Mammiferi, con un recente esame critico ed una buona bibliografia dell'argomento, troviamo appunto presi in esame e distinti i campi pressorecettivi del seno ed i chemorecettori del *Glomero carotico*.

Oltre alle numerose ricerche sull'uomo e sui mammiferi, il lato anatomo-istologico di questi riflessi è stato esaminato anche negli uccelli con le ricerche del MURATORI (1933) e del NONIDEZ (1935) sia nei riguardi dei recettori aortici che carotidei, e nei rettili, per quanto riguarda la

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia della R. Università di Cagliari.

(2) Pervenuta all'Accademia il 22 settembre 1941-XIX.

innervazione del tronco arterioso, è stato recentemente definito da me stesso (FEDELE 1930-1937). Per i Batraci è in corso la pubblicazione dei risultati di un mio studio concludente per una perfetta corrispondenza della organizzazione recettrice in rapporto con il tronco arterioso, con quella aortica o truncale delle precedenti classi di vertebrati.

Allo scopo di verificare il quadro di questa corrispondenza anche in rapporto alla innervazione del seno carotideo dei Mammiferi, ho eseguito ricerche sulla innervazione del labirinto carotideo nei Batraci, con metodo e finalità analoghe a quelle già da me condotte sulla innervazione del tronco arterioso di questi animali, nei quali oltre ad un lavoro comparativo di indole esclusivamente anatomica di ASK-UPMARK (1935) che cito dal DE CASTRO (1940), non essendomi ancora riuscito di consultarlo nell'originale, e nel quale quell'A. prende in considerazione, fra 27 specie di vertebrati, anche la rana, non esistono, a quanto mi consta, altre ricerche istologiche sulla innervazione del labirinto carotideo e sulle espansioni nervose delle pareti di quest'organo.

Il labirinto carotideo degli Anuri rimane ancora morfologicamente e fisiologicamente un organo enigmatico, malgrado sia stato oggetto di replicati studi.

Esso fu visto dallo SWAMMERDAN ed attirò, fra gli antichi ricercatori, l'attenzione di J. MÜLLER, HYRTL, BRÜCKE, LEYDING, RUSCONI, SABATIER, e fu denominato dall'HUSCHKE «glandola carotica», e ritenuto un organo respiratorio.

A questa concezione si collegano principalmente quella di HYRTL e di SABATIER che vedevano nella glandola carotica un cuore accessorio. Il MAURER (1899), ponendo la glandola carotica nello stesso ordine con i «corpi epiteliali», omologava quest'organo degli Anuri con la glandola carotica dei Mammiferi, che si ritiene da molti, invece, di origine diversa, interpretandola come un paraganglio, concezione questa tutt'altro che pacifica e ultimamente nettamente contrastata dal DE CASTRO (1940).

Lo ZIMMERMANN (1887), ritenendo ingiustificata la denominazione di glandola carotica per gli Anuri, propose il nome di «labirinto carotideo» che fu accettato dal KOHN A., e seguito ora generalmente.

Attraverso le ricerche dello ZIMMERMANN viene meglio confortata la concezione funzionale di questo organo, avanzata dal BRÜCKE, per una ripartizione più abbondante di sangue arterioso meglio ossigenato verso la carotide interna, per la maggiore resistenza che incontrerebbe il deflusso del sangue attraverso la *Pars capillaris* del labirinto, posta all'imbocco di questo ultimo vaso dalla carotide comune.

Anche le recenti ricerche del PISCHINGER (1931) nel rospo attribuiscono al labirinto carotideo una funzione regolatrice nella ripartizione della corrente sanguigna fra carotide interna ed esterna, soprattutto volta ad impedire il sovraccarico del primo vaso.

In sostanza, da questo lato nulla vi è di contrastante fra labirinto carotideo degli anuri e seno carotideo dei Mammiferi. Secondo il PRSCHINGER il labirinto degli anuri è costruito solo di elementi istologici appartenenti alle tuniche vasali, ed i corpuscoli epiteliali non prenderebbero parte alcuna alla sua formazione.

In complesso, quindi, a parte le omologie nei riguardi della derivazione embriologica delle parti, che non entrano nell'oggetto delle nostre attuali ricerche, gli studi recenti sugli Anuri tendono ad escludere nella conformazione del labirinto carotideo la partecipazione di elementi epitelioidi e glandolari.

Per lo meno, da questo punto di vista non ci dovrebbe essere, secondo i risultati citati, quella compenetrazione fra parte vasale e parte epitelio-glandulare, che vediamo esistente nei Mammiferi fra seno carotideo e gli elementi epitelioidi (il DE CASTRO, 1940, esclude siano parangliari) del glomo carotico, compenetrazione che il MAURER aveva nonpertanto anche affermata negli Anuri. Nel corso delle mie ricerche son giunto realmente alla constatazione che nell'adulto di *Bufo viridis* esiste, fra corpuscoli epiteliali e labirinto carotideo, non solo una distinzione per la localizzazione topografica delle parti, ma anche per un diverso comportamento della innervazione, ricevendo i corpi epiteliali fibre nervose derivanti per la loro parte essenziale da ramuscoli vagali, normalmente da ramuscoli del R. laringeo lungo, mentre il labirinto riceve fibre essenzialmente da un ramo del glosso-faringeo.

Ma non parmi si possa totalmente escludere la presenza di elementi epitelioidi, in forma non compatta, nelle pareti del labirinto carotideo degli anuri, essendo facile vedere come nel *Discoglossus* gli elementi dei corpi epiteliali si spingono, avvolgendole in parte, sulle pareti del labirinto, mentre nel *Bufo* stesso si può osservare come elementi nervosi ricchi e minuti prendono, nelle parti superficiali di queste pareti, evidenti rapporti espansionali con cellule epitelioidi, che in numero notevole vi si riscontrano.

A parte quanto interessa la costituzione degli elementi in rapporto con le pareti labirintiche, il lato essenziale del problema sta non in una fusione topografica delle zone recettrici di varia natura, meccanica o chimica, per il riflesso pressorio e rallentatore sul cuore, ma nella constatazione della esistenza dei due recettori di natura diversa che, anche quando si compenetrano, debbono essere serviti da fibre nervose distinte, per cui il DE CASTRO tende a stabilire nei Mammiferi, in base alla istogenesi delle due formazioni, una totale indipendenza fra le fibre nervose del glomo, da quelle del seno carotideo.

ORIGINE E DECORSO DEL NERVO INTERCAROTICO
NEL « BUFO VIRIDIS ».

La dissezione e lo studio dei rapporti dei rami nervosi per il labirinto carotideo nel *Bufo viridis*, pur considerata la esilità delle formazioni, non presenta grandi difficoltà, maggiori difficoltà si incontrano in diversi anuri nella colorazione vitale del nervo e del suo campo espansionale, per la grande ricchezza dei cromatofori che si addensano intorno al labirinto, mascherando nei preparati, specialmente di *Rana* ed *Hyla*, le delicatissime formazioni nervose.

In *Bufo* questa difficoltà è minore, e si possono ottenere, anche con la colorazione vitale e con il montaggio in « toto » del labirinto, risultati chiarissimi, che lasciano osservare le formazioni nervose attraverso tutta la parete dell'organo.

Come ho fatto per le mie ricerche sul tronco arterioso, mi limiterò per brevità, e per fissare i lati essenziali della questione, a descrivere gli aspetti anatomici ed istologici della innervazione del labirinto carotideo nel *Bufo viridis*, riservando ad altra esposizione il lato comparativo del mio esame condotto su *Rana*, *Bufo*, *Dyscoglossus* ed *Hyla*, avvertendo anche qui che, pur con variazioni talvolta notevoli nelle disposizioni, in modo essenziale le organizzazioni che riassumerò si corrispondono fondamentalmente in tutti gli Anuri.

In *Bufo viridis* Laur. il labirinto carotideo riceve un sottile nervetto, che lo raggiunge, verso la sua faccia ventrale, dal lato della carotide esterna, e che noi potremmo denominare « N. del labirinto carotideo » o « *N. intercaroticum* » per il suo percorso, e d'accordo con la nomenclatura suggerita dal DE CASTRO per i mammiferi.

Questo nervetto è un ramo del Glossofaringeo, ma nasce in maniera diversa da quanto è noto per i Mammiferi; esso non si origina, come in questi, quale primo ramo del IX, appena alla sua uscita dal cranio, ma si individua all'angolo del glossofaringeo in alto del labirinto, e precisamente appena sotto l'incrocio della vena giugulare esterna con il IX. Anzi, nell'animale aperto dal ventre, con i vasi in sito, la origine del nervo rimane appunto coperta dalle pareti della vena.

Il nervetto (fig. 1) nasce in direzione ricorrente rispetto al corso del glossofaringeo, e corre per breve tratto addossato, con angolo acutissimo, a questo nervo, correndo lateralmente e in basso, lungo il suo margine caudale. Non lungi dalla sua inserzione sul nervo principale, il nervetto si divide in due rami, dei quali quello cefalico incrocia il tronco del IX ventralmente, e va verso l'alto ramificandosi, dopo breve tratto, in ramuscoli sottilissimi che si distribuiscono alla parete faringea, mentre l'altro ramo va in direzione caudale verso il labirinto carotideo per rag-

giungerlo, con percorso arcuato, verso il suo lato interno e sulla superficie ventrale, presso la origine della carotide esterna.

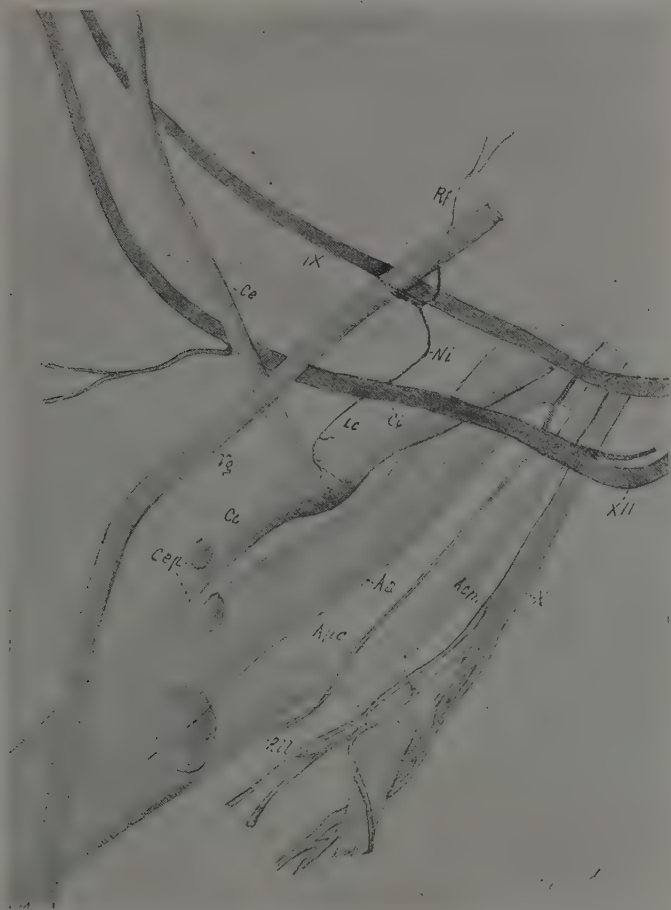


Fig. 1. - Anatomia, rapporti e origine del N. intercaroticus in *Bufo viridis*. Lato sinistro, Ingr. c. 12 volte. Aa. - A. aorta; Acm - A. cutanea magna; Apc - A. pulmono-cutanea; Ce - A. Carothis communis, Ci - A. carothis interna; Lc - Labirintus caroticus; Ni - N. intercaroticus, Rf - Ramo faringeo del Ni; Rll - R. Faringeus longus n. vagi, IX-X-XII Glosso faringeo, Vago ed Ipoglosso.

Le disposizioni indicate si corrispondono nei due lati dell'animale. Questo sottile filetto nervoso che raccoglie le fibre del labirinto, è appena visibile con lenti forti e sotto buona illuminazione al binoculare, poichè,

anche dopo trattamento con acido acetico all'1 %, esso si presenta traslucido e non acquista facilmente quel tono bianco opaco che fa spiccare, con questa tecnica, i nervi anche sottili sul fondo degli altri tessuti. La sua dissezione però, come ho detto, non è difficile, se si pone molta attenzione nell'aprire ventralmente l'animale, e nell'asportare le parti che formano le pareti ventrali del torace, poichè, per la posizione molto superficiale del nervetto, e per la ricchezza di connettivo e pigmento delle parti e per le aderenze che esso prende, è molto facile ledere il nervo nella dissezione, nella quale bisogna evitare, quanto è possibile, l'uso dei ferri, finchè il nervo non sia stato identificato lungo tutto il suo decorso.

ZONA E FORMA DI ESPANSIONI RECETTIVE DEL LABIRINTO CAROTICO.

Il nervo intercarotideo raggiunge con un suo ramo principale la superficie ventrale del labirinto verso la metà più prossima alla carotide esterna.

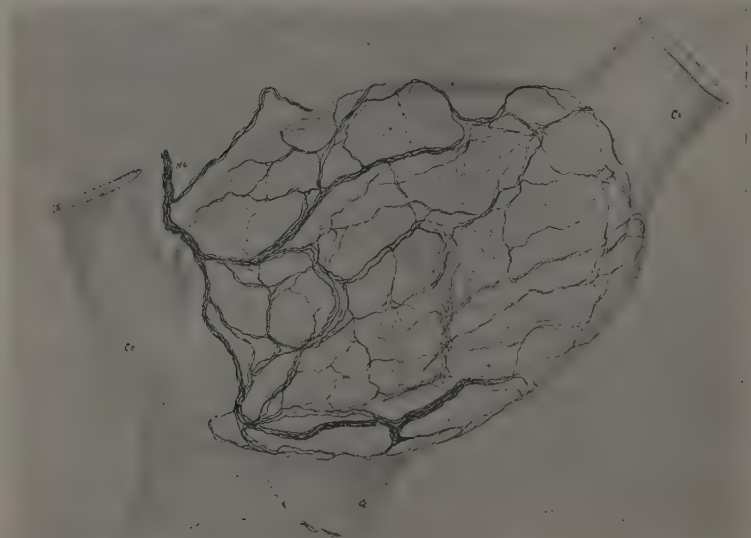


Fig. 2. - Ramificazioni e plessi del *N. intercaroticus* sulla faccia ventrale del labirinto carotideo di *Bufo viridis*. (Colorazione vitale, Ob. 18, oc. 6c. Dis. ridotto di 2/3 c.). Ce - Carotide comune, Ce - Carotide esterna; Ci - Carotide interna.

Anche prima di inserirsi nell'involucro connettivale dell'organo, può dare uno o qualche rametto che si dirige sulla parete dorsale per distribuirvisi, ma la massa più importante delle fibre si inserisce sulla parte

ventrale e, con ramuscoli nervosi mielinici e serpeggianti all'inizio, prende aderenze e si distribuisce, con successive ramificazioni ed espandimenti di fibre, e va distribuendosi in un plesso che avvolge con ricchezza insolita di nervi, nei riguardi di un organo vascolare, tutta la superficie del labirinto (fig. 2).

Le ramificazioni principali posseggono, come il nervetto, ancora sottili fibre mieliniche, e si distribuiscono più superficialmente nell'avventizia; perdono poi via via la mielina e, ramificandosi ed espandendosi in modo varissimo, formano un plesso superficiale e poi profondo, con maggiore sottigliezza di ramificazioni.

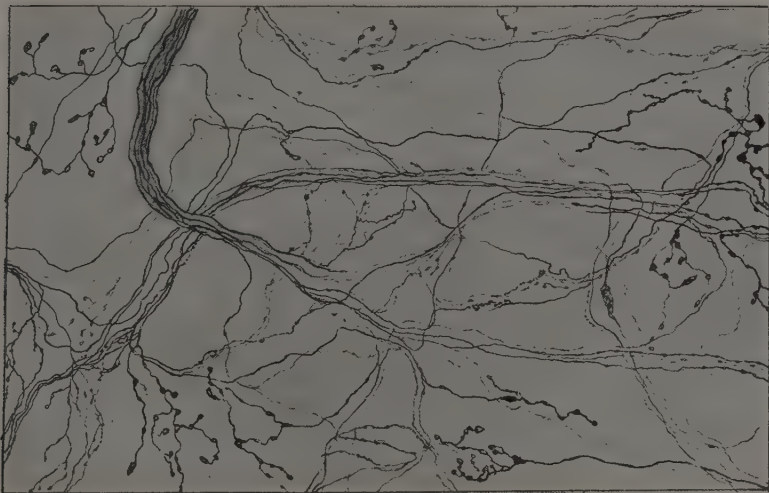


Fig. 3. — Particolare delle ramificazioni plessiformi e formazioni espansionali di un ramuscolo del N. intercarotideo nella parete del labirinto carotico.

Bufo viridis. (Color. vitale, ob Z. 40, oc 6c.).

Questo plesso profondo, come notai già per il tronco arterioso dei Rettili e degli stessi Batraci, per la struttura delle sue fibre, che prendono per molte di esse un aspetto aderiforme e diventano nodose e si connettono a granuli e zolle nervose, aumentando la loro superficie di contatto in seno agli elementi dell'avventizia, ha già forma ed, evidentemente, funzione di plesso espansionale; ma in seno ad esso e con fibre spingentisi anche più profondamente negli strati avventiziali e in rapporto con la media del labirinto, si snodano fibre che si risolvono in espansioni sensitive dendritiche, perfettamente comparabili a quelle che riscontrai precedentemente nell'avventizia truncale (fig. 3).

Queste forme di espansioni dendritiche (fig. 4) talvolta molto estese, anche se teniamo conto della piccolezza del labirinto negli anuri, abbracciano una superficie ampia dell'organo e sovrapponendosi, di solito, le ramificazioni dell'una e dell'altra espansione, nessun tratto della parete esterna del labirinto rimane privo di formazioni recettive. Plessi ed espansioni sensitive dendritiche ripetono perfettamente anche per il labirinto carotico, quella ricchezza e saldatura di strutture in intreccio unitario degli elementi nervosi del campo recettivo, che costituiscono la caratteristica più spiccata di questa formazione, come ebbi già a notare per la zona pressorecettiva truncale, sia dei Rettili (Fedele 1930-1937) che dei Batraci (Fedele 1941), e come ha notato lo stesso DE CASTRO (1940) per i dispositivi recettori del seno carotideo degli stessi mammiferi.

Nei preparati ben riusciti, con la colorazione sopravvitala con il blu di metilene, la trama nervosa del labirinto appare in tutta la sua integrità e distribuzione topografica: il plesso iniziale sul lato mediale del labirinto ed estendentesi con fibre mieliniche di calibro sottile per largo tratto della zona superficiale avventiziali (fig. 2), i plessi amielinici derivati dal primo, e le espansioni dendritiche, alcune localizzate, talvolta come aggomitolate e raccolte intorno agli elementi tissurali di natura estranea riscontrabili nell'avventizia, talvolta ampiamente ramificate e molto espanse attraverso gli strati avventiziali (fig. 4).

Nell'insieme i plessi amielinici profondi, come superficiali dell'avventizia del labirinto carotideo, hanno nel *Bufo* un aspetto più delicato ed uniforme nelle strutture che non quelli riscontrati nella zona della parete aortica e pulmono-cutanea, e non può parlarsi di un plesso aderente e penetrante la muscolatura della media con i caratteristici particolari morfologici riscontrati in queste arterie, non presentando le caratteristiche espansioni laminari a lembi descritte nei plessi profondi avventiziali di pertinenza truncale, ma sebbene di un sottile plesso a fibre delicatissime e minutamente granulate, che si adagia in questa parte della parete, come nelle parti più superficiali dell'avventizia, e collegante, nella sua ampia estensione, tutte le varie espansioni nervose della zona.

Alcune delle fibre mieliniche del plesso superficiale del labirinto carotideo mettono capo a formazioni espansionali della natura di quella rappresentata nella fig. 4. Questo ordine di espansioni presenta ramificazioni variamente ricche ed estese, o variamente condensate con i loro rami, e alcune si infiltrano in largo spazio e a diversa profondità dell'avventizia, altre si raccolgono con parte delle loro ramificazioni in nodosità e lembi di sostanza nervosa addensati come involucri a gabbia intorno, o fra gli interstizi, degli elementi cellulari annidati nell'avventizia, mostrando, insieme con la loro tendenza ad espandersi, attraverso il territorio recettivo, spiccata capacità di adattamento e di addensamento, secondo le necessità dei rapporti tissurali nella zona di espansione.



Fig. 4. - Espansione sensitiva dendritica formata da una fibra del N. intercarotico nella parete avventiziale del labirinto carotico di *Bufo viridis*. (Color. vitale. Ob. Z.2 mm. i.o., oc. 6).

Le varie espansioni dendritiche derivate da fibre diverse si sovrappongono e si annodano spesso nello stesso spazio, in modo che fra i diversi punti del campo recettivo si estende, anche indipendentemente dai plessi terminali espansionali ricchi e diffusi, una trama nervosa recettiva atta ad essere eccitata nel suo complesso da stimoli anche localizzati, attraverso un notevole spessore di fibre, poste anche in parti relativamente lontane dal campo recettivo.

ALTRE FORMAZIONI E RAPPORTI NERVOSI NEL LABIRINTO CAROTIDEO.

Nelle pareti del labirinto possono osservarsi, oltre le formazioni nervose descritte, anche fibre amieliniche sottilissime, e tratti di reti e plessi nervosi costituiti da fibrille esilissime, munite di granulosità fitte e minute, e preendenti rapporti di semplice contatto con i plasmi di alcuni cromatofori, come con quelli degli elementi muscolari della tunica media,

principalmente verso il lato di origine delle due arterie carotide esterna ed interna, e con altri elementi non vascolari, allogati specialmente nelle parti superficiali dell'avventizia, e spingentisi in zona del connettivo anche più esterna di quella occupata dai cromatofori.

Tutte le caratteristiche di queste sottilissime fibrille e reti nervose, e la mancanza di rapporti di continuità fra esse e gli elementi degli sfioccamenti delle fibre sensitive del nervo intercarotideo, ci testimoniano di una loro diversa origine, e che ci troviamo evidentemente in presenza di elementi di natura simpatica.

È da notare ancora che le fibre più spesse, che si risolvono nelle espansioni sensitive dendritiche di sicura natura centrale, sono accompagnate da sottili fibrille che danno minuti reticoli, che si vedono contrarre contatti ed aderenze superficiali con gli elementi tissurali contenuti nella tunica avventiziale, con granulazioni ed anche sottili espandimenti di reticoli granulari, che hanno aspetto e comportamento diversi da quelli delle fibre centrali sensitive.

Ai limiti della visibilità in cui si aggirano le dimensioni di alcune delle strutture indicate, e nella compenetrazione che esiste fra i filamenti nervosi di varia provenienza, sulle superfici innervate, non è facile fare con decisa chiarezza distinzioni, ma per l'aspetto strutturale diverso da quello delle espansioni plessiformi dipendenti dagli sfioccamenti del nervo intercarotideo, come dalla distribuzione di queste formazioni fibrillari, ugualmente aderenti alla muscolatura liscia come agli elementi connettivali ed epitelioidi riscontrabili nella zona avventiziale, non è da escludere, anzi appare molto probabile, che anche essi siano di natura simpatica.

In rapporto con i dispositivi nervosi da me indicati, e variamente diffusi nella stessa zona di distribuzione, si riscontrano, nella parete del labirinto carotideo del *Bufo*, elementi cellulari di forma varia, ma più frequentemente ovaloide (fig. 5), con citoplasma che con il blu di metilene si colora con ricche e fitte granulosità, che lasciano poco o affatto distinguere il nucleo. Queste cellule si dispongono in gruppi sparsi ed irregolari, talora fitti, ma senza formare ammassi di notevole spessore, estendendosi nel connettivo avventiziale e nelle zone più superficiali di esso, ed anche al livello più esterno dei cromatofori.

Il comportamento di questi elementi cellulari ricorda quanto ebbi ad osservare per quegli elementi riscontrati da me, e da altri, nelle pareti del tronco arterioso dei rettili, e costituenti un paraganglio diffuso in tale parte di questi animali. Anche nel labirinto del *Bufo* senza trarre illazioni arrischiare sulla genesi e la funzione di questi elementi, appare evidente la loro natura epiteloide e la tendenza a disporsi in nidi. Il MAURER (1899), come ho già detto, ammetteva la esistenza di elementi paragangliari nelle pareti della glandula carotica (cioè del labirinto carotideo) di Rana, mentre il WATZKA (1937), in un suo recente studio sullo

sviluppo del paraganglio carotico dei Mammiferi, mentre riconosce che il labirinto carotideo degli anfibî non ha nulla di comune con il paraganglio carotico dei primi, ammette che esso ne è forse il precursore.

L'affermazione del PISCHINGER (1934) escludente dalle pareti del labirinto carotideo degli elementi istologici oltre quelli esclusivamente vascolari, appare, almeno nei riguardi dell'adulto del *Bufo viridis*, troppo recisa ed inesatta.

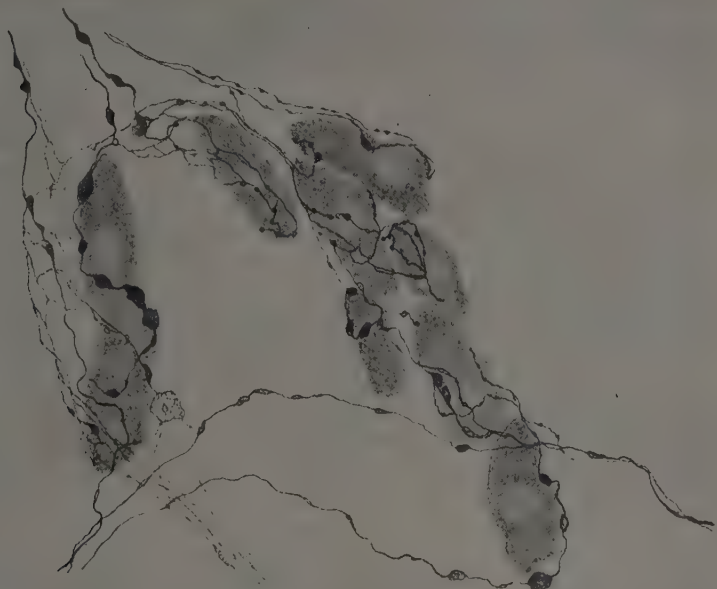


Fig. 5. - Rapporti nervosi di cellule epitelioidi nelle pareti del labirinto carotico di *Bufo viridis*. (Color. vitale, Ob. Z. 2mm. o. i., oc. 6c.).

Ho studiato i rapporti che prendono questi elementi epitelioidi con le formazioni nervose delle pareti del labirinto, ed ho potuto notare strutture comportantisi come quelle già da me (1937) notate intorno agli elementi costituenti il paraganglio troncale dei rettili, come anche rapporti nervosi che ricordano quelli ricordati dal DE CASTRO (1940) per le cellule del glomo carotideo dei Mammiferi.

Le disposizioni della prima specie, ed inerenti ad elementi nervosi di sicura derivazione dal N. intercarotico e quindi centrale, non creano rapporti se non occasionali fra tali cellule e le espansioni sensitive, trat-

tandosi qui semplicemente di atteggiamenti che mostrano le espansioni nell'adattarsi, per la contemporanea presenza dei gruppi cellulari che invadono il territorio espansionale. Qui le ramificazioni dendritiche delle fibre sensitive appaiono, in alcuni rami, addensarsi, adattandosi allo spazio posto fra le cellule, e talvolta intorno ad esse, ma senza prendere con questi contatti intimi e costanti. Si notano espansioni, provenienti dalla stessa fibra, in parte conservare i comuni caratteri estensivi nella loro distribuzione, in altre parti raggomitolarsi o piegarsi a gabbia intorno ad alcuni degli elementi cellulari, e prendervi rapporti che appaiono fortuiti.

Come espressi per lo studio degli apparati recettori truncali dei Rettili (FEDELE 1937), ritengo che non sia qui da parlare di espansioni recettive in rapporto con il chimismo degli elementi epiteliodi, perchè non potremmo sostenere che espansioni sensoriali di natura diversa, nei Rettili evidentemente pressorecettrici problematicamente chemorecetrici, si trovino sul percorso delle istesse fibre centrali.

La nostra esclusione, quindi, non si basa naturalmente sul presupposto di una possibile azione a distanza di determinate sostanze chimiche sulle fibre nervose, essendo una tale azione da ammettere fra le possibilità funzionali degli elementi nervosi, ma sulla costituzione funzionale unitaria, che si rivela attraverso tutte le strutture esaminate per il campo recettivo, in rapporto con le fibre centripete del nervo intercarotico.

Rapporti effettivamente intimi e costanti, fra fibre nervose e gli elementi cellulari indicati, si stabiliscono invece con fibrille nervose che non riesce porle in derivazione sicura con le fibre sensitive derivanti dal N. intercarotideo; e cioè con le sottili fibre da me già notate e che penso siano di natura simpatica.

Esempi di tali rapporti sono rappresentati nella figura 5 e consistono, come si vede, in contatti ed aderenze superficiali di piccole ramosità di fibre sottilissime munite di dischetti e granulosità e, o aderenti ad un lato di una, o di solito di diverse cellule vicine od in serie, o serpeggianti a brevi archi e frammenti di spira intorno ad esse, o percorrendole fra i due estremi, prendendo con la superficie del loro plasma aderenze bottoniformi.

I rapporti delle cellule del globo carotideo, nei mammiferi, con fibre nervose in quest'organo, viste dal DE CASTRO (1940), non appaiono diversamente conformate.

Preseindendo dal significato genetico e funzionale, che possono avere gli elementi epiteliodi indicati, nelle pareti del labirinto carotideo di *Bufo*, e senza peraltro avere intenzione di sottoscrivere o contrastare a quella parte di ricerche del DE CASTRO (1926-1940), MURATORI (1933), NONHEZ (1935), MEYELING (1936) ed altri, che riconoscono dispositivi nervosi per la ricezione di speciali stimoli chimici in rapporto alla attività delle cellule del globo aortico o carotideo, pur nei limiti della semplice esplorazione puramente strutturale condotta, credo che si possa

concludere, a proposito delle ultime strutture da me osservate, che nel labirinto carotideo di rospo, pur constatando la presenza di numerosi, ma non ricchi e voluminosi, aggregati cellulari di natura evidentemente epitelioidi, non risulta che esistano sicuri rapporti diretti funzionali fra questi elementi ed espansioni di fibre sensitive provenienti dal N. intercarotideo, e la coesistenza in questo nervo di fibre di diversa natura per una attività chemorecettiva e di una diversa pressorecettiva; ma fra le espansioni derivanti dal nervo intercarotideo e le formazioni cellulari indicate, esistono solo rapporti derivanti da necessità spaziali create dalla coesistenza delle due formazioni nello stesso territorio di distribuzione tissutale. Le fibrille nervose, da me dimostrate in intimo rapporto plasmatico con le cellule epitelioidi, sono in relazione con quei dispositivi nervosi già da me notati, e constatati strutturalmente diversi, da ritenersi, almeno in parte predominante, di natura simpatica.

Negli Anuri, se appare, sulla base dei fatti istologici osservati nell'adulto, troppo recisa la esclusione che da qualche autore si fa di ogni elemento epiteloide glandulare dalla costituzione delle pareti del labirinto carotico, ritenendole costituite da soli elementi a struttura e funzioni esclusivamente vascolari (PISCHINGER 1934), non appare egualmente chiaro che nell'ampio e ricco campo recettivo (verosimilmente pressorecettivo) in rapporto con il territorio del labirinto carotideo, e generato da fibre derivanti dal glossofaringeo, si possa includere, almeno in quella proporzione efficiente atta a scatenare riflessi della consistenza e importanza di quelli regolatori del circolo, anche una zona chemorecettiva in dipendenza delle stesse fibre del N. intercarotideo.

CONCLUSIONI.

Sulla base dei fatti da noi esaminati sulla innervazione del labirinto carotideo del *Bufo viridis* possiamo affermare che quest'organo possiede una innervazione, che, per origine per ricchezza di fibre e di dispositivi espansionali e corrispondenza di strutture, è perfettamente comparabile al seno carotideo dei Mammiferi. Come questo, il labirinto carotideo riceve fibre da uno speciale ramo del glossofaringeo, che abbiamo chiamato *N. intercaroticus* e come esso la natura delle fibre e dell'intero campo di distribuzione è di natura evidentemente sensitiva.

La corrispondenza esistente fra la regione carotideica dei Mammiferi e dei Batraci, come la corrispondenza, da noi già dimostrata, nella innervazione della regione aortica e truncale degli stessi animali ed anche dei Rettili, nei quali ultimi abbiamo già dimostrato sperimentalmente che incide anche corrispondenza funzionale, mentre rende legittima ed innegabile che strutturalmente le due formazioni si corrispondono, rende anche molto probabile la loro omodinamia.

Nei Batraci il *N. trunci arteriarum*, derivante dal *R. pharyngeus superior posterior I* del Vago, ed il nervo del labirinto carotideo, o *N. intercaroticus*, derivante dal glossofaringeo, sono di natura centripeta e integrano, con le zone recettive allegate rispettivamente nelle pareti del *Truncus arteriosus* e in quelle del *Labyrinthus caroticus*, vie nervose corrispondenti, almeno strutturalmente, a quelle sovrintendenti ai noti riflessi aortico o truncale e carotideo, e ci fanno ritenere, con la loro scoperta, che ci troviamo con sempre maggiore evidenza di fronte ad un aspetto forse generale della organizzazione dei vertebrati.

Le ricerche fisiologiche, che ci proponiamo di definire, decideranno, anche per i Batraci, la natura delle estrinsecazioni che si effettuano attraverso un tale apparato riflesso; ma la forma ed i rapporti delle strutture nervose e la natura dell'organo, eminentemente contrattile, alle pareti del quale si collegano i dispositivi recettori provocatori del riflesso, sono già testimonianze della natura meccanica pressoria degli stimoli, che agiscono su di esso.

La zona recettiva del labirinto carotideo possiede aspetti e strutture, nel comportamento delle fibre nervose, nella distribuzione dei plessi preterminali ed espansionali, nella presenza di espansioni sensitive dendritiche localizzate o diffuse, corrispondenti nel complesso a quelle della zona truncale dei Batraci e dei Rettili, come a quella della zona aortica e carotidea dei vertebrati omotermini, e presenta la costituzione di un ricco campo recettore a costituzione unitaria.

Non è riscontrabile, in connessione con il labirinto carotideo, una zona espansionale nervosa comparabile a quella del glomo carotico, ma non è escluso che le due formazioni, carotidea e glomica, coesistano separatamente nei Batraci.

Nelle pareti del labirinto si riscontrano elementi cellulari di natura epitelioidi, che prendono rapporti puramente spaziali con le formazioni espansionali del nervo intercarotideo, e più ricchi costanti ed intimi contatti con fibre e reti di natura diversa, e da giudicarsi come simpatiche. Non consta che esistano dispositivi espansionali chemorecettori in derivazione delle fibre del nervo intercarotideo, il campo espansionale del quale si rivela costituito unitariamente per la ricezione di un solo ordine di stimolazioni, di natura meccanica.

Il significato funzionale del labirinto carotideo degli Anuri, che agli studi anche recenti è apparso nel solo suo aspetto idrostatico, limitato alla distribuzione qualitativa del sangue fra le due carotidi esterna ed interna, con lo studio della sua innervazione da noi condotto, viene a rivestirsi con evidenza di una più essenziale e generale importanza, allineandosi con il seno carotideo, come centro pressorecettore dei Mammiferi, e con gli apparati pressorecettori aortici e truncali di questi, degli Uccelli come dei Rettili e Batraci, nel quadro più generale della regolazione cardiaca e del circolo sanguigno.

BIBLIOGRAFIA

1935. ASK UPMARK E., *The carotid sinus and the cerebral circulation*. « Arch. Psych. Neurol », Suppl. VI Lund.
1940. CASTRO (DE), *Nuevas Observaciones sobre la innervacion de la region carotidea. Los quimio y preso-receptores*. « Trab. Inst. Cajal invest. biol. », T. 32, pag. 297, 40 figs., 5 lams.
1932. CORDIER y COULOUMA, *Recherches sur les nerfs du sinus carotidien et sur leurs variations*. « C. R. Ass. Anat. », 27e R. Nancy.
1930. FEDELE M., *Sui nervi centripeti cardiaci nei vertebrati*. « Boll. Soc. Ital. Biol. Sper. », vol. 5, pag. 623.
1937. — *I nervi del tronco arterioso nel quadro della innervazione cardiaca nei Rettili ed il problema del « Depressore » nei Vertebrati*. « Mem. R. Acc. Naz. Lincei », ser. 6a, vol. 6, pag. 387, fig. 33, tav. 1-10.
1941. — *La innervazione del tronco arterioso nei Batraci anuri*. « Arch. Ital. Anat. Embr. », A. 1941.
1924. HERING H. E., *Die Sinusreflexe von Sinus caroticus werden durch einen Nerven (Sinusnerv) vermittelt, der ein Ast des Nervus glossopharyngeus ist*. « Münch. Mediz. Wochenschr. », Jahrg. 71, S. I, 265.
1899. MAURER F., *Schilddrüse, Thymus und sonstige Schlundspaltenderivate bei Echidna und ihre Beziehungen zu den gleichen Organen bei anderen Wirbelthieren*. « Jenaische Denkschriften », Bd. 6.
1936. MEYELING H. A., *The glomus and the sinus caroticus of the horse*. « Proc. Konink. Akad. Wetensch. Amsterdam », vol. 39.
1933. MURATORI G., *Ricerche istologiche sull'innervazione del glomo carotico*. « Arch. Ital. Anat. Embriol. », vol. 30.
1934. MURATORI G., *Contributo istologico all'innervazione della zona arteriosa glomo-carotidea*. « Ibid. », vol. 32.
- 1935a. NONIDIZ Y. F., *The presence of depressor nerves in the aorta and carotid of birds*. « Anat. Rec. », vol. 62.
- 1935b. — *The aortic (depressor) nerve and its associated epitelioid body the glomus aorticum*. « Am. J. Anat. », vol. 57.
1934. PALME F., *Die Paraganglien über dem Herzen und im Endigungsgebiet des Nervus depressor*. « Z. mikr. anat. Forsch. », Bd. 36, pagg. 391-420, 17 fig., Taf. I.
1929. TSCHERNJACHINSKJ A., *Note sur le développement du système nerveux du cœur, la termination du nerf dépresseur et l'innervation du sinus carotidien*. « Trav. Lab. Rech. Biol. Madrid », t. 26.
1937. WATZKA M., *Über die Entwicklung des Paraganglion caroticum der Säugetiere*. « Z. Anat. », Bd. 108, pag. 61, 9 Abb.
1923. WILSON M. e BILLINGSLEY P. R., *The innervation of the carotid body*. « Anat. Rec. », vol. 25.
1887. ZIMMERMANN W., *Ueber die Carotidendrüse von Rana esculenta*. « Inaugurations-Disertation », Berlin, 1887.

Matematica (Geometria). — *Superficie dotate di ∞^1 geodetiche che sono eliche su cilindri ortogonali a una direzione fissa.* Nota ⁽¹⁾ di CORRADINO MINEO, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

I. TRASFORMAZIONE DEL PROBLEMA. — Sia S una superficie dotata di una famiglia ∞^1 di geodetiche (g), che sono eliche (quindi geodetiche) su cilindri le cui direzioni sono ortogonali a una retta fissa r . Evidentemente questi cilindri sono circoscritti alla S lungo le g ⁽²⁾. In ogni punto P d'una linea g , il piano formato dalla normale a S e dalla parallela per P alla direzione fissa r , ha giacitura costante, essendo normale alle generatrici del relativo cilindro a cui la g pure appartiene. Estendendo a una superficie qualunque (non sviluppabile) la nozione di meridiano, il piano anzidetto si può chiamare *piano meridiano* o *meridiano geografico* della S in P rispetto alla direzione fissa r . Si può anzi definire, rispetto alla direzione fissa (orientata) r , un sistema su S di coordinate curvilinee *geografiche*, chiamando *latitudine* (φ) di P il complemento dell'angolo che la normale (convenientemente orientata) alla superficie S in P forma con la direzione fissa orientata r e *longitudine* (ω) di P l'angolo diedro che il meridiano geografico in P forma con un piano arbitrario parallelo alla direzione fissa r . Sulla S avremo quindi un doppio *sistema geografico* di linee $\varphi = \text{costante}$ e $\omega = \text{costante}$, e potremo dire che sulla S ogni geodetica g è una linea di eguale longitudine (rispetto alla direzione fissa r). Reciprocamente, se una linea di eguale longitudine su S , rispetto alla direzione r , è anche geodetica su S , è facile dedurre che tale linea è un'elica sopra un cilindro le cui generatrici sono ortogonali alla retta r . Infatti, la sviluppabile circoscritta alla S lungo una linea di eguale longitudine è manifestamente un cilindro le cui generatrici sono normali ai piani meridiani (paralleli) dei punti della linea stessa; ma se questa linea di eguale longitudine è geodetica sulla S , è anche geodetica (quindi un'elica) sul cilindro.

Il nostro problema si trasforma dunque in quest'altro: *Determinare le superficie sulle quali la famiglia delle linee di eguale longitudine, rispetto alla direzione fissa r , sia una famiglia di geodetiche.*

⁽¹⁾ Presentata nell'Adunanza del 22 novembre 1941-XX.

⁽²⁾ È poi manifesto che alle superficie S appartengono tutte le superficie di rotazione: le (g) sono i meridiani e la direzione r è quella dell'asse di rotazione.

Il problema si può mettere ancora sotto un'altra forma. Per ogni punto di S , si possono definire due *direzioni cardinali*: la *direzione cardinale Nord*, data dall'intersezione del meridiano geografico con il piano tangente in P , e la *direzione cardinale Est*, cioè quella della retta per P perpendicolare alla prima e situata nel piano tangente (quindi perpendicolare al piano meridiano). Ogni linea d'eguale longitudine è evidentemente linea d'eguale direzione cardinale Est: questa direzione anzi è quella delle generatrici del cilindro circoscritto alla S lungo la linea stessa. Ne viene che se una linea d'eguale longitudine di S è geodetica su S (quindi anche geodetica sul predetto cilindro), essa è una traiettoria isogonale delle linee Est o Nord: chiamando così le linee di S lungo le quali la tangente coincide con la retta cardinale Est o con la retta cardinale Nord. Reciprocamente, se sulla S una linea d'eguale longitudine è una traiettoria isogonale delle linee Est, essa è un'elica, cioè una geodetica, sul relativo cilindro circoscritto alla S lungo la linea stessa; epperò è geodetica anche sulla S .

Le nostre superficie S , dunque, sono anche caratterizzate dal fatto, che le linee di eguale longitudine (rispetto a una direzione r) sono traiettorie isogonali delle linee Est (o Nord).

Queste proprietà geometriche caratteristiche delle superficie S in discorso, erano state da me segnalate in una Nota del 1910 ⁽¹⁾, e in una precedente Memoria ⁽²⁾ avevo notato che alle S appartengono le superficie modanate a sviluppabile direttrice cilindrica del MONGE.

Nella presente Nota risolvo il problema generale della determinazione analitica delle superficie S .

2. SISTEMI GEOGRAFICI E FORMOLE FONDAMENTALI. — L'idea di estendere a una superficie (o a una porzione di superficie) qualunque (non sviluppabile) la nozione di coordinate geografiche, è dovuta al MINDING ⁽³⁾. Il PIZZETTI ⁽⁴⁾ stabilì appresso, con semplici considerazioni sintetiche, alcune proprietà dei sistemi geografici. Dei quali si occupò

⁽¹⁾ Vedi MINEO, *Sistemi geografici sulle superficie*. « Periodico di Matematica », Anno XXVI, fasc. I, 1910.

⁽²⁾ Vedi MINEO, *Sulle superficie riferite a un sistema geografico e sulla determinazione intrinseca del Geoide*. « Giornale di Matematiche di BATTAGLINI », vol. XLVIII, 1911.

⁽³⁾ Vedi MINDING, *Ueber einige Grundformeln der Geodäsie*. « Journal für die reine und angewandte Mathematik », XLIV, 1852, pagg. 66-72.

⁽⁴⁾ Vedi PIZZETTI, *Contribuzione allo studio della superficie terrestre*. « Giornale della Società di Letture e Conversazioni scientifiche di Genova », vol. XVII, 1887.

anche il VITERBI ⁽¹⁾ e poi lo scrivente nei lavori già citati. Nella Memoria appunto del 1910, ho dato, tra l'altro, le formole fondamentali, che danno gli elementi della superficie per mezzo dei coefficienti D , D' e D'' della seconda forma differenziale quadratica, dai quali, essendo già assegnata la rappresentazione sferica, dipende più immediatamente la determinazione della superficie. Nella successiva Nota citata, ho ritrovato geometricamente alcune proprietà stabilite analiticamente nella predetta Memoria, tra le quali principalmente la questione riguardante i sistemi geografici ortogonali, già risolta dal MINDING analiticamente. Invero, se della S facciamo la nota rappresentazione di GAUSS, alle linee φ e ω corrispondono i paralleli e i meridiani della sfera rappresentativa, relativi al diametro della sfera parallelo alla direzione r . Inoltre le direzioni Nord ed Est, relative al punto P della S , sono rispettivamente parallele alle tangenti al meridiano e al parallelo sferici passanti per il punto P' , immagine sferica di P . Per note proprietà della rappresentazione sferica, si deduce subito che in ogni punto della S le tangenti alle linee φ e ω sono rispettivamente coniugate alle direzioni Nord ed Est. Proprietà che per primo ha segnalato il PIZZETTI nella Nota citata. Ora, al variare della direzione r , abbiamo, sulla S , ∞^2 sistemi geografici, e si tratta di sapere se esistano sistemi geografici ortogonali e su quali superficie. Il che equivale a domandarci se nell'involuzione di tangenti coniugate della superficie, intorno a un suo punto, esista una coppia ortogonale di tangenti cui è coniugata un'altra coppia ortogonale. Questa proprietà non spetta che alla coppia ortogonale di tangenti coniugate nell'involuzione stessa, eccettuati i casi in cui l'involuzione è circolare o simmetrica. Nell'involuzione simmetrica, la proprietà accennata appartiene a ogni coppia di tangenti coniugate: l'indicatrice di DUPIN è un'iperbole equilatera, e quindi le direzioni assintotiche, corrispondenti ai raggi doppi della involuzione, sono ortogonali: proprietà, questa, che caratterizza le superficie minime. Nel caso dell'involuzione circolare, l'indicatrice di DUPIN è una circonferenza (caso della sfera). Tolti questi due casi, resta una classe di superficie per le quali le linee φ e ω sono le linee di curvatura, e coincidono quindi rispettivamente con le linee Est e Nord. Queste superficie sono caratterizzate dal fatto di possedere un sistema di linee di curvatura in piani paralleli e non sono altro che le superficie modanate del MONGE. Mettendo da parte il caso ovvio della sfera, si viene al risultato del MINDING, che *le uniche superficie dotate d'un sistema geografico ortogonale sono le superficie modanate a sviluppabile direttrice cilindrica e le superficie minime*. Su queste ultime, anzi, ogni sistema geografico è orto-

(1) Vedi VITERBI, *Sulla determinazione degli elementi intrinseci fondamentali della superficie terrestre mediante misure locali*. « Rend. Circ. Mat. di Palermo », to. XXV, 1908.

gonale isoterma; giacchè ogni sistema geografico corrisponde a un sistema isoterma della sfera rappresentativa, e per le superficie minime la rappresentazione di GAUSS è conforme e quindi conserva ogni sistema isoterma (1).

Nella presente Nota, richiamerò quelle formole fondamentali della geometria delle superficie riferite a un sistema geografico che sono strettamente necessarie nel problema che ci occupa, rimandando per maggiori ragguagli alla mia Memoria citata.

Scegliendo l'asse z parallelo alla direzione r , i coseni direttori X , Y , Z della normale in un punto generico di S sono evidentemente:

$$[1] \quad X = \cos \varphi \cos \omega, \quad Y = \cos \varphi \sin \omega, \quad Z = \sin \varphi;$$

e la terza forma fondamentale quadratica della superficie è quindi:

$$[2] \quad d\varphi^2 + \cos^2 \varphi d\omega^2.$$

Essendo poi

$$[3] \quad D d\varphi^2 + 2 D' d\varphi d\omega + D'' d\omega^2$$

la seconda forma fondamentale quadratica di S , abbiamo per le coordinate cartesiane x , y , z del punto generico di S le formole fondamentali (2):

$$[1] \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial x}{\partial \varphi} = D \sin \varphi \cos \omega + D' \sec \varphi \sin \omega, & \frac{\partial x}{\partial \omega} = D' \sin \varphi \cos \omega + D'' \sec \varphi \sin \omega, \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} = D \sin \varphi \sin \omega - D' \sec \varphi \cos \omega, & \frac{\partial y}{\partial \omega} = D' \sin \varphi \sin \omega - D'' \sec \varphi \cos \omega, \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} = -D \cos \varphi, & \frac{\partial z}{\partial \omega} = -D' \cos \varphi. \end{array} \right.$$

(1) Dei sistemi geografici si occupò assai più tardi lo SCHMEHL in un capitolo introduttivo alle sue *Untersuchungen über ein allgemeines Erdellipsoid*: (« Veröffentlichung des Preussischen Geodatischen Institutes », Neue Folge, Nr. 98, Potsdam, 1927), senza peraltro recar nulla di nuovo e senza citare nè gli autori italiani nè il MINDING. Ancora più tardi se ne occupò il JENNE in « Astr. Nachr. », Nr. 6011, Band 251, Febr. 1934. Neanco il JENN apporta alcun contributo: cita il MINDING, non gli autori italiani, anzi afferma essere stato primo il POINCARÉ a segnalare, nell'articolo *Sur les déviations de la verticale en géodésie* (« Bull. astr. », to. XVIII, 1901), l'accennata proprietà di coniugio, data dal PIZZETTI nella Nota citata del 1887.

(2) Cfr. BIANCHI, *Lezioni di Geometria differenziale*, 3ª ediz., vol. I, parte I, pag. 234. Bologna, Zanichelli, 1927.

Le condizioni d'integrabilità delle [4], ossia le equazioni di MAI-NARDI-CODAZZI, sono:

$$[5] \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial D}{\partial \varphi} - \frac{\partial D'}{\partial \varphi} + D' \tan \varphi = 0, \\ \frac{\partial D''}{\partial \omega} - \frac{\partial D'}{\partial \omega} + D \sin \varphi \cos \varphi + D'' \tan \varphi = 0. \end{array} \right.$$

Date D, D', D'' , in funzione di φ e ω , purchè verifichino le [5], la superficie S corrispondente è unica (meno movimenti) e si ha per quadrature dalle [4].

La curvatura totale K e la media della S sono:

$$[6] \quad K = \frac{\cos^2 \varphi}{DD'' - D'^2}, \quad H = -\frac{D \cos^2 \varphi + D''}{DD'' - D'^2}.$$

I coefficienti della prima forma fondamentale di S , che dà il quadrato del suo elemento lineare,

$$[7] \quad ds^2 = E d\varphi^2 + 2F d\varphi d\omega + G d\omega^2,$$

si esprimono per mezzo di quelli della seconda forma, e si ha:

$$[8] \quad \left\{ \begin{array}{l} E = D^2 + D'^2 \sec^2 \varphi, \\ F = D'(D + D' \sec^2 \varphi), \\ G = D'^2 + D''^2 \sec^2 \varphi. \end{array} \right.$$

(Dalla seconda di esse segue facilmente il teorema del MINDING).

L'equazione differenziale delle geodetiche è

$$[9] \quad d\varphi d^2\omega - d\omega d^2\varphi + \left\{ \begin{array}{l} 1 \ 1 \\ 2 \end{array} \right\} d\varphi^3 + \left(2 \left\{ \begin{array}{l} 1 \ 2 \\ 2 \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} 1 \ 1 \\ 1 \end{array} \right\} \right) d\varphi^2 d\omega + \\ + \left(\left\{ \begin{array}{l} 2 \ 2 \\ 2 \end{array} \right\} - 2 \left\{ \begin{array}{l} 1 \ 2 \\ 1 \end{array} \right\} \right) d\varphi d\omega^2 - \left\{ \begin{array}{l} 2 \ 2 \\ 1 \end{array} \right\} d\omega^3 = 0,$$

dove i simboli di CHRISTOFFEL di 2^a specie, costruiti per la 1^a forma [7], ma espressi per D, D', D'' , dai quali più direttamente dipende la determinazione di S , sono

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \ 1 \\ 1 \end{array} \right\} = \frac{D' \frac{\partial D}{\partial \varphi} + D' \frac{\partial D}{\partial \omega} + 2 D' \frac{\partial D'}{\partial \varphi}}{D' - D'^2},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \ 1 \\ 2 \end{array} \right\} = \frac{-D' \frac{\partial D}{\partial \varphi} + 2 D \frac{\partial D'}{\partial \varphi} - D \frac{\partial D}{\partial \omega}}{DD'' - D'^2},$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix} &= \frac{D'' \frac{\partial D}{\partial \omega} - D' \frac{\partial D''}{\partial \varphi}}{DD'' - D'^2}, \\ \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{Bmatrix} &= \frac{D \frac{\partial D''}{\partial \varphi} - D' \frac{\partial D}{\partial \omega}}{DD'' - D'^2} + \tan \varphi, \\ \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix} &= \frac{-D'' \left(\frac{\partial D''}{\partial \omega} - 2 \frac{\partial D'}{\partial \omega} + \frac{\partial D''}{\partial \varphi} \right)}{DD'' - D'^2} - \sin \varphi \cos \varphi, \\ \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{Bmatrix} &= \frac{D \frac{\partial D''}{\partial \omega} + D' \frac{\partial D''}{\partial \varphi} - 2 D' \frac{\partial D'}{\partial \omega}}{DD'' - D'^2}. \end{aligned}$$

3. RISOLUZIONE DEL PROBLEMA. — Condizione necessaria e sufficiente affinchè le ω siano geodetiche, come si vede dalla [9], è che si abbia

$$\begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{Bmatrix} = 0,$$

cioè, per le [10]:

$$[11] \quad -D' \frac{\partial D}{\partial \varphi} + 2D \frac{\partial D'}{\partial \varphi} - D \frac{\partial D}{\partial \omega} = 0.$$

Trattiamo subito due casi particolari.

1° Caso: $D' = 0$. — La 1ª delle [5] dà allora

$$\frac{\partial D}{\partial \omega} = 0,$$

sicchè la [11] è senz'altro soddisfatta. Le due equazioni [5] sono in questo caso di facile integrazione e si trova:

$$[12] \quad D = D(\varphi) \quad , \quad D' = \left(f(\omega) - \int D(\varphi) d\varphi \right) \cos \varphi,$$

essendo D una funzione arbitraria di φ e $f(\omega)$ una funzione arbitraria di ω . Poichè $D' = 0$ implica $F = 0$, il sistema geografico delle linee φ e ω coincide con il doppio sistema delle linee di curvatura: con questo stesso sistema coincidono le linee Est e Nord, e poichè le linee Est sono sempre piane, in piani perpendicolari alla direzione fissa scelta (asse z), le superficie S corrispondenti sono caratterizzate dalla proprietà di avere un sistema di linee di curvatura in piani paralleli: sono quindi le menzionate superficie di MONGE (cfr. la mia Memoria citata, § 15).

2° Caso: $D = 0$. — Anche in questo caso la [11] è senz'altro soddisfatta. Il sistema [5] dà subito

$$[13] \quad D' = \frac{f(\omega)}{\cos \varphi}, \quad D'' = f'(\omega) \sin \varphi + g(\omega) \cos \varphi,$$

dove $f(\omega)$ e $g(\omega)$ sono funzioni arbitrarie di ω . Le superficie sono in questo caso costituite dalle rigate gobbe:

$$[14] \quad \begin{cases} x = f(\omega) \tan \varphi \sin \omega + \int g(\omega) \sin \omega d\omega, \\ y = -f(\omega) \tan \varphi \cos \omega - \int g(\omega) \cos \omega d\omega, \\ z = -\int f(\omega) d\omega. \end{cases}$$

Le linee ω sono rette e assintotiche.

Veniamo al caso generale: $D \neq 0$, $D' \neq 0$. — Si tratta allora d'integrare il sistema delle tre equazioni [5] e [11]. Moltiplicando la 1ª delle [5] per D e sommando a membro a membro con la [11], si ottiene la combinazione integrabile

$$D' \frac{\partial D}{\partial \varphi} - D \frac{\partial D'}{\partial \varphi} - DD' \tan \varphi = 0.$$

Questa infatti si può scrivere

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{D}{D'} \right) = \frac{D}{D'} \tan \varphi,$$

dalla quale si trae

$$[15] \quad D' = f(\omega) \cos \varphi \cdot D,$$

dove $f(\omega)$ è una funzione arbitraria di ω .

La [15] si sarebbe potuto ottenere immediatamente, giovandosi delle formole della metrica angolare della S e tenendo presente che le superficie S sono anche caratterizzate dal fatto (n. 1), che le linee d'eguale longitudine sono traiettorie isogonali delle linee Est o Nord. (Cfr. la mia Memoria, formole [103]). Tenendo conto della [15], la 1ª delle [5] diventa

$$f(\omega) \cos \varphi \frac{\partial D}{\partial \varphi} - \frac{\partial D}{\partial \omega} = 2f(\omega) \sin \varphi \cdot D,$$

che è una equazione a derivate parziali lineari del 1° ordine.

Ponendo

$$v = \log D,$$

l'equazione diviene

$$[16] \quad f(\omega) \cos \varphi \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\partial v}{\partial \omega} = 2f(\omega) \sin \varphi.$$

Il sistema ausiliario di equazioni ordinarie del 1° ordine è

$$\frac{d\varphi}{f(\omega) \cos \varphi} = -d\omega = \frac{dv}{2f(\omega) \sin \varphi},$$

che ammette i due integrali primi

$$\begin{aligned} \log \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} + \int f(\omega) d\omega &= \text{costante}, \\ v + \log \cos^2 \varphi &= \text{costante}. \end{aligned}$$

Poniamo

$$[17] \quad u = \log \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} + \int f(\omega) d\omega.$$

L'integrale generale di [16] è allora

$$v + \log \cos^2 \varphi = \theta(u),$$

essendo θ una funzione arbitraria di u . Segue quindi,

$$[18] \quad D = \frac{e^{\theta(u)}}{\cos^2 \varphi}.$$

La seconda delle [5] diventa allora

$$\frac{\partial D''}{\partial \varphi} + D'' \tan \varphi = \frac{e^{\theta(u)}}{\cos \varphi} (f^2(\omega) + f'(\omega) - \sin \varphi),$$

e quindi

$$[19] \quad D'' = \cos \varphi \int \frac{e^{\theta(u)}}{\cos^2 \varphi} (\theta'(u) f^2(\omega) + f'(\omega) - \sin \varphi) d\varphi + g(\omega) \cos \varphi,$$

dove g è un'altra funzione arbitraria di ω .

Le [15], [18] e [19] risolvono il problema. Le corrispondenti superficie S saranno studiate in una prossima Nota.

Matematica. — *Sulla stabilità delle soluzioni per l'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti periodici* ⁽¹⁾.

Nota di GIULIO CALAMAI, presentata ⁽²⁾ da ENRICO BOMPIANI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

§ 1. *Sviluppo in serie degli integrali.* — Consideriamo la equazione differenziale, lineare, omogenea, del secondo ordine, a coefficienti periodici:

$$[1] \quad \ddot{x}(t) + p(t) \dot{x}(t) + q(t) x(t) = 0,$$

Le funzioni $p(t)$ e $q(t)$ continue, periodiche, di egual periodo ω , le supponiamo soddisfacenti alle condizioni:

$$[2] \quad p(t) \geq 0; \quad p(0) = 0; \quad q(t) \geq 0,$$

senza che sieno nulle in alcun tratto.

Poniamo per brevità di scrittura la [1] nella forma seguente:

$$[1_1] \quad \ddot{x}(t) = P[t; x(t), \dot{x}(t)],$$

dove:

$$[2] \quad P[t; x(t), \dot{x}(t)] = -p(t) \dot{x}(t) - q(t) x(t).$$

L'integrale della [1] determinato dai valori iniziali:

$$[3] \quad x(0) = x_0; \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

possiamo esprimerlo per approssimazioni successive, definendo le approssimazioni di ordine zero, mediante le formole:

$$[4] \quad x_0(t) = \dot{x}_0 t + x_0; \quad \dot{x}_0(t) = \dot{x}_0$$

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto Matematico della R. Università di Firenze.

⁽²⁾ Nell'Adunanza del 22 novembre 1941-XX.

e le approssimazioni successive mediante le formole ricorrenti:

$$[5] \quad \begin{cases} x_{i+1}(t) = x_0(t) + \int_0^t (t-\tau) P[\tau; x_i(\tau), \dot{x}_i(\tau)] d\tau, \\ \dot{x}_{i+1}(t) = \dot{x}_0 + \int_0^t P[\tau; x_i(\tau), \dot{x}_i(\tau)] d\tau. \end{cases} \quad (i=0, 1, 2 \dots).$$

L'integrale $x(t)$ della [1] è così determinato come limite della successione:

$$[6] \quad x_0(t); \quad x_1(t); \dots; x_i(t); \dots$$

perciò

$$[7] \quad x(t) = x_0(t) + [x_1(t) - x_0(t)] + [x_2(t) - x_1(t)] + \dots + [x_i(t) - x_{i-1}(t)] + \dots,$$

od anche, posto:

$$[8] \quad \Delta x_i(t) = x_i(t) - x_{i-1}(t), \quad (i=1, 2 \dots),$$

$$[7.] \quad x(t) = x_0(t) + \Delta x_1(t) + \dots + \Delta x_i(t) + \dots.$$

È a questo punto opportuno osservare, il che gioverà per il seguito, che lo sviluppo in serie [7] coincide, particolarizzando opportunamente i valori iniziali con quelli dati per due integrali della [1] in una nostra Nota precedente (¹). In tale Nota si consideravano due integrali particolari della [1] uno $f(t)$ determinato dalle condizioni iniziali

$$[9] \quad f(0) = 1, \quad \dot{f}(0) = 0;$$

l'altro $\varphi(t)$ determinato dalle condizioni iniziali:

$$[9.] \quad \varphi(0) = 1, \quad \dot{\varphi}(0) = 1,$$

e si ottenevano gli sviluppi:

$$[10] \quad f(t) = f_0(t) + f_1(t) + \dots + f_i(t) + \dots$$

$$[10.] \quad \varphi(t) = \varphi_0(t) + \varphi_1(t) + \dots + \varphi_i(t) + \dots$$

dove le $f_i(t)$ e le $\varphi_i(t)$ hanno espressioni indicate nella Nota citata.

È facile provare che le $\Delta x_i(t)$ coincidono colle $f_i(t)$, quando si ponga $x_0(t) = 1$, $\dot{x}_0(t) = 0$ e coincidono con le $\varphi_i(t)$, quando si ponga $x_0(t) = t$, $\dot{x}_0(t) = 1$.

(¹) Cfr. G. CALAMAI, *Sul sistema canonico di una classe di equazioni differenziali del secondo ordine, a coefficienti periodici*. « Rendiconti della R. Acc. Naz. dei Lincei » (6) (XIX), (1934), pagg. 360-366.

Dimostriamo per induzione.

Per $i = 0$ la cosa è evidente; per $i = 1$ otteniamo:

$$\begin{aligned}\Delta x_1(t) &= x_1(t) - x_0(t) = x_0(t) + \int_0^t (t-\tau) P[\tau; x_0(\tau) \dot{x}_0(\tau)] d\tau - x_0(t) = \\ &= \int_0^t (t-\tau) P[\tau; x_0(\tau), \dot{x}_0(\tau)] d\tau,\end{aligned}$$

ed essendo $x_0(t) = 1$, $\dot{x}_0(t) = 0$ abbiamo:

$$[11] \quad \Delta x_1(t) = - \int_0^t (t-\tau) q(\tau) d\tau = - \int_0^t d\tau \int_0^\tau q(s) ds = f_1(t);$$

quando sia invece $x_0(t) = t$, è:

$$\begin{aligned}[11_1] \quad \Delta x_1(t) &= - \int_0^t (t-\tau) \tau q(\tau) d\tau - \int_0^t (t-\tau) p(\tau) d\tau = \\ &= - \int_0^t d\tau \int_0^\tau s q(s) ds - \int_0^t d\tau \int_0^\tau p(s) ds = \varphi_1(t).\end{aligned}$$

Supponiamo adesso la proprietà valida per l'indice i e dimostriamo la proprietà valida per l'indice $i+1$. Abbiamo per ipotesi nel caso dell'integrale $f(t)$ definita dalle condizioni iniziali $f(0) = 1$, $\dot{f}(0) = 0$

$$\begin{aligned}[11_2] \quad \Delta x_{i+1}(t) &= x_{i+1}(t) - x_i(t) = \int_0^t (t-\tau) P[\tau; x_i(\tau) \dot{x}_i(\tau)] d\tau - \\ &- \int_0^t (t-\tau) P[\tau; x_{i-1}(\tau), \dot{x}_{i-1}(\tau)] d\tau = \\ &= \int_0^t (t-\tau) P[\tau; x_i(\tau) - x_{i-1}(\tau), \dot{x}_i(\tau) - \dot{x}_{i-1}(\tau)] d\tau = \\ &= \int_0^t (t-\tau) P[\tau; \Delta x_i(\tau), \Delta \dot{x}_i(\tau)] d\tau = \\ &= \int_0^t d\tau \int_0^\tau p(s) \Delta \dot{x}_i(s) ds - \int_0^t d\tau \int_0^\tau q(s) \Delta x_i(s) ds\end{aligned}$$

ed essendo per ipotesi $\Delta x_i(t) = \varphi_i(t)$ otteniamo:

$$[11_3] \quad \Delta x_{i+1}(t) = - \int_0^t d\tau \int_0^\tau p(s) \dot{f}_i(s) ds - \int_0^t d\tau \int_0^\tau q(s) f_i(s) ds = f_{i+1}(t).$$

Con procedimento analogo si dimostra essere $\Delta x_{i+1}(t) = \varphi_{i+1}(t)$, quando si prende $x_0(t) = t$.

§ 2 a. *Su alcune proprietà delle serie che rappresentano gli integrali.*

Ciò posto vogliamo dimostrare la seguente proprietà per la [1]: « Consideriamo l'integrale definito dalle condizioni iniziali [3]. Sieno per « la [1] verificate le condizioni:

« I. Le funzioni $p(t)$ e $q(t)$ sieno continue periodiche di egual « periodo ω ($\omega > 0$), e sieno soddisfatte le [2].

« II. In $(0, \omega)$ sia:

$$[12] \quad P[t; x_0(t), \dot{x}_0] = -p(t)\dot{x}_0 - q(t)[\dot{x}_0 t + x_0] < 0.$$

« III. In $(0, \omega)$ sia:

$$[13] \quad P[t; x_1(t), \dot{x}_1(t)] < 0$$

« Allora la successione delle approssimazioni successive è tale che « le $\Delta x_{2i}(t)$ e $\Delta \dot{x}_{2i}(t)$ sono positive mentre le $\Delta x_{2i+1}(t)$ e le $\Delta \dot{x}_{2i+1}(t)$ « sono negative; che le $x_{2i+1}(t)$ e $\dot{x}_{2i+1}(t)$ formano una successione cre- « scente e le $x_{2i}(t)$ e $\dot{x}_{2i}(t)$ una successione decrescente; e inoltre è:

$$|\Delta x_i(t)| > |\Delta x_{i+1}(t)|,$$

« per t variabile in $(0, \omega)$ ».

Per la dimostrazione cominciamo col porre:

$$[14] \quad \begin{cases} \lambda_0(t) = P[t; x_0(t), \dot{x}_0(t)], \\ \lambda_i(t) = P[t; x_i(t), \dot{x}_i(t)] - P[t; x_{i-1}(t), \dot{x}_{i-1}(t)], \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Ne risulta:

$$[15] \quad \begin{cases} \Delta x_{i+1}(t) = x_{i+1}(t) - x_i(t) = \int_0^t (t - \tau) \lambda_i(\tau) d\tau, & (i = 0, 1, 2, \dots), \\ \Delta \dot{x}_{i+1}(t) = \dot{x}_{i+1}(t) - \dot{x}_i(t) = \int_0^t \lambda_i(\tau) d\tau, & (i = 0, 1, 2, \dots), \end{cases}$$

ed è opportuno per il seguito notare che $\lambda_i(t)$ per $i \geq 1$ può mettersi anche nella forma seguente:

$$[16] \quad \lambda_i(t) = -p(t)\Delta \dot{x}_i(t) - q(t)\Delta x_i(t), \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Ciò posto, per le nostre ipotesi è $\lambda_0(t) < 0$, quindi dalle [15] per $i = 0$, otteniamo:

$$[15_1] \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta x_1(t) = \int_0^t (t-\tau) \lambda_0(\tau) d\tau, \\ \Delta \dot{x}_1(t) = \int_0^t \lambda_0(\tau) d\tau, \end{array} \right.$$

e perciò $\Delta x_1(t)$ e $\Delta \dot{x}_1(t)$ sono entrambi minori di zero, in $(0, \omega)$.

Poniamo adesso nella [16] $i = 1$; otteniamo:

$$[16_1] \quad \lambda_1(t) = -p(t) \Delta \dot{x}_1(t) - q(t) \Delta x_1(t)$$

e perciò risulta $\lambda_1(t) > 0$, in $(0, \omega)$.

Facendo poi nelle [15] $i = 1$, si ricava $\Delta x_2(t) > 0$ e $\Delta \dot{x}_2(t) > 0$, e con procedimento di induzione ne ricaviamo che in $(0, \omega)$ è

$$[17] \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Delta x_{2i}(t) > 0 & ; \quad \Delta \dot{x}_{2i}(t) > 0; \\ \Delta x_{2i+1}(t) < 0 & ; \quad \Delta \dot{x}_{2i+1}(t) < 0; \end{array} \right.$$

ovvero ⁽¹⁾.

$$[17_1] \quad \left\{ \begin{array}{l} x_0(t) > x_1(t); x_1(t) < x_2(t); \dots; x_{2i}(t) > x_{2i+1}(t); x_{2i+1}(t) < x_{2i+2}(t); \dots \\ \dot{x}_0 > \dot{x}_1(t); \dot{x}_1(t) < \dot{x}_2(t); \dots; \dot{x}_{2i}(t) > \dot{x}_{2i+1}(t); \dot{x}_{2i+1}(t) < \dot{x}_{2i+2}(t); \dots \end{array} \right.$$

Rimane così dimostrata la prima parte del teorema.

Poniamo adesso:

$$[18] \quad \left\{ \begin{array}{ll} \bar{\Delta} x_i(t) = x_i(t) - x_{i-2}(t), & (i = 2, 3, \dots), \\ \bar{\Delta} \dot{x}_i(t) = \dot{x}_i(t) - \dot{x}_{i-2}(t); & (i = 2, 3, \dots), \end{array} \right.$$

abbiamo:

$$[19] \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\Delta} x_2(t) = x_2(t) - x_0(t) = \int_0^t (t-\tau) P[\tau; x_1(\tau), \dot{x}_1(\tau)] d\tau, \\ \bar{\Delta} \dot{x}_2(t) = \dot{x}_2(t) - \dot{x}_0 = \int_0^t P[\tau; x_1(\tau), \dot{x}_1(\tau)] d\tau, \end{array} \right.$$

e per la ipotesi [13] sono entrambe $\bar{\Delta} x_2(t)$ e $\bar{\Delta} \dot{x}_2(t)$ negative.

⁽¹⁾ Una dimostrazione analoga a quella seguita fin qui è data da MAKSOUDOFF GAJAS per le equazioni di primo ordine. Cfr. MAKSOUDOFF GAJAS, *La comparaison des intégrales successives de M. Picard avec l'intégrale cherchée*. « Bull. des Sciences Mathématiques » (2), 1934 (48), pagg. 236-240.

In generale poi abbiamo:

$$[20] \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{\Delta} x_{2i+2}(t) &= x_{2i+2}(t) - x_{2i}(t) = \int_0^t (t-\tau) \{ P[\tau; x_{2i+1}(\tau), \dot{x}_{2i+1}(\tau)] - \\ &\quad - P[\tau; x_{2i-1}(\tau), \dot{x}_{2i-1}(\tau)] \} d\tau, \\ \bar{\Delta} \dot{x}_{2i+2}(t) &= \dot{x}_{2i+2}(t) - \dot{x}_{2i}(t) = \int_0^t \{ P[\tau; x_{2i+1}(\tau), \dot{x}_{2i+1}(\tau)] - \\ &\quad - P[\tau; x_{2i-1}(\tau), \dot{x}_{2i-1}(\tau)] \} d\tau. \end{aligned} \right.$$

Avendosi poi:

$$[21] \quad \begin{aligned} P[t; x_{2i+1}(t), \dot{x}_{2i+1}(t)] - P[t; x_{2i-1}(t), \dot{x}_{2i-1}(t)] = \\ = -p(t) \bar{\Delta} \dot{x}_{2i+1}(t) - q(t) \bar{\Delta} x_{2i+1}(t) \end{aligned}$$

otteniamo:

$$[22] \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{\Delta} x_{2i+2}(t) &= - \int_0^t (t-\tau) [p(\tau) \bar{\Delta} \dot{x}_{2i+1}(\tau) + q(\tau) \bar{\Delta} x_{2i+1}(\tau)] d\tau, \\ \bar{\Delta} \dot{x}_{2i+2}(t) &= - \int_0^t [p(\tau) \bar{\Delta} \dot{x}_{2i+1}(\tau) + q(\tau) \bar{\Delta} x_{2i+1}(\tau)] d\tau. \end{aligned} \right.$$

Analogamente:

$$[23] \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{\Delta} x_{2i+1}(t) &= - \int_0^t (t-\tau) [p(\tau) \bar{\Delta} \dot{x}_{2i}(\tau) + q(\tau) \bar{\Delta} x_{2i}(\tau)] d\tau, \\ \bar{\Delta} \dot{x}_{2i+1}(t) &= - \int_0^t [p(\tau) \bar{\Delta} \dot{x}_{2i}(\tau) + q(\tau) \bar{\Delta} x_{2i}(\tau)] d\tau. \end{aligned} \right.$$

Applichiamo successivamente le [22] e [23] facendovi ($i = 1, 2, \dots$); per $i = 1$ otteniamo dalle [23]:

$$[24] \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{\Delta} x_3(t) &= - \int_0^t (t-\tau) [p(\tau) \bar{\Delta} \dot{x}_2(\tau) + q(\tau) \bar{\Delta} x_2(\tau)] d\tau > 0, \\ \bar{\Delta} \dot{x}_3(t) &= - \int_0^t [p(\tau) \bar{\Delta} \dot{x}_2(\tau) + q(\tau) \bar{\Delta} x_2(\tau)] d\tau > 0, \end{aligned} \right.$$

per le [19]. Facendo poi nelle [22] $i = 1$ otteniamo:

$$[25] \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{\Delta} x_4(t) &= - \int_0^t (t-\tau) [p(\tau) \bar{\Delta} \dot{x}_3(\tau) + q(\tau) \bar{\Delta} x_3(\tau)] d\tau < 0, \\ \bar{\Delta} \dot{x}_4(t) &= - \int_0^t [p(\tau) \bar{\Delta} \dot{x}_3(\tau) + q(\tau) \bar{\Delta} x_3(\tau)] d\tau < 0. \end{aligned} \right.$$

per le [24]. In generale poi per t variabile in $(0, \omega)$ si trovano le disuguaglianze:

$$[26] \quad \begin{cases} \bar{\Delta} x_{2i}(t) < 0 & ; & \bar{\Delta} \dot{x}_{2i}(t) < 0; \\ \bar{\Delta} x_{2i+1}(t) > 0; & \bar{\Delta} \dot{x}_{2i+1}(t) > 0. \end{cases}$$

e se ne ricava quindi che le successioni delle $x_{2i}(t)$ e $\dot{x}_{2i}(t)$ sono decrescenti, mentre quelle delle $x_{2i+1}(t)$ e $\dot{x}_{2i+1}(t)$ sono crescenti, e rimane quindi dimostrata la seconda parte del teorema.

Infine osserviamo che

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} x_{2i}(t) = x_{2i}(t) - x_{2i-2}(t) &= [x_{2i}(t) - x_{2i-1}(t)] + [x_{2i-1}(t) - x_{2i-2}(t)] = \\ &= \Delta x_{2i}(t) + \Delta x_{2i-1}(t), \end{aligned}$$

ma essendo $\bar{\Delta} x_{2i}(t) < 0$, $\Delta x_{2i}(t) > 0$, $\Delta x_{2i-1}(t) < 0$, segue

$$|\Delta x_{2i-1}(t)| > |\Delta x_{2i}(t)|,$$

e analogamente è:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} x_{2i-1}(t) &= [x_{2i-1}(t) - x_{2i-2}(t)] + [x_{2i-2}(t) - x_{2i-3}(t)] = \\ &= \Delta x_{2i-1}(t) + \Delta x_{2i-2}(t); \end{aligned}$$

ma essendo $\bar{\Delta} x_{2i-1}(t) > 0$, $\Delta x_{2i-1}(t) < 0$, $\Delta x_{2i-2}(t) > 0$, segue

$$|\Delta x_{2i-2}(t)| > |\Delta x_{2i-1}(t)|,$$

e quindi in generale segue la formula:

$$[27] \quad |\Delta x_i(t)| > |\Delta x_{i+1}(t)|,$$

e rimane così dimostrata la terza parte del teorema.

Tenuto conto del significato delle Δ e $\bar{\Delta}$ dato dalle [8] e [18] e delle [26] si ha:

$$[28] \quad x_{2i}(t) > x(t) > x_{2i+1}(t),$$

Analoghe proprietà valgono per le derivate.

§ 2 b. Le proprietà ora dimostrate valgono anche per le funzioni $f_n(t)$ e $\varphi_n(t)$, le quali non sono che casi speciali delle Δx_i ottenuti dando particolari valori alle costanti iniziali x_0 e \dot{x}_0 , quando sieno verificate le condizioni [12] e [13] oltre le condizioni $p(t) \geq 0$, $q(t) \geq 0$ e ora ci proponiamo di trovare le condizioni sufficienti per $p(t)$ e $q(t)$ perchè le [12] e [13] sieno verificate.

Per le $f_n(t)$ deve essere:

$$P[t; x_0(t), \dot{x}_0] = -p(t) \dot{x}_0 - q(t) x_0(t) = -q(t) < 0$$

verificata per ipotesi.

Per le $\varphi_n(t)$ deve essere analogamente:

$$-p(t) - q(t)t < 0$$

anch'essa verificata.

La condizione [13]

$$P[t; x_1(t), \dot{x}_1(t)] = -p(t)\dot{x}_1(t) - q(t)x_1(t) < 0$$

si esprime in generale così:

$$[30] \quad -p(t) \left\{ \dot{x}_0 + \int_0^t [-p(\tau)\dot{x}_0 - q(\tau)x_0(\tau)] d\tau \right\} - q(t) \{ x_0(t) + \\ + \int_0^t (t-\tau) [-p(\tau)\dot{x}_0 - q(\tau)x_0(\tau)] d\tau \} < 0.$$

Nel caso particolare della $f(t)$ essa diviene:

$$p(t) \int_0^t q(\tau) d\tau - q(t) + q(t) \int_0^t (t-\tau) q(\tau) d\tau < 0$$

ovvero:

$$p(t) \int_0^t q(\tau) d\tau - q(t) + q(t) \int_0^t q(\tau) d\tau - q(t) \int_0^t \tau q(\tau) d\tau < 0;$$

questa è soddisfatta quando sia separatamente:

$$[31] \quad 1 > t \int_0^t q(\tau) d\tau,$$

e

$$[31_a] \quad p(t) < q(t) \frac{\int_0^t \tau q(\tau) d\tau}{\int_0^t q(\tau) d\tau}.$$

La condizione [30] per l'integrale $\varphi(t)$ diviene:

$$-p(t) \left\{ 1 + \int_0^t [-p(\tau) - \tau q(\tau)] d\tau \right\} - \\ - q(t) \left\{ t + \int_0^t (t-\tau) [-p(\tau) - \tau q(\tau)] d\tau \right\} < 0$$

la quale è soddisfatta quando sia separatamente:

$$t \geq \int_0^t (t-\tau) [\tau q(\tau) + p(\tau)] d\tau,$$

e

$$1 > \int_0^t [\tau q(\tau) + p(\tau)] d\tau.$$

Di queste due ultime la prima è verificata per $t = 0$, e poichè

$$\frac{d}{dt} \left[t - \int_0^t (t - \tau) [\tau q(\tau) + p(\tau)] d\tau \right] = 1 - \int_0^t [\tau q(\tau) + p(\tau)] d\tau,$$

basterà che si abbia:

$$[31_2] \quad \int_0^t [\tau q(\tau) + p(\tau)] d\tau < 1,$$

che rimane come unica condizione.

Colla simultanea verifica delle $[31]$, $[31_1]$ e $[31_2]$ abbiamo così assicurato la validità delle condizioni $[12]$ e $[13]$, e quindi la applicabilità delle disuguaglianze $[27]$, $[28]$ e $[17]$, quando si faccia in esse $\Delta x_i(t) = f_i(t)$ oppure $\Delta x_i(t) = \varphi_i(t)$.

§ 3. *Condizioni sufficienti di stabilità degli integrali.* — Andiamo a considerare adesso la equazione caratteristica della $[1]$ che nella Nota citata ⁽¹⁾ avevamo posto nella forma:

$$[32] \quad s^2 - As + e^{\int_0^\omega p(t) dt} = 0,$$

in cui A aveva la espressione:

$$[33] \quad A = 2 + \sum_1^\infty [f_i(\omega) + \dot{\varphi}_i(\omega)].$$

Il discriminante della $[32]$ è:

$$\Delta = A^2 - 4e^{\int_0^\omega p(t) dt},$$

e, quando esso sia negativo, l'equazione caratteristica ammette due solu-

zioni immaginarie coniugate di modulo eguale ad $e^{-\frac{1}{2} \int_0^\omega p(t) dt} < 1$; quindi l'equazione ammette due integrali formanti un sistema fondamentale tendenti a zero quando t tende ad ∞ , e le soluzioni sono perciò stabili.

(1) Cfr. G. CALAMAI, nota cit.

Perchè sia $\Delta < 0$, deve essere

$$[34] \quad |A| < 2e^{-\frac{1}{2} \int_0^{\omega} p(t) dt}.$$

E qui conviene notare che per le cose dette in § 2 si ha:

$$f_i(\omega) + \dot{\phi}_i(\omega) = (-1)^i |f_i(\omega) + \dot{\phi}_i(\omega)|,$$

ed

$$|f_i(\omega) + \dot{\phi}_i(\omega)| > |f_{i+1}(\omega) + \dot{\phi}_{i+1}(\omega)|,$$

e quindi

$$[35] \quad 0 < |A| < 2 + f_4(\omega) + \dot{\phi}_1(\omega) + f_2(\omega) + \dot{\phi}_2(\omega).$$

d'altra parte è per la [31₂] $\int_0^{\omega} p(t) dt < 1$, e in definitiva la [34] sarà soddisfatta quando sia:

$$[36] \quad 2 + f_1(\omega) + \dot{\phi}_1(\omega) + f_2(\omega) + \dot{\phi}_2(\omega) < 2 - \int_0^{\omega} p(t) dt,$$

ossia

$$[37] \quad [f_1(\omega) + f_2(\omega)] + \left[- \int_0^{\omega} tq(t) dt + \dot{\phi}_2(\omega) \right] < 0,$$

La somma $f_1(\omega) + f_2(\omega)$ è certamente negativa come si è già dimostrato essendo $f_1(\omega) < 0$ ed $|f_1(\omega)| > |f_2(\omega)|$. Basterà quindi che risulti

negativa $\dot{\phi}_2(\omega) - \int_0^{\omega} tq(t) dt$ cioè:

$$\begin{aligned} \int_0^{\omega} tq(t) dt &> \int_0^{\omega} q(t) dt \int_0^t (t-\tau) [\tau q(\tau) + p(\tau)] d\tau + \\ &+ \int_0^{\omega} p(t) dt \int_0^t [\tau q(\tau) + p(\tau)] d\tau; \\ \int_0^{\omega} tq(t) dt &+ \int_0^{\omega} q(t) dt \int_0^t \tau [\tau q(\tau) + p(\tau)] d\tau > \\ &> \int_0^{\omega} tq(t) dt \int_0^t [\tau q(\tau) + p(\tau)] d\tau + \int_0^{\omega} p(t) dt \int_0^t [\tau q(\tau) + p(\tau)] d\tau. \end{aligned}$$

Avendo supposto per la [31₂] $\int_0^{\omega} [\tau q(\tau) + p(\tau)] d\tau < 1$ è certamente

$$\int_0^{\omega} tq(t) dt > \int_0^{\omega} tq(t) dt \int_0^t [\tau q(\tau) + p(\tau)] d\tau,$$

ed è sufficiente che si abbia:

$$\int_0^{\omega} q(t) dt \int_0^t \tau [\tau q(\tau) + p(\tau)] d\tau > \int_0^{\omega} p(t) dt \int_0^t [\tau q(\tau) + p(\tau)] d\tau,$$

condizione soddisfatta se si ha:

$$q(t) \int_0^t \tau [\tau q(\tau) + p(\tau)] d\tau > p(t) \int_0^t [\tau q(\tau) + p(\tau)] d\tau,$$

e per la [31₂]

$$p(t) < q(t) \int_0^t \tau [\tau q(\tau) + p(\tau)] d\tau,$$

e basterà imporre che sia:

$$[31_3] \quad p(t) < q(t) \int_0^t \tau^2 q(\tau) d\tau.$$

Concludiamo che *colla simultanea verifica delle condizioni*

$$p(t) \geq 0, \quad p(0) = 0, \quad q(t) \geq 0, \quad \text{in } (0, \omega)$$

senza che sieno nulle in alcun tratto;

$$[31] \quad t \int_0^t q(\tau) d\tau < 1, \quad \text{in } (0, \omega),$$

$$[31_1] \quad p(t) < q(t) \frac{\int_0^t \tau q(\tau) d\tau}{\int_0^t q(\tau) d\tau}, \quad \text{in } (0, \omega),$$

$$[31_2] \quad \int_0^t p(\tau) d\tau < 1 - \int_0^t \tau q(\tau) d\tau, \quad \text{in } (0, \omega),$$

$$[31_3] \quad p(t) < q(t) \int_0^t \tau^2 q(\tau) d\tau, \quad \text{in } (0, \omega),$$

l'equazione [1] ammette soluzioni stabili.

Matematica (Geometria algebrica). — *Funzioni intermedie e corrispondenze algebriche tra curve*. Nota di SALVATORE CHERUBINO, presentata ⁽¹⁾ dall'Accademico FRANCESCO SEVERI.

Dimostreremo in primo luogo il seguente teorema:

I. *Sopra una varietà abeliana V_p , di dimensione p , si considerino due sistemi di funzioni intermedie $\{A\}$ ed $\{M\}$ assegnati dalle forme riemanniane alternate principali e positive A ed M ammesse da una matrice (di RIEMANN) ω di periodi primitivi di V_p . Se M è modulare, mentre i divisori elementari (secondo FROBENIUS) di A sono gl'interi (assoluti) e_1, e_2, \dots, e_p , il cui prodotto è d ($\neq 0$), prendendo $h \leq p$ varietà distinte di $\{A\}$ e $p-h$ varietà distinte di $\{M\}$, il numero v_h dei loro punti d'intersezione, se finito, è eguale a*

$$h!(p-h)! d^h \sum \frac{1}{e_{s_1} e_{s_2} \dots e_{s_h}},$$

il sommatorio essendo esteso a tutte le combinazioni s_1, s_2, \dots, s_h degli indici $1, 2, \dots, p$ ad h ad h .

Ne discende facilmente la seguente generalizzazione di un noto teorema ⁽²⁾:

II. *Due curve algebriche C e D di genere $p > 1$ sono birazionalmente identiche se son legate da una corrispondenza non speciale T , ad indici (ovunque) finiti, che subordini su una di esse una serie γ_n^r tale che riunendo i suoi gruppi ad r ad r ($r \leq p$) si ottiene una γ_{rn}^r possedente $\binom{p}{r}$ gruppi (e non più) contenuti parzialmente in una serie lineare $g_{r(n-1)+p}^{r(n-1)}$ generica.*

Questo teorema vale quando i numeri v_h sono tutti finiti insieme al numero delle intersezioni di p varietà generiche del sistema $\lambda\{A\} + \mu\{I_n\}$.

⁽¹⁾ Nell'Adunanza del 22 novembre 1941-XX.

⁽²⁾ Già da me segnalato sotto ipotesi più particolari. Vedere le mie Note: a) *Qualche applicazione dell'indice di Kronecker*... [*« Ann. Sc. Norm. »* (1940)], n. 4; b) *Sulle corrispondenze algebriche tra curve* [*Ibidem* (1941)] fine del n. 5.

il che generalmente si verifica. Sempre con questa restrizione, vale anche l'altra proposizione:

III. Dicendo T e T^* le matrici degli interi caratteristici della corrispondenza di cui all'enunciato precedente, si consideri su C (su D) una serie γ_p^{p-h} avente per immagine, sulla relativa jacobiana, la intersezione di h varietà intermedie del sistema $\{T_{-1} I_0 T^*\}$ (del sistema $\{T_{-1} I_0 T\}$). Se questa ha $p!$ gruppi (e non più) a comune con $p-h$ serie lineari g_{2p-1}^{p-1} , le due curve sono birazionalmente equivalenti.

Il passaggio dal primo al secondo teorema si ottiene mercè la seguente osservazione ⁽¹⁾:

le radici caratteristiche di $-I_0 A$ (del prodotto TT^* , nel caso delle curve) coincidono coi divisori elementari di A , ciascuno contato due volte.

1. Per calcolare il numero v_r ricordiamo che, com'è stato osservato da H. POINCARÉ ⁽²⁾, questo numero non dipende dai periodi, cioè dalla matrice ω . Possiamo quindi riferirci ad una matrice di Riemann particolare.

Ponendo

$$e = \begin{pmatrix} e_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e_p \end{pmatrix}, \quad E = \left(\begin{array}{c|c} 0 & e \\ \hline -e & 0 \end{array} \right)$$

sappiamo che esistono (almeno) una matrice unimodulare H ed un'altra K , per le quali si ha:

$$[1] \quad A = H E H_{-1}, \quad M = K I_0 K_{-1}; \quad I_0 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline -I & 0 \end{array} \right),$$

I indicando la matrice identica di ordine p . Inoltre, per una opportuna scelta delle matrici α e β complesse, non degeneri, di ordine p , si potrà porre

$$[2] \quad \alpha \omega H = (e^{-1} | \tau), \quad \beta \omega K = (I | \sigma).$$

L'ipotesi particolare che supporremo verificata da ω è che risulti $\sigma = \tau$, questa τ essendo la solita matrice complessa, simmetrica, che compare nella teoria delle funzioni theta.

Siamo così condotti a considerare, come trasformati dei sistemi $\{A\}$ ed $\{M\}$, il sistema $\{E\}$ sulla varietà abeliana V_p legata alla matrice $\omega' = (e^{-1} | \tau)$ ed il sistema $\{I_0\}$ sulla varietà abeliana V_p^* appartenente alla matrice $\omega^* = (I | \tau)$.

⁽¹⁾ Che vale con le stesse restrizioni dei teoremi II e III.

⁽²⁾ *Sur les fonctions θ* ; [« Bull. Math. Fr. », XI (1882-83)], pagg. 130-131.

Indichiamo con

$$v = (v_1, v_2, \dots, v_p)_{-1} \quad , \quad v^* = v_1^*, v_2^*, \dots, v_p^*_{-1}$$

i p -complessi dei parametri delle varietà V'_p , V_p^* ed osserviamo che si ha

$$[3] \quad \omega^* = \omega' \left(\begin{array}{c|c} e & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right).$$

Perciò, ponendo

$$[4] \quad v \equiv v^* + c \quad (\text{mod. } \omega')$$

ove c è un p -complesso verticale costante, fra V'_p e V_p^* si ha una trasformazione algebrica mediante la quale la prima di queste varietà vien rappresentata su l'altra da un'involuzione \mathfrak{A}_d , di ordine $d = |e|$.

Precisamente, al punto $v - c$ di V'_p corrisponde su V_p^* il gruppo di d punti

$$[5] \quad \left\{ \begin{array}{l} v^* \equiv (v - c) + \left(\frac{m_1^*}{e_1}, \frac{m_2^*}{e_2}, \dots, \frac{m_p^*}{e_p} \right)_{-1}, \quad (\text{mod. } \omega^*) \\ m_s^* = 0, 1, \dots, e_s - 1, \quad (s = 1, 2, \dots, p). \end{array} \right.$$

Ciò si riconosce subito osservando che dalla [4] si ha

$$v^* = (v - c) + \omega'(m|n)_{-1}$$

con m ed n due p -complessi orizzontali di interi relativi arbitrari, mentre si ha

$$\bullet \quad \omega'(m|n)_{-1} = e^{-1} m_{-1} + \tau n_{-1} \equiv e^{-1} m_{-1} \quad (\text{mod. } \omega^*).$$

Ad un punto di V_p^* corrisponde invece un punto solo di V'_p .

Dopo di che, le varietà intermedie del sistema $\{E\}$ di V'_p , ossia quelle del sistema $\{A\}$ di V_p , verranno rappresentate su V_p^* da equazioni del tipo ⁽¹⁾

$$\Theta_d(v^* - c) = 0,$$

ove Θ_d è una funzione theta di ordine d della matrice ω^* , la quale, oltre che alle relazioni

$$[6] \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta_d(v_1^*, \dots, v_s^* + 1, \dots, v_p^*) = \Theta_d(v_1^*, \dots, v_p^*) \quad (s = 1, 2, \dots, p) \\ \Theta_d(v_1^* + \tau_{1s}, \dots, v_p^* + \tau_{ps}) = \Theta_d(v_1^*, \dots, v_p^*) \cdot e^{-2\pi i d v_s^* + v_s}, \end{array} \right.$$

⁽¹⁾ G. CASTELNUOVO, *Sulle funzioni abeliane*. [« Rend. Lincei », 1921], Nota I. n. 4.

(ove le $v_s, s = 1, 2, \dots, p$, son costanti scalari) soddisferà anche alle

$$[6^*] \quad \Theta_d(v_1^*, \dots, v_s^* + \frac{1}{e_s}, \dots, v_p^*) = \Theta_d(v_1^*, \dots, v_p^*) \quad (s = 1, 2, \dots, p).$$

Le varietà del sistema $\{M\}$ di V_p passano birazionalmente, su V_p^* , in quelle del sistema $\{I_0\}$ rappresentate da equazioni come

$$\Theta_1(v^* - c) = 0,$$

ove Θ_1 è una funzione theta del prim'ordine della matrice ω^* .

2. Consideriamo h varietà del sistema $\{E\}$ di V_p' , rappresentate su V_p^* dalle equazioni:

$$[7] \quad \Theta_d(v^* - c^{(s)}) = 0, \quad (s = 1, 2, \dots, h)$$

e corrispondenti ad altrettante del sistema $\{A\}$ di V_p , insieme a $p - h$ varietà

$$[8] \quad \Theta_t(v^* - c^{(t)}) = 0 \quad (t = 1, 2, \dots, p - h)$$

del sistema $\{I_0\}$ di V_p^* , trasformate birazionali (causa la seconda delle [2]) di altrettante varietà di $\{M\}$ su V_p .

Com'è noto ⁽¹⁾, agli effetti del nostro computo si può ritenere che le [7]-[8] ammettono le soluzioni comuni

$$[9] \quad v^* \equiv (c_1^{(s_1)}, \dots, c_h^{(s_h)} | c_{h+1}^{(t_1)}, \dots, c_p^{(t_{p-h})})_{-1} + \\ + \frac{1}{2} \left(\tau_{11} + \frac{1}{d}, \dots, \tau_{hh} + \frac{1}{d} | \tau_{h+1, h+1} + 1, \dots, \tau_{pp} + 1 \right)_{-1} + \\ + \frac{1}{d} (\lambda_1, \dots, \lambda_h | 0, \dots, 0)_{-1}, \quad (\text{mod. } \omega^*)$$

$$\lambda_s = 0, 1, 2, \dots, d - 1, \quad (s = 1, 2, \dots, h)$$

nelle quali

$$s_1, \dots, s_h, \quad t_1, \dots, t_{p-h}$$

variano, rispettivamente, nelle $h!$ e $(p - h)!$ permutazioni degl'indici $1, 2, \dots, h$ ed $h + 1, h + 2, \dots, p$, mentre si è posto

$$c^{(s)} = (c_1^{(s)}, c_2^{(s)}, \dots, c_p^{(s)})_{-1} \quad (s = 1, 2, \dots, h)$$

$$c^{(t)} = (c_1^{(t)}, c_2^{(t)}, \dots, c_p^{(t)})_{-1} \quad (t = h + 1, h + 2, \dots, p)$$

e si è supposto che tanto i primi h che gli ultimi $p - h$ di questi p -complessi verticali costanti siano a due a due incongrui mod. ω^* .

⁽¹⁾ A. KRAZER, *Lehrbuch der Thetafunctionen*. [Lipsia, 1903], cap. I, § 6, teor. XLVIII, pag. 42.

In queste [9] le h varietà di $\{A\}$ risultano, come dev'essere, scambiabili fra loro in tutti i modi possibili e così pure, sempre fra loro, le $p-h$ varietà di $\{M\}$.

Calcoliamo ora il numero dei gruppi della involuzione \mathfrak{J}_d in cui si distribuiscono i punti [9]. A tale scopo, indichiamo con m_s, r_s il quoziente intero ed il resto della divisione di λ_s per $\frac{d}{e_s}$, sicchè

$$\lambda_s = m_s \cdot \frac{d}{e_s} + r_s, \quad r_s < \frac{d}{e_s}.$$

Perchè λ_s vari da 0 a $d-1$ occorre prendere

$$m_s = 0, 1, \dots, e_s - 1, \quad r_s = 0, 1, \dots, \frac{d}{e_s} - 1$$

accoppiando ciascun valore di m_s con tutti quelli di r_s . Confrontando con le [5], si riconosce che le [9] danno gruppi distinti di \mathfrak{J}_d solo per valori distinti di ciascun r_s . Si conclude che, in corrispondenza ai divisori e_1, e_2, \dots, e_h , fra i punti [9] vi sono

$$h! (p-h)! \frac{d^h}{e_1 e_2 \dots e_h}$$

gruppi distinti di \mathfrak{J}_d . Prendendo h divisori e_1, e_2, \dots, e_p in tutti i modi possibili, il numero richiesto diventa quello indicato nell'enunciato I.

Per $h=p$, si hanno p varietà di $\{E\}$ che su V_p^* s'intersecano, com'è noto ⁽¹⁾, in $p! d^p$ punti. Tenendo presente la involuzione \mathfrak{J}_d rappresentatrice di V_p , si ha $v_p = p! d^{p-1}$, come si dedurrebbe dalla formola scritta di sopra.

Se A è anch'essa modulare, cioè $e_1 = e_2 = \dots = e_p = d = 1$, il sistema $\{E\}$ coincide con $\{I_n\}$ ed avendosi tutte funzioni di prim'ordine, lo stesso risultato noto ci assicura che $v_h = p!$ qualunque sia h , come appunto si otterrebbe dalla nostra formola.

3. I numeri v_h si possono calcolare anche altrimenti, seguendo un procedimento indicato dal CASTELNUOVO ⁽²⁾, che ci farà raggiungere un interessante risultato.

Abbiamo visto che le funzioni intermedie $\varphi(v^*)$ del sistema $\{E\}$, soddisfanno alle relazioni ⁽³⁾

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi\left(v_1^*, \dots, v_s^* + \frac{1}{e_s}, \dots, v_p^*\right) = \varphi(v_1^*, \dots, v_p^*) \\ \varphi(v_1^* + \tau_{1s}, \dots, v_p^* + \tau_{ps}) = \varphi(v_1^*, \dots, v_p^*) e^{-2\pi i \cdot d v_s^* + v_s} \quad (s=1, 2, \dots, p) \end{array} \right.$$

(1) Vedi A. KRAZER, loco citato poco fa, o la Nota di POINCARÉ, pure citata.

(2) *Sulle funzioni abeliane*. [« Rend. Lincei », 1921], Nota II, n. 6.

(3) Ripetendo e_s volte la prima di queste si ottiene la prima delle [6].

che possono riunirsi nella sola

$$[10] \quad \varphi(v^* + \omega_l) = \varphi(v^*) \cdot e^{-2\pi i \cdot \mu_l v^* + \nu_l} \quad (l = 1, 2, \dots, 2p)$$

ove ω_l indica la colonna l -esima di ω' e μ_l è il p -complesso orizzontale che si ottiene trasponendo la colonna l^{ma} della matrice

$$\mu = (0 | d \cdot I)$$

dove 0 è la matrice nulla, I quella identica, di ordine p .

Sotto questa forma sono più comodamente applicabili le osservazioni di cui alla Nota I del lavoro del CASTELNUOVO già due volte citato ⁽¹⁾.

Si tratta di tornare dalla varietà V_p' , legata ad ω' , alla V_p legata alla matrice ω .

Intanto la matrice degli interi caratteristici della funzione intermedia considerata è

$$E^* = \omega'_{-1} \mu - \mu_{-1} \omega' = -dE^{-1}.$$

Tornando alla matrice ω , ossia alla V_p , a causa della prima delle [2], la matrice ω' si moltiplica a destra per H^{-1} (ed a sinistra per α^{-1}) sicchè la E^* si muta in

$$A^* = H^{-1} E^* H^{-1} = -d(HEH^{-1})^{-1} = -dA^{-1},$$

che è la matrice degli interi caratteristici delle funzioni intermedie del sistema $\{A\}$ su V_p' .

Applicando lo stesso procedimento alle funzioni intermedie di $\{I_0\}$ su V_p^* , causa la seconda delle [1]–[2], si trova che la matrice degli interi caratteristici delle funzioni intermedie del sistema $\{M\}$ di V_p è $M^* = -M^{-1}$.

Supponiamo ora che sia stato preso ⁽²⁾ $M = I_0$, ed osserviamo che $I_0^* = I_0$. Allora su V_p , oltre ai sistemi di varietà intermedie $\{A\}$ ed $\{I_0\}$ esistono anche tutti quelli le cui matrici di interi caratteristici sono le ⁽³⁾

$$[11] \quad B^* = \lambda A^* + \mu I_0,$$

(con λ, μ interi relativi arbitrari) sistemi che potrebbero indicarsi $\lambda\{A\} + \mu\{I_0\}$. Sia Φ una varietà intermedia generica di $\{B\} = \lambda\{A\} +$

⁽¹⁾ Nella forma che interessa, queste osservazioni erano state riottenute nella mia Memoria: *Sul concetto di parità nella teoria delle varietà abeliane reali e su alcune sue applicazioni*. [« Atti R. Acc. Napoli », vol. XX, ser. 2^a (1933–XI)], p. II, § 2, nn. 7–8.

⁽²⁾ Ciò implica che $\omega I_0 \omega_{-1} = 0$, il che può sempre supporre, a meno di equivalenze di ω , ossia di trasformazioni birazionali di V_p .

⁽³⁾ Naturalmente, qui supponiamo che A non si riduca a λI_0 , con λ fattore scalare intero relativo. Il che implica che V_p , ossia ω , sia singolare (SCORZA).

+ $\mu \{I_0\}$, Φ_1 una di $\{A\}$ e Φ_2 una di $\{I_0\}$, mentre $\{\Phi_1^h, \Phi_2^{p-h}\}$ indica il numero delle intersezioni, *supposto finito*, di h varietà di $\{A\}$ con $p-h$ di $\{I_0\}$. Con notazione simbolica evidente, si potrà scrivere:

$$[\Phi^p] = [(\lambda \Phi_1 + \mu \Phi_2)^p] = [\Phi_1^p] \cdot \lambda^p + \binom{p}{1} [\Phi_1^{p-1}, \Phi_2] \lambda^{p-1} \mu + \\ + \binom{p}{2} [\Phi_1^{p-2}, \Phi_2^2] \lambda^{p-2} \mu^2 + \dots + [\Phi_2^p] \mu^p.$$

Da questa, indicando, con δ il pfaffiano di $B = -\delta B^*^{-1}$ e tenendo conto della involuzione \mathfrak{J}_d , si ottiene

$$[12] \quad p! \delta^{p-1} = \nu_p \lambda^p + \binom{p}{1} \nu_{p-1} \lambda^{p-1} \mu + \binom{p}{2} \nu_{p-2} \lambda^{p-2} \mu^2 + \dots + \nu_0 \mu^p.$$

D'altra parte, il pfaffiano di B^* , che è eguale a δ^{p-1} , a causa della [11] si scrive

$$[13] \quad \delta^{p-1} = j_p \lambda^p + j_{p-1} \lambda^{p-1} \mu + j_{p-2} \lambda^{p-2} \mu^2 + \dots + j_0 \mu^p,$$

da cui, per l'arbitrarietà degli interi λ e μ , paragonando con la [12] si ottiene

$$[14] \quad \nu_h = h! (p-h)! j_h, \quad (h = 0, 1, 2, \dots, p).$$

Orbene, dalla [11] si ha

$$-I_0 B^* = \lambda (-I_0 A^* + x I_{2p}) \quad , \quad x = \frac{\mu}{\lambda},$$

onde, poichè $|-I_0 B^*| = \delta^{2(p-1)}$, ponendo nella [13] $d = 1$ e cambiando segno ad x , si ricava:

$$[15] \quad |A^* - x I_0| = |-I_0 A^* - x I_{2p}| = (x^p - j_1 x^{p-1} + \\ + j_2 x^{p-2} - \dots + (-1)^p j_p)^2.$$

Poichè dalle [14] si ha

$$j_h = \sum e_{s_1}^* e_{s_2}^* \dots e_{s_h}^*,$$

ove il sommatorio ha il solito significato e dove si è posto

$$e_s^* = \frac{d}{e_s}, \quad (s = 1, 2, \dots, p),$$

la [15] ci assicura che

a) le radici caratteristiche di $-I_0 A^*$ sono i numeri $e_s^* = \frac{d}{e_s}$ ciascuno contato due volte ⁽¹⁾.

(1) Come segue subito dalla espressione di A^* , gli interi e_s^* ($s = 1, 2, \dots, p$) sono i divisori elementari di A^* .

Infine, avendosi

$$-AI_0 = d(-I_0 A^*)^{-1},$$

si ha che le radici caratteristiche di $-AI_0$ si ottengono moltiplicando per d le inverse di quelle di $-I_0 A^*$, ossia che:

b) le radici caratteristiche di $-AI_0$ coincidono coi divisori elementari di A ciascuno contato due volte.

Altrettanto può dirsi di $-I_0 A$ che ha lo stesso polinomio caratteristico di $-AI_0$.

OSSERVAZIONE. — Se A è una forma riemanniana alternata principale e positiva per ω , diversa da I_0 , ω è singolare ed ammette tutte le forme alternate $A - xI_0$, con x un intero relativo arbitrario. Prendendo x eguale ad un divisore elementare e di A , la forma $A - eI_0$ risulta degenerare, perchè si ha

$$|-I_0(A - eI_0)| = |-I_0 A - eI_{2p}| = 0.$$

Dunque ω è necessariamente *impura* (SCORZA) oppure i numeri v_h e $[\Phi^p]$ non son tutti finiti e le proposizioni a) e b) non si verificano.

In particolare, se i divisori elementari di A fossero tutti eguali (ad esempio se A è unimodulare, $\neq I_0$) l'omografia riemanniana $-I_0(A - eI_0)$ sarebbe pseudonulla e la ω dovrebbe essere impura con infiniti assi ⁽¹⁾ (ad esempio impura, priva di assi isolati). Altrimenti le proposizioni a) e b) cadrebbero in difetto e qualcuno dei numeri v_h o il $[\Phi^p]$ generico non sarebbe finito.

4. Consideriamo ora due curve C e D , di genere $p > 1$, ed una corrispondenza algebrica T non speciale, ad indici ovunque finiti, che subordini su esse due serie γ_n^1, γ_m^1 ciascuna birazionalmente identica all'altra curva.

Se diciamo ω, Ω le matrici dei periodi normali (cioè calcolati su retrosezioni della rispettiva riemanniana) di due sistemi fondamentali di integrali abeliani di prima specie (che possiamo supporre normalizzati su quelle retrosezioni) alla T sono associate (su quelle retrosezioni) due matrici T, T^* d'interi caratteristici, non degeneri e di ordine $2p$, per le quali si ha

$$[16] \quad \pi\omega = \Omega T_{-1}, \quad \pi^*\Omega = \omega T_{-1}^*,$$

ove π e π^* sono due matrici complesse, non degeneri, di ordine p , determinate dalle T, T^* . Fra queste ultime sussiste la relazione ⁽²⁾:

$$T^* = -I_0 T_{-1} I_0.$$

⁽¹⁾ G. SCORZA, *Le algebre di ordine qualunque e le matrici di Riemann*. [« Rend. Pal. », XL (1921)], p. II, § 5, n. 32, pag. 141.

⁽²⁾ Per questo simbolismo e queste relazioni vedi la mia Nota: *Identità birazionale di due curve algebriche*. [« Sem. Mat. di Roma » (1939-XVII)], § 1.

Le due matrici

$$A = T^* {}_1 I_0 T^* \quad , \quad B = T_{-1} I_0 T$$

danno due forme riemanniane alternate delle matrici di RIEMANN ω ed Ω che, come si è constatato altrove ⁽¹⁾, risultano principali e positive come la forma I_0 e danno perciò luogo, sulle varietà di JACOBI W_p e W_p^* di quelle curve, ai sistemi di varietà intermedie $\{A\}$ e $\{B\}$.

Le relazioni [16] individuano due classi di trasformazioni algebriche fra W_p e W_p^* . La prima porta il sistema $\{I_0\}$ di W_p in quello $\{B\}$ di W_p^* , la seconda porta il sistema $\{I_0\}$ di W_p^* in quello $\{A\}$ di W_p .

Il polinomio caratteristico comune ai due prodotti $TT^* = -I_0 A$ e $T^* T = -I_0 B$ è il quadrato del polinomio

$$\rho^n - i_1 \rho^{n-1} + i_2 \rho^{n-2} - \dots + (-1)^{n-1} i_{n-1} \rho + (-1)^n i_n$$

i cui coefficienti sono interi positivi dei quali il CASTELNUOVO ⁽²⁾ mise in luce un importante significato geometrico.

Precisamente, si ha che i_h , $h = 1, 2, \dots, p$, è l'indice della γ_{hn}^h di cui al teorema secondo, cioè il numero dei suoi gruppi appartenenti ad una serie lineare $g_{h(n-1)+p}^{h(n-1)}$ generica ⁽³⁾.

Se questo indice, per $h = r$, ove r è un intero fissato non maggiore di p , vale $\binom{p}{r}$, si avrà

$$i_r = \binom{p}{r} = \binom{p}{p-r}$$

onde, per la $b)$ del n. precedente, segue che è necessariamente

$$e_1 = e_2 = \dots = e_p = d = 1,$$

⁽¹⁾ S. CHERUBINO, *Dimostrazione algoritmica di un teorema di Torelli nel caso $p = 2$* . [In corso di stampa nei « Rend. Matem. di Roma »]. n. 4.

⁽²⁾ *Sulle funzioni abeliane*, già citata, Nota IV, n. 14. Non è forse inutile avvertire che quest'A. ha ommesso di assicurarsi che la forma A o B è principale e positiva, il che è indispensabile per l'esistenza dei sistemi di funzioni intermedie $\{A\}$ e $\{B\}$.

⁽³⁾ Il ragionamento col quale il CASTELNUOVO raggiunge questo significato di i_h è basato sulla particolarizzazione della curva C (vedi il n. 11 della Nota III) il che, all'A., non sembra privo di obiezioni. Noi riteniamo che questo timore non abbia ragione di essere perchè l'osservazione di POINCARÉ utilizzata al n. 1 assicura che può sempre ragionarsi, quando si tratti di enumerare intersezioni, su matrici di Riemann convenientemente specializzate. Inoltre ci sembra che possa senz'altro porsi la [39]. Nota III, del CASTELNUOVO, perchè nel computo delle intersezioni le h varietà che s'intersecano con la varietà fissa U_h debbono permutarsi fra loro in tutti i modi possibili.

quindi, per tutti i valori di h , risulta

$$i_h = \binom{p}{h}, \quad (h = 1, 2, \dots, p).$$

Avendosi $i_1 = p$, T subordina su ciascuna curva C o D una γ'_p di ordine ed indice p (equivalente alla rispettiva γ_n^1 o γ_m^1) onde, per un noto teorema ⁽¹⁾, la identità birazionale delle due curve è assicurata.

OSSERVAZIONE I. — Se l'indice di T su C potesse diventare infinito, cioè se qualche punto di D corrispondesse a tutti quelli di C , la serie γ_n^1 avrebbe qualche gruppo indeterminato ed il numero dei suoi gruppi appartenenti ad una g_{n-1+p}^{n-1} generica non sarebbe finito, onde il suo indice non potrebbe dirsi eguale ad i_1 . Analogamente su D e per tutte le γ_{hn}^h . La finitezza degli indici di T è dunque necessaria ⁽²⁾, insieme a quella dei v_h e del generico $[\Phi^p]$.

OSSERVAZIONE II. — La b) del n. 3 ci dice che le radici caratteristiche di TT'' coincidono coi divisori elementari di A , contati due volte e che le radici caratteristiche di $T''T$ coincidono coi divisori di B . Ma TT'' e $T''T$ hanno lo stesso polinomio caratteristico, dunque i divisori elementari di A coincidono con quelli di B .

5. Il teorema III ora è immediato, poichè la sua ipotesi equivale ad affermare che $v_r = p!$ il che, a norma del teor. I, accade allora e solo che i divisori elementari di A son tutti eguali ad uno. Cosicchè, per la b) del n. 3, si ha ancora $i_1 = p$.

⁽¹⁾ R. TORELLI, *Sulle varietà di Jacobi*. [« Rend. Lincei », 1913], Nota I, teor. I.

⁽²⁾ Per $r = p$, l'ipotesi del teorema II ci dice soltanto che T è unimodulare, ossia che le due curve hanno la stessa varietà di JACOBI, il che non è sempre sufficiente per la loro equivalenza birazionale. Questa condizione diventa sufficiente solo se tutti i numeri v_h sono finiti insieme al generico $[\Phi^p]$.

Matematica (Analisi matematica). — *Un'estensione di un lemma di Dirichlet*. Nota di LEOPOLDO NACHBIN, presentata ⁽¹⁾ dall'Accademico FRANCESCO SEVERI.

1. — Nella teoria delle serie trigonometriche si fa uso del teorema seguente (generalmente attribuito al *Dirichlet*):

Sia $f(x)$ una funzione reale (della variabile reale x) definita in un intervallo (a, b) e, in questo intervallo, limitata e integrabile. Se si indica con m un numero reale qualunque, i due integrali

$$\int_a^b f(x) \cdot \sin mx \cdot dx, \quad \int_a^b f(x) \cdot \cos mx \cdot dx$$

tendono a zero quando m cresce (in valore assoluto) indefinitamente.

Ora dimostreremo che la proposizione precedente può essere così generalizzata:

Sia $f(x)$ una funzione reale della variabile reale x , definita in un intervallo (a, b) e, in questo intervallo, limitata e integrabile. Sia, inoltre $\Phi(x)$ una funzione (reale) della stessa variabile x , definita in tutto l'intervallo $(-\infty, +\infty)$, periodica di periodo $\omega (> 0)$, limitata e integrabile in ogni intervallo finito dell'asse x . Se si indica con m un numero reale qualunque, l'integrale

$$[1] \quad \int_a^b f(x) \cdot \Phi(mx) \cdot dx$$

converge ad un limite L ben determinato quando m cresce (in valore assoluto) indefinitamente, e questo limite L è dato dalla relazione

$$[2] \quad L = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cdot \Phi(mx) \cdot dx = \left[\frac{1}{\omega} \int_{\lambda}^{\lambda+\omega} \Phi(x) \cdot dx \right] \cdot \left[\int_a^b f(x) \cdot dx \right],$$

nella quale λ è una costante reale (arbitraria). La prima delle due espressioni tra parentesi quadre, nel secondo membro della precedente equa-

(¹) Nell'Adunanza del 22 novembre 1941-XX.

zione, può denominarsi valore medio della funzione periodica $\Phi(x)$ (nel suo periodo). Indicheremo questo valore medio con $\bar{\Phi}$. La seconda delle due espressioni fra parentesi quadre è il prodotto della lunghezza $b-a$ dell'intervallo (a, b) per il valore medio \bar{f} della funzione $f(x)$ in questo intervallo. Sicchè il limite in parola può esprimersi colla formula

$$L = (b-a) \cdot \bar{\Phi} \cdot \bar{f}.$$

Per dimostrare il teorema supporremo che sia $a < b$; il che non costituisce una limitazione essenziale.

2. - Cominciamo ad esaminare un caso particolare; precisamente supponiamo che $f(x)$ sia, nell'intervallo (a, b) , costante ed eguale ad 1. Se il teorema è vero, l'integrale

$$[3] \quad \int_a^b \Phi(mx) \cdot dx$$

deve risultare convergente per $m \rightarrow \infty$, ed il suo limite deve essere

$$\frac{b-a}{\omega} \int_0^{\lambda+a} \Phi(x) \cdot dx.$$

Supponiamo, infatti, $|m| \geq \frac{\omega}{b-a}$; e indichiamo con N la parte intera (dipendente da m) del numero $|m| \frac{b-a}{\omega}$, e cioè il maggior intero positivo che verifica la limitazione:

$$|m| \frac{b-a}{\omega} \geq N.$$

(Osserviamo che N risulta sempre maggiore o eguale ad 1). Sarà allora

$$[4] \quad 0 \leq \frac{b-a}{\omega} - \frac{N}{|m|} < \frac{1}{|m|}$$

Poniamo $\varepsilon = \frac{\omega}{|m|}$. Dividendo l'intervallo (a, b) cui si riferisce l'integrale (3) negli intervalli parziali $(a, a + \varepsilon)$, \dots , $(a + [N-1]\varepsilon, a + N\varepsilon)$, $(a + N\varepsilon, b)$, potremo scrivere;

$$\int_a^b \Phi(mx) \cdot dx = \int_a^{a+\varepsilon} + \dots + \int_{a+(N-1)\varepsilon}^{a+N\varepsilon} + \int_{a+N\varepsilon}^b,$$

e poichè

$$\int_{a+h\varepsilon}^{a+(h+1)\varepsilon} \Phi(mx) \cdot dx = \frac{1}{|m|} \int_0^{\lambda+\omega} \Phi(x) \cdot dx$$

(il che immediatamente si giustifica con il cambiamento di variabili $t=mx$ e tenendo conto che $\Phi(x)$ è funzione periodica) avremo

$$\int_a^b \Phi(mx) \cdot dx = \frac{N}{|m|} \int_{\lambda}^{\lambda+\omega} \Phi(x) dx + \int_{\alpha+N\varepsilon}^b \Phi(mx) dx,$$

ovvero

$$[5] \quad \int_a^b \Phi(mx) \cdot dx = \frac{b-a}{\omega} \int_{\lambda}^{\lambda+\omega} \Phi(x) \cdot dx - \\ - \left(\frac{b-a}{\omega} - \frac{N}{|m|} \right) \int_{\lambda}^{\lambda+\omega} \Phi(x) dx + \int_{\alpha+N\varepsilon}^b \Phi(mx) \cdot dx.$$

Facciamo ora tendere m ad infinito. Il secondo termine a secondo membro della precedente equazione tende a zero in virtù della [4]. Lo stesso succede per l'ultimo termine. E, infatti, designando con K l'estremo superiore di $|\Phi(x)|$, quel termine è (in valore assoluto) maggiorato da

$$K(b-a-N\varepsilon),$$

ossia da

$$K\omega \left(\frac{b-a}{\omega} - \frac{N}{|m|} \right),$$

numero che, in virtù della [4], tende a zero al divergere di m . Poichè il primo dei termini a secondo membro della [5] non dipende da m , potremo concludere che, per m tendente a ∞ , il primo membro della [5] tende al limite

$$\frac{b-a}{\omega} \int_{\lambda}^{\lambda+\omega} \Phi(x) dx$$

e. d. d.

3. - Abbandoniamo ora l'ipotesi $f(x) \leq 1$; e supponiamo solo che $f(x)$ sia, in (a, b) , limitata ed integrabile. Relativamente a $\Phi(x)$ ammetteremo, per il momento, che essa risulti sempre non negativa: $\Phi(x) \geq 0$, o sempre non positiva: $\Phi(x) \leq 0$, per ogni x reale. Ci limiteremo anzi a considerare il caso in cui è $\Phi(x) \geq 0$. Il caso opposto si tratterà in modo analogo.

Scomponiamo l'intervallo (a, b) in tanti intervallini parziali adiacenti, mediante i punti di divisione

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{p-1} < x_p = b.$$

Potremo scrivere:

$$\int_a^b f(x) \cdot \Phi(mx) \cdot dx = \sum_{i=1}^p \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \Phi(mx) dx.$$

Indicando con M'_i e M''_i gli estremi inferiore e superiore di $f(x)$ nell'intervallo generico (x_{i-1}, x_i) , si ha dall'ultima relazione scritta (tenendo conto che è, per ipotesi, $\Phi(x) \geq 0$):

$$\sum_{i=1}^p M'_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(mx) dx \leq \int_a^b f(x) \Phi(mx) dx \leq \sum_{i=1}^p M''_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(mx) dx.$$

Questa limitazione sussiste quale che sia la scomposizione dell'intervallo (a, b) in intervallini parziali e quale che sia il valore di m . Se, pertanto, fissiamo l'attenzione su di una particolare (per quanto arbitraria) scomposizione di (a, b) , e, lasciandola inalterata, facciamo crescere m indefinitamente, per quanto vedemmo nel n. 2, risulterà:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{\omega} \int_a^{\lambda+\omega} \Phi(x) dx \right] \cdot \sum_{i=1}^p M'_i (x_i - x_{i-1}) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \cdot \min_a \int_a^b f(x) \Phi(mx) dx \leq \\ & \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \cdot \max_a \cdot \int_a^b f(x) \Phi(mx) dx \leq \left[\frac{1}{\omega} \int_a^{\lambda+\omega} \Phi(x) dx \right] \cdot \sum_{i=1}^p M''_i (x_i - x_{i-1}), \end{aligned}$$

e queste disuguaglianze saranno verificate per una qualunque scomposizione dell'intervallo (a, b) .

Poichè, per ipotesi, $f(x)$ è integrabile, le disuguaglianze precedenti si possono scrivere nella forma che segue:

$$I \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \cdot \min_a \int_a^b f(x) \Phi(mx) dx \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \cdot \max_a \cdot \int_a^b f(x) \Phi(mx) dx \leq I,$$

dove si è posto

$$I = \left[\frac{1}{\omega} \int_a^{\lambda+\omega} \Phi(x) dx \right] \cdot \int_a^b f(x) dx.$$

Ora i termini estremi di questa catena di disuguaglianze sono uguali. Uguali (e finiti) sono pertanto anche i termini medi; e ciò dimostra l'esistenza di un limite (finito) per l'integrale [1]. Inoltre il comune valore di quei termini medi coincide col comune valore dei termini estremi, e ciò giustifica la relazione [2].

4. - Abbandoniamo, finalmente, l'ipotesi che $\Phi(x)$ sia funzione (periodica) sempre di uno stesso segno. Poniamo:

$$[6] \quad \begin{cases} \Phi_1(x) = \frac{\Phi(x) + |\Phi(x)|}{2}, \\ \Phi_2(x) = \frac{\Phi(x) - |\Phi(x)|}{2}. \end{cases}$$

Poichè $\Phi(x)$ è periodica di periodo $\omega > 0$, limitata e integrabile, lo stesso succede per $|\Phi(x)|$ e, quindi, per $\Phi_1(x)$ e $\Phi_2(x)$. Poichè, inoltre, è sempre $\Phi_1(x) \geq 0$ e $\Phi_2(x) \leq 0$, a queste due funzioni Φ_1 e Φ_2 potremo applicare i risultati esposti nel n. 3. Esistono, cioè, e risultano finiti i limiti dei due integrali

$$\int_a^b f(x) \Phi_1(mx) dx \quad \text{e} \quad \int_a^b f(x) \Phi_2(mx) dx$$

per $m \rightarrow \infty$, e questi limiti son dati dalle formule:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \Phi_1(mx) dx = \left[\frac{1}{\omega} \int_{\frac{\lambda}{m}}^{\frac{\lambda+\omega}{m}} \Phi_1(x) dx \right] \cdot \left[\int_a^b f(x) dx \right],$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \Phi_2(mx) dx = \left[\frac{1}{\omega} \int_{\frac{\lambda}{m}}^{\frac{\lambda+\omega}{m}} \Phi_2(x) dx \right] \cdot \left[\int_a^b f(x) dx \right].$$

Sommando, e tenendo conto che, per le [6], risulta

$$\Phi(x) = \Phi_1(x) + \Phi_2(x),$$

avremo facilmente la [2].

5. — Come caso particolare potremo indicare la proposizione seguente (che generalizza in modo espressivo il lemma di Dirichlet):

Se $\Phi(x)$ designa una funzione reale (della variabile reale x), definita in ogni punto dell'asse x , limitata, periodica, integrabile (in ogni intervallo finito dell'asse x) e, in ogni periodo, di valore medio nullo, l'integrale

$$\int_a^b f(x) \cdot \Phi(mx) \cdot dx$$

dove $f(x)$ è una qualunque funzione reale, limitata ed integrabile nell'intervallo (a, b) , tende a zero al crescere (in valore assoluto) all'infinito del parametro m .

Il lemma di Dirichlet costituisce un caso particolare di questo teorema ($\Phi(x) \equiv \sin x$ o $\Phi(x) \equiv \cos x$).

Matematica. — *Sull'annullarsi, in un punto, della matrice Jacobiana di m funzioni in n variabili.* Nota di MARIO VILLA, presentata ⁽¹⁾ da ENRICO BOMPIANI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. — In alcune ricerche sulle trasformazioni puntuali, mi si è presentata l'opportunità di assegnare la condizione geometrica relativa all'annullarsi, in un punto, della matrice Jacobiana di m funzioni in n variabili ($m \geq n$).

Interpretate queste come coordinate di un punto in un S_n (lineare) e quelle come coordinate di un punto di una V_n in S_m , assegno tale condizione ricorrendo, come appare spontaneo, alla varietà di SEGRE relativa ad S_n e ad S_m . Alla condizione è data duplice forma.

Assai notevole è l'intervento in una di esse della nozione di quasi-asintotica (BOMPIANI).

2. — *Condizione per l'annullarsi del determinante Jacobiano ($m = n$).* — Siano

$$[1] \quad y_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad i = 1, \dots, n$$

in un campo C n funzioni delle n variabili x_1, x_2, \dots, x_n , e in tutti i punti di C siano dotate di derivate parziali prime continue ($n > 1$).

Com'è noto, se nel campo C l'Jacobiano

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right| \quad i, k = 1, \dots, n$$

è $\neq 0$, allora le x_1, x_2, \dots, x_n sono funzioni delle y_1, y_2, \dots, y_n in un conveniente campo C' .

(¹) Nell'Adunanza del 22 novembre 1941-XX.

Se invece in un punto P_1 di C , è $J = 0$ allora le [1] non si possono più invertire nell'intorno di P_1 .

Preciseremo qui il comportamento delle [1] nel punto P_1 nell'ipotesi $J = 0$. Le [1] rappresentano una trasformazione T puntuale che muta i punti $P_1(x_1, \dots, x_n)$ del campo C dello spazio lineare S_n in punti $P_2(y_1, \dots, y_n)$ di un altro spazio lineare S'_n .

Per studiare questa trasformazione (in particolare, ove $J = 0$) è spontaneo ricorrere alla $V_{2n}^{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}$ dell' $S_{n(n+2)}$ di SEGRE che rappresenta le coppie di punti dei due spazi S_n, S'_n . Su di essa la trasformazione T è rappresentata da una varietà V_n e la coppia (P_1, P_2) da un punto P : si chiede la condizione a cui deve soddisfare il punto P di V_n perchè nella coppia (P_1, P_2) si abbia $J = 0$.

Tale condizione è data dal teorema seguente, in cui è molto notevole l'intervento della nozione di quasi-asintotica (BOMPIANI) ⁽¹⁾:

Condizione necessaria e sufficiente perchè nella coppia (P_1, P_2) sia $J = 0$ è che $l'S(2)$ osculatore a V_n e $l'S_{2n}$ tangente a $V_{2n}^{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}$, nel punto P , abbiano uno spazio congiungente di dimensione minore della normale (ossia $< \frac{n(n+5)}{2}$ che si ha per un punto P generico di una generica V_n di $V_{2n}^{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}$): V_n deve cioè presentare in P carattere di varietà quasi-asintotica $\sigma_{1,2}$ per la $V_{2n}^{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}$.

⁽¹⁾ Si dice, con BOMPIANI, $S(r)$ osculatore ad una varietà V_k in un punto P lo spazio lineare di dimensione minima che contiene gli $S(r)$ osculatori in P alle curve di V_k passanti per P , cioè lo spazio lineare di dimensione minima che contiene il punto P e i punti derivati fino a quelli d'ordine r . In particolare $l'S(1)$ osculatore in P a V_k è $l'S_k$ tangente in P a V_k . $l'S(r)$ osculatore ad una curva in un punto P è lo spazio lineare di dimensione minima che contiene il punto P e i punti derivati fino a quello d'ordine r . Ricordiamo anche la definizione di varietà quasi-asintotica. Una varietà V_k situata sopra una varietà V_d ($d > k$) e quasi-asintotica $\sigma_{r,s}$ ($0 < r < s$) per V_d quando $l'S(r)$ osculatore a V_d in un punto generico di V_k e $l'S(s)$ osculatore ivi a V_k hanno uno spazio congiungente di dimensione δ inferiore a quella che si avrebbe per una V_k generica di V_d . Aggiungiamo che la dimensione δ del predetto spazio congiungente può avere (se $k > 1$) valori diversi per gli stessi valori di k, r, s , corrispondentemente ai quali si hanno vari tipi, proiettivamente distinti, di superficie quasi-asintotiche $\sigma_{r,s}$ (si veda: VILLA, *Sulle superficie quasi-asintotiche della V_4^6 di S_8 che rappresenta le coppie di punti di due piani.* « Rend. della Reale Accademia d'Italia », serie VII, vol. I, pag. 228, 1940).

Le coordinate di un punto $X(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ di $V_{2n}^{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}$ (che indichiamo ancora con X) sono

$$x_1 y_1, \dots, x_1 y_n, x_2 y_1, \dots, x_2 y_n, \dots, x_n y_1, \dots, x_n y_n, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, 1$$

quindi

$$[2] \quad \frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_m} = 0, \quad \frac{\partial^2 X}{\partial y_i \partial y_m} = 0 \quad (i, m = 1, 2, \dots, n)$$

Indicando con $\bar{X}(x_1, \dots, x_n, f_1, \dots, f_n)$ il punto di V_n (si vedano le [1]), per le [2] si ha

$$\frac{\partial \bar{X}}{\partial x_i} = \frac{\partial X}{\partial x_i} + \sum_m \frac{\partial X}{\partial y_m} \frac{\partial f_m}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{X}}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_m \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial y_m} \frac{\partial f_m}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 X}{\partial x_j \partial y_m} \frac{\partial f_m}{\partial x_i} \right) + \left(\frac{\partial X}{\partial y_m} \right)$$

dove $\left(\frac{\partial X}{\partial y_m} \right)$ indica una combinazione lineare dei punti $\frac{\partial X}{\partial y_1}, \frac{\partial X}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial X}{\partial y_n}$.

Il punto $\bar{X} = X$ e i punti $\frac{\partial \bar{X}}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 \bar{X}}{\partial x_i \partial x_j}$ individuano l' $S(2)$ osculatore a V_n ; l' S_{2n} tangente a $V_{2n}^{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}$ è individuato dai punti $X, \frac{\partial X}{\partial x_i}, \frac{\partial X}{\partial y_i}$. Perchè l' $S(2)$ e l' S_{2n} abbiano uno spazio congiungente di dimensione $< \frac{n(n+5)}{2}$, è necessario e sufficiente che siano linearmente dipendenti i punti (in particolare, che qualcuno di essi sia indeterminato):

$$\sum_m \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial y_m} \frac{\partial f_m}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 X}{\partial x_j \partial y_m} \frac{\partial f_m}{\partial x_i} \right) \quad i, j = 1, \dots, n$$

che considereremo nell'ordine che si ottiene prendendo prima $i = 1$ e le n espressioni per $j = 1, \dots, n$, e poi analogamente per $i = 2$, per $i = 3, \dots$, per $i = n$.

Siccome i punti $\frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial y_j}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) sono linearmente indipendenti, deve dunque essere nulla la matrice dei coefficienti:

$$\begin{vmatrix}
 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & 0 & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} & 0 & \dots & 0 & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \\
 0 & \dots & 0 & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & 0 & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & \dots & 0 & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}
 \end{vmatrix} = 0$$

Questa matrice si compone di n^2 verticali e $\frac{n(n+1)}{2}$ orizzontali $\left(\frac{n(n+1)}{2} < n^2, \text{ essendo } n > 1\right)$ e nelle prime n verticali vi è un unico minore d'ordine n , che può essere $\neq 0$, ed è J ; e così nelle successive n verticali vi è un unico minore d'ordine n , che può essere $\neq 0$, ed è J ; e così di seguito.

Consideriamo i minori M d'ordine massimo $\frac{n(n+1)}{2}$, formati dalle prime n verticali, da $n-1$ fra le successive n verticali, da $n-2$ fra le successive n verticali, ..., da una fra le ultime n verticali (si può osservare che effettivamente $n + (n-1) + \dots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$). Sviluppando il determinante M , secondo la regola di Laplace, siccome l'unico minore d'ordine n , che può essere $\neq 0$, estratto dalle prime n verticali è J , si ha

$$M = J \cdot M_1.$$

D'altra parte in M_1 , l'unico minore d'ordine $n-1$, che può essere $\neq 0$, estratto dalle prime $n-1$ verticali è un minore J_{n-1} estratto dalle ultime $n-1$ orizzontali di J ; si ha

$$M_1 = J_{n-1} \cdot M_2.$$

Ma in M_2 , l'unico minore d'ordine $n-2$, che può essere $\neq 0$, estratto dalle prime $n-2$ verticali è un minore J_{n-2} estratto dalle ultime $n-2$ orizzontali di J ; si ha quindi

$$M_2 = J_{n-2} \cdot M_3,$$

ecc., sicchè in definitiva si ha:

$$M = J \cdot J_{n-1} \cdot J_{n-2} \cdots J_1$$

dove J_1 è un elemento dell'ultima orizzontale di J .

Se $J \neq 0$, fra i minori d'ordine $n-1$ estratti dalle sue ultime n orizzontali ce n'è certamente uno $\neq 0$, sia J_{n-1} ; e così fra i minori d'ordine $n-2$ estratti dalle ultime $n-2$ orizzontali di J ce n'è certamente uno $\neq 0$, sia J_{n-2} , e così via. Segue che esiste un minore $M \neq 0$. Perchè la matrice sia nulla è dunque necessario che sia $J = 0$.

Dimostriamo ora che la condizione è sufficiente.

Infatti se $J = 0$, si può supporre che (le λ_m essendo costanti opportune)

$$[3] \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_1} = \frac{1}{2} \sum_m \lambda_m \frac{\partial f_i}{\partial x_m} \quad \left(\begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n \\ m = 2, \dots, n \end{matrix} \right).$$

D'altra parte è

$$[4] \quad \frac{\partial^2 \bar{X}}{\partial x_1 \partial x_1} = \sum_i \frac{\partial^2 X}{\partial x_1 \partial y_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + \sum_i \frac{\partial^2 X}{\partial x_1 \partial y_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial X}{\partial y_m} \right).$$

Moltiplicando la precedente ($l=1$) per λ_l e sommando si ottiene ⁽¹⁾

$$\sum_l \lambda_l \frac{\partial^2 \bar{X}}{\partial x_1 \partial x_l} = \sum_i \frac{\partial^2 X}{\partial x_1 \partial y_i} \left(\sum_l \lambda_l \frac{\partial f_i}{\partial x_l} \right) + \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \left(\sum_l \lambda_l \frac{\partial^2 X}{\partial x_l \partial y_i} \right) + \left(\frac{\partial X}{\partial y_m} \right) \quad (l=2, \dots, n)$$

ossia per la [3]

$$\sum_l \lambda_l \frac{\partial^2 \bar{X}}{\partial x_1 \partial x_l} = 2 \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \frac{\partial^2 X}{\partial x_1 \partial y_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,m} \lambda_m \frac{\partial f_i}{\partial x_m} \left(\sum_l \lambda_l \frac{\partial^2 X}{\partial x_l \partial y_i} \right) + \left(\frac{\partial X}{\partial y_m} \right).$$

Sottraendo $\frac{\partial^2 \bar{X}}{\partial x_1^2}$ da ambo i membri, tenendo presente la [4] per

$l=1$, si ha

$$\sum_l \lambda_l \frac{\partial^2 \bar{X}}{\partial x_1 \partial x_l} - \frac{\partial^2 \bar{X}}{\partial x_1^2} = \frac{1}{2} \sum_{i,l,m} \lambda_m \frac{\partial f_i}{\partial x_m} \frac{\partial^2 X}{\partial x_l \partial y_i} + \left(\frac{\partial X}{\partial y_m} \right).$$

Ponendo

$$2P = \sum_l \lambda_l \frac{\partial^2 \bar{X}}{\partial x_1 \partial x_l} - \frac{\partial^2 \bar{X}}{\partial x_1^2}$$

(1) Se il determinante J è nullo perchè è nulla una delle sue verticali, per esempio la prima $\left(\text{cioè } \frac{\partial f_i}{\partial x_1} = 0 \right)$, allora il punto $\frac{\partial^2 \bar{X}}{\partial x_1^2}$ svanisce e l' $S(2)$ osculatore a V_n (e quindi anche lo spazio che lo congiunge all' S_{2n}) ha dimensione $<$ della normale. Nel seguito supporremo perciò che le λ_m non siano tutte nulle.

presentata da una varietà V_n e la coppia (P_1, P_2) da un punto P , si ha il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perchè nella coppia (P_1, P_2) , la matrice Jacobiana

$$\left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right\| \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, m \\ k = 1, \dots, n, \quad m \geq n \end{matrix}$$

sia nulla, è che $l'S(2)$ osculatore a V_n e $l'S_{m+n}$ tangente a $V_{\frac{(m+n)!}{m+n}}$, nel punto P , abbiano uno spazio congiungente di dimensione $<$ della normale (ossia della dimensione che si ha per un punto P generico di una generica V_n di $V_{\frac{(m+n)!}{m+n}}$): V_n deve cioè presentare in P carattere di varietà quasi-asintotica $\sigma_{1,2}$ per la $V_{\frac{(m+n)!}{m+n}}$.

Per $m = n$ questo teorema coincide con quello del n. 2 e per $m > n$ la dimostrazione è perfettamente analoga a quella già fatta per $m = n$.

4. - Altra condizione per l'annullarsi della matrice Jacobiana.

Si ha:

Condizione necessaria e sufficiente perchè nella coppia (P_1, P_2) la matrice Jacobiana sia nulla è che $l'S_n$ tangente a V_n nel punto P incontri in una retta $l'S_n$ di $V_{\frac{(m+n)!}{m+n}}$ (uscende da P), individuato dal punto P_2 ⁽¹⁾.

Infatti $l'S_n$ di $V_{\frac{(m+n)!}{m+n}}$ individuato dal punto P_2 è quello descritto dal punto $X(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ di $V_{\frac{(m+n)!}{m+n}}$ quando si siano fissate le coordinate y_1, \dots, y_m del punto P_2 e variano le $x_1 \dots x_n$. Tale S_n è quindi individuato dai punti $X, \frac{\partial X}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial X}{\partial x_n}$ (dove per x_1, \dots, x_n si possono porre le coordinate x_1, \dots, x_n di P_1).

⁽¹⁾ Com'è ben noto la $V_{\frac{(m+n)!}{m+n}}$ di SEGRE che rappresenta le coppie di punti di un S_n e di un S_m contiene una schiera ∞^m di \bar{S}_n e una schiera ∞^n di \bar{S}_m : si ha un \bar{S}_n associando ad un punto fisso di S_m i punti di S_n , un \bar{S}_m associando ad un punto fisso di S_n i punti di S_m . Per ogni punto di $V_{\frac{(m+n)!}{m+n}}$ passa un \bar{S}_n e un \bar{S}_m e il loro spazio congiungente è $l'S_{m+n}$ tangente a $V_{\frac{(m+n)!}{m+n}}$ in quel punto.

D'altra parte indicando con $\bar{X}(x_1, \dots, x_n, f_1, \dots, f_m)$ il punto di V_n (si vedano le [5]), l' S_n tangente a V_n in P è individuato dai punti

$$\bar{X} = X$$

$$\frac{\partial \bar{X}}{\partial x_i} = \frac{\partial X}{\partial x_i} + \sum_l \frac{\partial X}{\partial y_l} \frac{\partial f_l}{\partial x_i} \quad \begin{matrix} (i = 1, \dots, n) \\ (l = 1, \dots, m) \end{matrix}.$$

Affinchè i due S_n abbiano una retta in comune, cioè stiano in un S_{2n-1} , essendo i punti $X, \frac{\partial X}{\partial x_i}$ linearmente indipendenti è necessario e sufficiente che siano linearmente dipendenti gli n punti

$$\sum_l \frac{\partial X}{\partial y_l} \frac{\partial f_l}{\partial x_i}$$

per il che occorre e basta, essendo i punti $\frac{\partial X}{\partial y_l}$ linearmente indipendenti, che sia nulla la matrice Jacobiana delle f_l rispetto alle x_i .

Matematica. — *Un criterio d'esistenza relativo a un problema al contorno per un'equazione differenziale ordinaria d'ordine n .* Nota di GIUSEPPE ZWIRNER, presentata ⁽¹⁾, dall'Accademico FRANCESCO SEVERI.

In un lavoro recente ⁽²⁾, basandomi su di un teorema di CACCIOPOLI per l'esistenza di elementi uniti in una trasformazione funzionale e su una conseguenza immediata di una nota formula d'interpolazione, ho dimostrato un teorema d'esistenza ⁽³⁾ relativo al problema

$$[1] \quad \begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \\ y(x_1) = c_1, y(x_2) = c_2, \dots, y(x_n) = c_n, \end{cases}$$

dove $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ è definita nel campo

$$T: \quad a \leq x \leq b, \quad |y^{(j)}| < +\infty, \quad (j=0, 1, \dots, n-1; y^{(0)} = y),$$

c_1, c_2, \dots, c_n sono numeri reali arbitrariamente prefissati e $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ n punti qualsiasi dell'intervallo $a \leq x \leq b$.

Voglio ora far vedere come si possa facilmente stabilire, mantenendosi nello stesso ordine d'idee, anche il seguente criterio che, come vedremo, costituisce una estensione di quello ricordato.

Il problema [1] ammette almeno una soluzione, $y(x)$, assolutamente continua insieme con le sue prime $n-1$ derivate nell'intervallo

$$i: \quad a \leq x \leq b,$$

⁽¹⁾ Nell'Adunanza del 22 novembre 1941-XX.

⁽²⁾ G. ZWIRNER, *Su un problema di valori al contorno per equazioni differenziali d'ordine n .* [In corso di stampa nei « Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Padova »].

⁽³⁾ Dato da CINQUINI per n qualunque. (*Problemi di valori al contorno per equazioni differenziali di ordine n .* [« Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa », serie II, vol. IX (1940), pagg. 61-77], pagg. 63-68) e da me per $n=3$ (*Problemi al contorno per le equazioni differenziali ordinarie del terzo ordine: teoremi di esistenza e di unicità.* [« Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze », tomo XCIV, parte II (1940), pagg. 263-275], pagg. 268-271).

se:

I) $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, ovunque finita in T , è continua rispetto a $(y, y', \dots, y^{(n-1)})$ e misurabile rispetto a x ;

II) in corrispondenza ad ogni numero reale (o intero) positivo M esiste una funzione $\varphi_M(x)$ sommabile in i tale che, in tutto il campo

$$T_M: a \leq x \leq b, |y^{(j)} - G^{(j)}(x)| \leq \frac{(b-a)^{n-j-1}}{(n-j-1)!} M, (j=0, 1, \dots, n-1; y^{(0)}=y),$$

ove $G(x) = G^{(0)}(x)$ è il polinomio di grado $n-1$ (al più) soddisfacente alle $G(x_i) = c_i$, sia

$$[2] \quad |f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})| \leq \varphi_M(x) \cdot M$$

e che, almeno per M abbastanza grande, sia

$$[3] \quad \int_a^b \varphi_M(x) dx < 1.$$

In particolare si potrà porre:

$$\varphi_M(x) = \sum_0^{n-1} \frac{(b-a)^{n-j-1}}{(n-j-1)!} \alpha_j(x) + \frac{\Psi(x)}{M},$$

dove le $\alpha_j(x)$ e $\Psi(x)$ sono funzioni non negative e sommabili in i , con

$$\int_a^b \left(\sum_0^{n-1} \frac{(b-a)^{n-j-1}}{(n-j-1)!} \alpha_j(x) \right) dx < 1.$$

Il criterio di CINQUINI si ottiene invece supponendo verificata in tutto T la

$$[4] \quad |f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})| \leq \sum_0^{n-1} \alpha_j(x) |y^{(j)}| + \Psi(x)$$

ove le $\alpha_j(x)$ e la $\Psi(x)$ hanno lo stesso significato precedente.

Come si vede il mio criterio estende quello di CINQUINI in due modi, nel senso che consente una maggiore arbitrarietà alla $\varphi_M(x)$ e che suppone la [4] verificata in T_M soltanto e non in tutto T .

Mostreremo con un esempio (n. 3) che la prima estensione permette di applicare il mio criterio a casi che sfuggono a quello di CINQUINI.

Quanto alla seconda, si prenda in esame il seguente esempio già considerato dal CINQUINI ⁽¹⁾:

Sia

$$g(x, y, y', y'') = \frac{1}{3\sqrt{x}} \sqrt{y^2 + y'^2 + y''^2}, \quad \text{per } x \neq 0,$$

$$g(x, y, y', y'') = 0, \quad \text{per } x = 0.$$

Risulta

$$|g(x, y, y', y'')| \leq \frac{1}{3\sqrt{x}} \{|y| + |y'| + |y''|\}$$

e quindi, secondo il criterio di CINQUINI, l'equazione

$$y'' = g(x, y, y', y'')$$

ammette almeno un integrale $y(x)$ soddisfacente alle condizioni $y(0) = c_1$, $y(x_1) = c_2$, $y(x_2) = c_3$ con $0 < x_1 < x_2 < h$, ove h è il numero positivo definito dalla limitazione

$$\left(\frac{h^2}{2} + h + 1\right) \int_0^h \frac{dx}{\sqrt{x}} = 1.$$

Invece secondo il mio criterio lo stesso si può dire per $0 < x_1 < x_2 < k$ con k definito dalla limitazione

$$\sqrt{\left(\frac{k^2}{2}\right)^2 + k^2 + 1} \int_0^k \frac{dx}{\sqrt{x}} = 1;$$

e ciò perchè, se $0 < k_1 < k$, nella regione

$$0 \leq x \leq k_1, \quad |y - G(x)| \leq \frac{k_1^2}{2} M, \quad |y' - G'(x)| \leq k_1 \cdot M, \quad |y'' - G''(x)| \leq M,$$

il significato di $G(x)$ essendo palese, risulta

$$|g(x, y, y', y'')| \leq \frac{M}{3\sqrt{x}} \left[\sqrt{\left(\frac{k_1^2}{2}\right)^2 + k_1^2 + 1} + \frac{N}{3\sqrt{x}} \right],$$

con N costante opportuna dipendente soltanto dai dati del problema.

(1) Cfr. loc. cit. pag. 68.

Ora è evidentemente $h < k$.

In definitiva il fatto che secondo il mio criterio basta supporre soddisfatta la [4] in T_M e non in tutto T , porta che il problema al contorno considerato si può risolvere in intervalli più ampi di quelli considerati dal CINQUINI. Tengo però a far rilevare esplicitamente che i ragionamenti svolti da CINQUINI sarebbero sufficienti anch'essi a stabilire il criterio che si ottiene supponendo soddisfatta la [4] in T_M soltanto e non in tutto T . Chiudo avvertendo che è mio proposito dedicare a quest'argomento una Memoria ulteriore.

1. - Ricordo qui il lemma di cui mi sono servito nel lavoro già citato:

Se $Y(x)$ è una funzione assolutamente continua insieme con le sue prime $n-1$ derivate in $a \leq x \leq b$, nulla ivi in n punti $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, risultano allora verificate in tutto $a \leq x \leq b$, le disequaglianze

$$[5] \quad \left\{ \begin{array}{l} |Y(x)| \leq \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} \int_a^b |Y^{(n)}(x)| dx, \\ |Y'(x)| \leq \frac{(b-a)^{n-2}}{(n-2)!} \int_a^b |Y^{(n)}(x)| dx, \\ \dots\dots\dots \\ |Y^{(n-1)}(x)| \leq \int_a^b |Y^{(n)}(x)| dx^{(1)}. \end{array} \right.$$

2. - Per dimostrare il teorema enunciato osserviamo innanzi tutto che possiamo sempre supporre, per semplicità di dimostrazione,

$$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0,$$

nel qual caso bisognerà supporre $G \geq 0$ e quindi T_M si riduce al campo

$$a \leq x \leq b, \quad |y^{(j)}| \leq \frac{(b-a)^{n-j-1}}{(n-j-1)!} M, \quad (j = 0, 1, \dots, n-1; y^{(0)} = y).$$

Indichiamo poi con Σ lo spazio delle funzioni $y(x)$ continue insieme con le loro prime $n-1$ derivate in $a \leq x \leq b$.

Allora data $y(x)$, la funzione $z(x)$, assolutamente continua insieme con le sue prime $n-1$ derivate in $a \leq x \leq b$, verificante, quasi ovunque in i , l'equazione

$$z^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

(¹) Cfr. il luogo citato nella seconda delle note a piè di pagina.

e le condizioni

$$z(x_1) = z(x_2) = \dots = z(x_n) = 0,$$

è completamente determinata ed è data dalla formula

$$\begin{aligned} z(x) = & \int_{x_1}^x dt_1 \int_{x_2}^{t_1} dt_2 \dots \int_{x_n}^{t_{n-1}} f(u, y(u), y'(u), \dots, y^{(n-1)}(u)) du - \\ & - \sum_{i=1}^n \frac{(x-x_1) \dots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \dots (x-x_n)}{(x_i-x_1) \dots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \dots (x_i-x_n)} \times \\ & \times \int_{x_i}^{x_i} dt_1 \int_{x_2}^{t_1} dt_2 \dots \int_{x_n}^{t_{n-1}} f(u, y(u), y'(u), \dots, y^{(n-1)}(u)) du. \end{aligned}$$

Premesso ciò, fissato un numero positivo M in modo che valga la [3], si indichi con Σ' la porzione di Σ costituita dalle funzioni $y(x)$ di Σ nulle in x_1, x_2, \dots, x_n e tali da aversi

$$|y^{(n)}(x)| \leq \varphi_M(x) \cdot M.$$

Sarà allora, per le [3] e [5],

$$|y^{(j)}(x)| \leq \frac{(b-a)^{n-j-1}}{(n-j-1)!} \cdot M, \quad (j=0, 1, \dots, n-1; y^{(0)}=y),$$

di guisa che risulta

$$|f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))| \leq \varphi_M(x) \cdot M$$

e quindi, quasi ovunque in i ,

$$|z^{(n)}(x)| \leq \varphi_M(x) \cdot M.$$

Dopo di che basta procedere in modo analogo a quello tenuto nella mia Nota citata.

3. — Passiamo a indicare l'esempio annunciato nella prefazione.

Sia

$$a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{4}, a_3 = \frac{1}{5}, \dots, a_m = \frac{1}{2m-1}, \dots \quad (m=3, 4, \dots)$$

e poniamo:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= y^2 + x^4, \quad \text{per } a_{m+1} < x \leq a_m, \quad |y| \leq m, \\ f(x, y) &= m^2 + x^4, \quad \text{» } \text{» } \text{»}, \quad |y| > m. \end{aligned} \quad (m=1, 2, 3, \dots)$$

In tal modo $f(x, y)$ è misurabile rispetto a x e continua rispetto a y in tutta la striscia $0 \leq x \leq 1$, $|y| < +\infty$. Al problema $y'' = f(x, y)$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$ si può applicare il criterio enunciato nella prefazione. Infatti, posto

$$\begin{aligned} \varphi_m(x) &= \frac{1}{m} (m^2 + x^4) \quad , \quad \text{per } 0 \leq x \leq a_m, \\ \varphi_m(x) &= \frac{1}{m} ((m-1)^2 + x^4) \quad , \quad \text{per } a_m \leq x \leq a_{m-1}, \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi_m(x) &= \frac{1}{m} (1 + x^4) \quad , \quad \text{per } a_2 \leq x \leq a_1, \end{aligned} \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

si ha, in tutto il campo $0 \leq x \leq 1$, $|y| \leq m$,

$$\text{con} \quad |f(x, y)| \leq \varphi_m(x) \cdot m,$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi_m(x) dx &= \frac{1}{m} \left\{ \int_0^{a_m} m^2 dx + \int_{a_m}^{a_{m-1}} (m-1)^2 dx + \dots + \int_{a_2}^{a_1} dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 x^4 dx \right\} = 1 - \frac{1}{4m} + \frac{1}{5m}. \end{aligned}$$

Peraltro non è applicabile il criterio di CINQUINI perchè non è possibile soddisfare, in tutto il campo

$$0 \leq x \leq 1 \quad , \quad |y| < +\infty,$$

ad una disuguaglianza del tipo

$$[6] \quad |f(x, y)| \leq \alpha(x) |y| + \psi(x),$$

con

$$\int_0^1 \alpha(x) dx < 1,$$

e $\psi(x)$ sommabile e non negativa.

$$\text{Infatti dalla [6] segue } \alpha(x) \geq \varphi_m(x) - \frac{\psi(x)}{m} \text{ e quindi } \int_0^1 \alpha(x) dx \geq 1.$$

Meccanica. — *Alcune proprietà degli assi d'equilibrio di Möbius.* Nota di CARLO TOLOTTI, presentata ⁽¹⁾ da ANTONIO SIGNORINI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. Sia S un insieme di forze f_s applicate ad altrettanti punti P_s ($s = 1, 2, \dots, n$) di un sistema rigido C e si supponga che, in ogni spostamento di C , i vettori f_s delle singole forze restino invariati.

Si supponga inoltre che, nella posizione considerata di C , S risulti in equilibrio. Ciò richiede che siano soddisfatte le seguenti condizioni

$$[1] \quad \sum_1^n f_s = 0 \quad , \quad \sum_1^n OP_s \wedge f_s = 0 \quad ,$$

la seconda delle quali, causa un teorema di D. A. DA SILVA ⁽²⁾, semplicemente corrisponde all'aver scelto un conveniente orientamento di C .

Sia ora C_α la posizione assunta da C per effetto di una rotazione α di ampiezza φ ($0 \leq \varphi < 2\pi$) attorno ad un asse di versore u , e si denoti con S_α l'insieme delle forze f_s applicate a C_α .

È noto ⁽³⁾ che, nei riguardi della caratterizzazione delle rotazioni α tali che anche S_α risulti in equilibrio, gli assi di rotazione vanno classificati in tre categorie:

a) assi per cui ogni rotazione di ampiezza $\varphi \neq 0$ conduce ad un insieme S_α non equilibrato;

b) assi u_s per cui almeno la rotazione di ampiezza $\varphi = \pi$, oltre a quella $\varphi = 0$, riporta ad un insieme S_α in equilibrio (*assi di squilibrio* di SIACCI);

c) assi u_s per cui almeno una rotazione di ampiezza φ diversa da 0 e π riconduce ad un insieme S_α equilibrato, con che — di conseguenza ⁽⁴⁾ — S_α resta in equilibrio per φ qualsiasi e, in particolare, per $\varphi = \pi$ (*assi d'equilibrio* di MÖBIUS).

⁽¹⁾ Nell'Adunanza del 22 novembre 1941-XX.

⁽²⁾ D. A. DA SILVA, *Memoria sobre a rotaçao das forças em torno dos pontos d'applicação*. « Mem. Ac. R. das Sciencias de Lisboa », s. 2^a, t. 3, parte 1^a, 1851.

⁽³⁾ Cfr., ad esempio, M. BOTTASSO, *Astaticque*, Pavia, Mattei, 1915, cap. 4^o.

⁽⁴⁾ Cfr. A. SIGNORINI, *Sollecitazioni iperastatiche*. « Rend. Istituto Lombardo », s. 2^a, vol. 65, 1932.

Sono in genere assi u_s tutte e sole le rette parallele agli spigoli di un certo triedro trirettangolo, ma, in particolare, possono far parte degli u_s anche tutte le rette parallele ad una delle facce del detto triedro e, persino, ogni retta dello spazio. Inoltre, in genere, nessuno degli u_s è altresì un u_e , ma, in particolare, ciò può accadere per parte ed anche per tutti gli u_s .

Oggetto della presente Nota è l'esaminare come vari, nel passaggio dall'insieme equilibrato S ad uno S_α , pure equilibrato, il complesso degli assi di squilibrio, con particolare riguardo agli assi d'equilibrio di MÖBIUS.

I risultati ottenuti si possono riassumere nei due seguenti teoremi:

I. Se C_α è ottenuto da C mediante una rotazione di ampiezza φ attorno ad un determinato u_e , u_e^* , il complesso degli assi di squilibrio di S_α si ottiene da quello degli u_s mediante rotazione di ampiezza $\frac{\varphi}{2}$ attorno ad u_e^* . Inoltre sono assi d'equilibrio di S_α tutti e solo quegli assi di squilibrio che provengono dagli u_e .

II. Se C_α è ottenuto da C mediante una rotazione di ampiezza $\varphi = \pi$ attorno ad un determinato u_s , u_s^* , che non sia un u_e , il complesso degli assi di squilibrio di S_α coincide con quello degli u_s quando S non ammette alcun asse d'equilibrio e neppure una giacitura di assi di squilibrio comprendente u_s^* . Inoltre ogni eventuale u_e (necessariamente ortogonale ad u_s^*) non è in genere asse di equilibrio per S_α , che viene invece ad ammettere come assi di squilibrio tutti gli assi normali a ciascun u_e e, viceversa, ogni giacitura di assi di squilibrio di S comprendente u_s^* cessa in genere di esser tale per S_α , che invece acquista un asse di equilibrio ad essa ortogonale. È anzi quest'ultima l'unica provenienza degli eventuali assi d'equilibrio di S_α .

È ovvia l'estensione del contenuto della presente Nota al caso che l'insieme S sia costituito da forze ripartite anziché concentrate. Ne farò applicazione in una prossima Memoria attinente alla teoria delle deformazioni elastiche finite.

2. Si considerino con il BOTTASSO le omografie ⁽⁵⁾

$$[2] \quad \sigma = \sum_{s=1}^n H(OP_s, f_s)$$

e

$$[3] \quad v = \sigma - I_1 \sigma,$$

che, in virtù delle [1], sono ⁽⁶⁾ dilatazioni indipendenti da O .

⁽⁵⁾ Nel corso della Nota mi avvarrò ripetutamente delle notazioni, ormai di uso corrente, introdotte in C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO, *Trasformazioni lineari*, Bologna, Zanichelli, 1929.

⁽⁶⁾ Cfr. loc. cit. ⁽³⁾, pag. 6 e 90.

Con tali notazioni, tutti gli assi di squilibrio del sistema S restano caratterizzati ⁽⁷⁾ dall'avere come direzioni le direzioni unite di σ e ν , mentre gli assi d'equilibrio di S più particolarmente corrispondono ⁽⁸⁾ alle eventuali direzioni nulle di ν .

Per la ricerca degli assi di squilibrio e di equilibrio di S_α , occorre studiare le relative omografie

$$[4] \quad \sigma_\alpha = \sum_{s=1}^n H[\alpha(OP_s), f_s] = \sigma K\alpha$$

e

$$[5] \quad \nu_\alpha = \sigma_\alpha - I_1 \sigma_\alpha.$$

Tenendo presente l'espressione generica ⁽⁹⁾ del rotore α

$$[6] \quad \alpha = \cos \varphi + \sin \varphi \cdot u \wedge + (1 - \cos \varphi) H(u, u),$$

nonchè quella dell'invariante primo del prodotto di due omografie in cui un fattore è una diade od un'assiale ⁽¹⁰⁾, si ha da [4]

$$I_1 \sigma_\alpha = \cos \varphi \cdot I_1 \sigma + (1 - \cos \varphi) u \times \sigma u.$$

Sostituendo in [5] e tenendo conto di [3] e [4], si ottiene in definitiva come espressione dell'omografia ν_α

$$(7) \quad \nu_\alpha = \nu K\alpha + \frac{1}{2} I_1 \nu (1 - K\alpha) - (1 - \cos \varphi) u \times \nu u.$$

3. Poniamoci anzitutto nelle ipotesi del teorema I, cioè

$$[8] \quad \nu u = 0.$$

Assumiamo come terna di riferimento una terna cartesiana trirettangola $T \equiv Oi_1 i_2 i_3$ che sia terna principale di ν ed abbia inoltre $i_3 = u$.

Con riferimento a tale terna sia [cfr. [8]]

$$\nu \equiv \begin{vmatrix} \nu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

⁽⁷⁾ Cfr. loc. cit. ⁽²⁾, pag. 98.

⁽⁸⁾ Cfr. loc. cit. ⁽²⁾, pag. 128.

⁽⁹⁾ Cfr. loc. cit. ⁽⁵⁾, pag. 124.

⁽¹⁰⁾ Cfr. loc. cit. ⁽⁵⁾, pag. 108 e sgg.

Collo stesso riferimento si ha da [6]

$$K\alpha \equiv \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Sostituendo in [7] e tenendo sempre conto di [8], si ottiene come matrice dei coefficienti di v_α rispetto a T

$$[9] \quad \begin{vmatrix} v_1 \cos^2 \frac{\varphi}{2} + v_2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} & (v_1 - v_2) \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} & 0 \\ (v_1 - v_2) \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} & v_1 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + v_2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Si consideri ora la terna trirettangola $T^* \equiv Ot_1^* t_2^* t_3^*$ in cui viene a sovrapporsi la terna T dopo una rotazione di ampiezza $\frac{\varphi}{2}$ attorno ad $t_3 \equiv u$. È ovviamente

$$t_1^* = \cos \frac{\varphi}{2} t_1 + \sin \frac{\varphi}{2} t_2, \quad t_2^* = -\sin \frac{\varphi}{2} t_1 + \cos \frac{\varphi}{2} t_2, \quad t_3^* = t_3.$$

Tenendo presente la legge di trasformazione dei coefficienti di una omografia al variare della terna di riferimento, è facile controllare sulla [9] che la matrice di v_α rispetto a T^* si riduce alla forma

$$\begin{vmatrix} v_1 & 0 & 0 \\ 0 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

L'omografia v_α ha quindi rispetto a T^* la stessa matrice dei coefficienti che l'omografia v ha rispetto a T . E resta così dimostrato il teorema I.

4. Poniamoci ora nelle ipotesi del teorema II, cioè

$$[10] \quad \varphi = \pi, \quad u \wedge vu = 0, \quad vu \neq 0.$$

Rispetto alla terna T , intendendo ancora che essa sia terna principale di v e che abbia $t_3 \equiv u$, si ponga

$$v \equiv \begin{vmatrix} v_1 & 0 & 0 \\ 0 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Collo stesso riferimento si ha da [6] e [10]

$$K\alpha \equiv \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Sostituendo in [7] e tenendo sempre conto di [10], si ottiene come matrice dei coefficienti di v_α rispetto a T

$$[11] \quad \begin{vmatrix} v_2 - v_3 & 0 & 0 \\ 0 & v_1 - v_3 & 0 \\ 0 & 0 & -v_3 \end{vmatrix}.$$

Ne segue che le dilatazioni v e v_α hanno le stesse direzioni unite se

$$v_1 = 0, \quad v_2 = 0, \quad v_1 = v_3, \quad v_2 = v_3.$$

Se è invece $v_1 = 0$, i_1 è direzione nulla di v ed ogni direzione ortogonale ad i_1 è direzione unita di v_α . Analogamente se $v_2 = 0$. Se poi $v_1 = v_2 = 0$ ogni direzione ortogonale ad i_3 è direzione nulla di v ed ogni direzione è unita per v_α .

Se $v_1 = v_3$, ogni direzione è ortogonale ad i_2 è direzione unita di v ed i_2 è direzione nulla di v_α . Analogamente se $v_2 = v_3$. Se poi $v_1 = v_2 = v_3$ ogni direzione è unita per v ed ogni direzione ortogonale ad i_3 è direzione nulla di v_α . Sono anzi questi ultimi gli unici casi in cui v_α ammette direzioni nulle.

Resta così dimostrato anche il teorema II.

5. A titolo d'esempio si consideri, con riferimento alla terna trirettangola $T \equiv Oi_1 i_2 i_3$, il sistema S costituito dalle tre coppie di braccio nullo $(P_s, c_s i_s)$ e $(P'_s, -c_s i_s)$ ($s = 1, 2, 3$), ove i punti d'applicazione P_s e P'_s dei vettori delle coppie si intendono definiti da $OP_s = -OP'_s = \frac{1}{2} i_s$ ($s = 1, 2, 3$).

Il sistema S è evidentemente un sistema equilibrato. Si ha inoltre da [2]

$$\sigma = \sum_{s=1}^3 c_s H(i_s, i_s),$$

cioè la dilatazione σ ammette T come terna principale e c_1, c_2, c_3 come coefficienti principali.

Ne segue, per la [3], che T è anche terna principale della dilatazione v , i cui coefficienti principali restano espressi da

$$[12] \quad v_1 = -(c_2 + c_3), \quad v_2 = -(c_1 + c_3), \quad v_3 = -(c_1 + c_2).$$

In base alla [12] è immediato adattare l'esempio in questione ai singoli casi distinti ai nn. 3 e 4, il che lasciamo compiere al lettore. Ci soffermeremo qui soltanto ad illustrare (specificando ulteriormente il sistema S) la possibilità, segnalata nel teorema II, che nel passaggio da S ad S_α si verifichino eliminazioni od apparizioni di assi di equilibrio.

Sia $c_1 = -c_2 = 1, c_3 = 0$, con che il sistema S si riduce alle due coppie di braccio nullo costituite dai vettori applicati $(P_1, i_1), (P'_1, -i_1)$ e $(P_2, -i_2), (P'_2, i_2)$. Tale sistema ammette come assi d'equilibrio tutte le rette parallele ad i_3 . Si sottoponga ora l'insieme dei punti d'applicazione ad una simmetria rispetto all'asse Oi_1 , il che equivale a scambiare i punti P_2 e P'_2 senza alterare i vettori delle rispettive forze. Il nuovo sistema è ancora equilibrato, ma non ammette più alcun asse d'equilibrio.

Viceversa, sia $c_1 = c_2 = 1, c_3 = 0$. Il sistema S corrispondente si riduce alle due coppie di braccio nullo $(P_1, i_1), (P'_1, -i_1)$ e $(P_2, i_2), (P'_2, -i_2)$, e non ammette alcun asse d'equilibrio. Sottoponendo l'insieme dei punti d'applicazione ad una simmetria rispetto all'asse Oi_1 , il nuovo sistema equilibrato che si ottiene ammette come assi d'equilibrio tutte le rette parallele ad i_3 .

Astronomia. — *Sopra l'età dei pianeti e sopra l'incremento dei parametri delle loro orbite, a causa del termine cosmogonico.* Nota ⁽¹⁾ di GIUSEPPE ARMELLINI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. Nella nostra ⁽²⁾ Nota VIII sopra *I problemi fondamentali della Cosmogonia e la legge di Newton*, abbiamo rigorosamente dimostrato per mezzo di considerazioni asintotiche (che sono forse le uniche matematicamente sicure, in un problema che conduce ad equazioni differenziali non integrabili), che il parametro delle orbite planetarie cresce verso un limite che può essere centinaia di volte maggiore del valore primitivo. Anzi nel caso di un Sole accompagnato da un pianeta di massa infinitesima, questo valore limite è l'infinito.

Ora, in una Nota testè apparsa sulle Pubblicazioni dell'Osservatorio di Bologna ⁽³⁾, il prof. F. ZAGAR, pure ammettendo il rigore della dimostrazione asintotica da noi data, vuole obiettare che in pratica tale incremento potrebbe essere tanto lento da rendersi quasi insensibile durante tutta la vita del Sistema Planetario; e ciò almeno per i pianeti più lontani dal Sole e in particolare per Nettuno. Ovviamente, poichè le variazioni dell'inclinazione sono connesse con quelle del parametro, ne segue che anche queste variazioni — pur potendo essere globalmente assai ampie — sarebbero, almeno per i pianeti più lontani, estremamente lente. Egli dà, in vero, ad ϵ il valore estremamente basso $4 \cdot 10^{-17}$, ma aggiunge ⁽⁴⁾ che « anche un valore cento e mille volte più forte non modificherebbe il tenore delle conclusioni ».

Tale difficoltà merita di essere attentamente esaminata, ed a ciò dedichiamo la presente nota, nella quale ci restringiamo però al solo esame del parametro, essendo la variazione dell'inclinazione strettamente

⁽¹⁾ Presentata nell'Adunanza del 22 novembre 1941-XX.

⁽²⁾ Cfr. « Rend. R. Acc. d'Italia », vol. II, fasc. 6, 1941.

⁽³⁾ Cfr. « Pubbl. Oss. Bologna », vol. III, n. 15 e « Mem. Soc. Astr. », XIV, 4.

⁽⁴⁾ Cfr. Mem. cit., pag. 9.

dipendente da quella del parametro. A tale scopo seguiamo dapprima il procedimento dato dal nominato autore.

2. Con calcoli che è inutile riportare, egli dimostra che il parametro p obbedisce alla seguente ineguaglianza differenziale:

$$[1] \quad p^3 \frac{dp}{di} \leq \frac{2}{3} f \varepsilon I_c \frac{\omega}{n}$$

dove $f, \varepsilon, I_c, \omega, n$ indicano, al solito, il coefficiente attrattivo, il coefficiente cosmogonico, il momento d'inerzia del Sole rispetto al suo centro, la velocità angolare di rotazione del Sole ed il moto medio del pianeta.

Poichè $\frac{2}{3} I_c$ è eguale al momento d'inerzia assiale, sarà bene intanto di notare che il termine $\frac{2}{3} I_c \omega$ è precisamente eguale al momento K della quantità di moto del globo solare.

Osserviamo di passaggio che, trascurando l'eccentricità (come del resto fa il prof. Z. nel lavoro che esaminiamo) vige il segno di eguaglianza, mentre p diviene eguale al semiasse maggiore a . La [1] dà quindi:

$$[2] \quad a^3 \frac{da}{dt} = f \varepsilon \frac{K}{n}$$

Eliminiamo ora n con la nota relazione

$$[3] \quad n^2 a^3 = Mf$$

dove M indica la massa del Sole; troveremo:

$$[4] \quad a^{3/2} \frac{da}{dt} = \frac{f \varepsilon K}{\sqrt{Mf}}$$

da cui integrando si ha:

$$[5] \quad a = (C + \beta t)^{2/5}$$

essendo C e β costanti. È precisamente questa l'equazione da me trovata e pubblicata⁽¹⁾ fin dal maggio 1940 e contro la quale il prof. ZAGAR sollevò varie⁽²⁾ difficoltà, alle quali non credemmo di replicare. Egli stesso ora dimostra che questa formola era esatta.

Ma, per continuare il procedimento adoperato dal nostro autore, egli sostituisce nella [1] al posto di ω il suo valore massimo ω_0 e cioè

(¹) Cfr. G. ARMELLINI, *I problemi fondamentali della Cosmogonia*, Nota VI, « Rend. R. Acc. d'Italia », vol. I, fasc. 6.

(²) Cfr. « Pubbl. Oss. Bologna », vol. III, n. 13.

la velocità angolare iniziale del Sole, al posto di n il suo valore minimo e cioè il moto medio attuale del pianeta ed integra, ottenendo:

$$[6] \quad \frac{p^4 - p_0^4}{4} = \frac{2}{3} f \varepsilon \frac{I_e \omega_0}{n} (t - t_0).$$

Sceglie quindi come unità di lunghezza, di massa e di tempo, il raggio solare, la massa del Sole ed il giorno medio, con cui ha $I_e = \frac{3}{5} Mr^2 = 0,6$ ed $f = 2938$. Prende poi $\omega_0 = 0,85$ ed $\varepsilon = 3,2 \cdot 10^{-11}$ (corrispondente ad $\varepsilon = 4 \cdot 10^{-17}$ in unità C. G. S.) e pone $t - t_0 = 10^{12}$ anni. Essendo il parametro attuale dell'orbita di Nettuno eguale a 6471,3 raggi solari, egli ha per il parametro primitivo p_0 :

$$[7] \quad p_0^4 = (6471,3)^4 - 4,519 \cdot 10^{11}$$

e cioè $p_0 = 6470,9$: valore presso che eguale al primitivo. Ne deduce quindi la scarsa variabilità effettiva del parametro di Nettuno, e quindi la difficoltà di ammettere la nostra ipotesi cosmogonica. Tale risultato dobbiamo ora esaminare, riferendoci sempre a Nettuno, appunto perchè questo, a causa della maggior distanza dal Sole, è quello per cui la variazione del parametro si dimostra più lenta.

3. Cominciamo ad osservare che la nostra ipotesi cosmogonica – come del resto abbiamo spesso chiarito e in queste Note ed in alcuni scritti di divulgazione ⁽¹⁾ – è indipendente dalla particolare origine dei pianeti. Si può dunque supporre indifferentemente:

a) Che tutti i pianeti siano usciti dal globo solare;

b) Che alcuni di essi, e precisamente i più lontani, siano stati invece catturati in seguito.

Prendiamo a considerare la prima ipotesi.

4. Anzitutto, se tutti i pianeti sono stati prodotti da eruzioni del globo solare, è evidente che il momento della quantità di moto del Sole primitivo doveva essere eguale a quello di tutto il Sistema Planetario attuale; almeno astraendo per semplicità dalla trasformazione della materia in energia. Ora il momento totale della quantità di moto dell'attuale Sistema Planetario è eguale ⁽²⁾, in unità C. G. S., a $3,234 \cdot 10^{50}$;

⁽¹⁾ Cfr. p. es., G. ARMELLINI, *Una nuova ipotesi cosmogonica*, in « Scientia », gennaio 1939.

⁽²⁾ Cfr. L. GIALANELLA, *Il momento della quantità di moto del Sistema Planetario*, in « Rend. Lincei », 1936, sem. I.

vale a dire, nelle unità adoperate da ZAGAR, a 2,92. Invece egli pone $\frac{2}{3} I_c = 0,4$ ed $\omega_0 = 0,85$ e cioè dà a K il valore 0,34: vale a dire un valore circa nove volte minore del minimo ammissibile, secondo la Meccanica.

Ho detto del « minimo ammissibile », giacchè nella Meccanica non si tiene conto della trasformazione della materia in energia, dove ogni atomo che sparisce porta con sè quella porzione di momento della quantità di moto di cui era fornito. Il momento K del Sole primitivo era quindi certamente maggiore di questo minimo ora calcolato, giacchè parte della sua massa si è certamente convertita in energia radiante.

Quanto al coefficiente cosmogonico ε , noi dicemmo che il massimo valore ammissibile, affinchè le perturbazioni che esso produce siano insensibili alle osservazioni, era di circa $4 \cdot 10^{-14}$ in unità C. G. S.

Tale valore si adatta a tutti i pianeti, eccettuato come dicemmo Mercurio; dove però è necessario aggiungere che esistono ancora varie incertezze non solo nella teoria ma anche nelle osservazioni, tanto che gli astronomi più competenti sentono la necessità di una nuova discussione ⁽¹⁾ di tutte le osservazioni. In ogni caso noi consentiamo volentieri, come già dicemmo nelle passate Note, a ritenere possibili valori minori del coefficiente cosmogonico; senza però credere che sia assolutamente necessario di abbassarlo fino al valore di $4 \cdot 10^{-17}$ come fa il prof. ZAGAR. E ciò almeno fino a che questa invocata revisione delle osservazioni di Mercurio non sia stata compiuta.

5. Ciò posto riprendiamo l'equazione del prof. ZAGAR, sostituendo al posto del valore di K da lui adoperato, il valore 2,92; e, per il momento, prendiamo per ε il valore $4 \cdot 10^{-14}$ da noi adottato, per abbassarlo poi successivamente fino al valore di ZAGAR.

La [7] diviene:

$$[8] \quad p_0^4 = (6471,3)^4 - 3,8813 \cdot 10^{15} < 0$$

da cui segue per p_0 un valore *immaginario*. Vale a dire 10^{12} anni or sono Nettuno, secondo la [6], non sarebbe ancora uscito fuori dal globo solare.

Occorre quindi *abbassare* il limite di tempo, riducendolo a meno della metà. Ponendo infatti $t - t_0 = 0,451 \cdot 10^{12}$, la formola da $p_0 = 1$; vale a dire in questo intervallo di tempo il parametro sarebbe variato nel rapporto 6471 : 1, od in altre parole Nettuno sarebbe allora uscito dal globo solare. È quindi completamente inesatto affermare che anche con un

⁽¹⁾ Cfr. p. esempio, J. CHAZY, *La théorie de la Relativité et la Mécanique céleste*, to. I. pag. 182.

valore di ε mille volte più forte – vale a dire col nostro valore $4 \cdot 10^{-14}$ – la variazione del parametro in 10^{12} anni sarebbe insensibile.

Deve notarsi però che noi abbiamo supposto che la massa del Sole si sia mantenuta costante in tutto questo intervallo di tempo; cosa contraria al vero, giacchè in tal caso il Sole non avrebbe irradiato energia. Secondo ogni probabilità, 10^{12} anni fa il Sole era una stella bianca di tipo spettrale A; e tali stelle hanno in media una massa sei volte superiore a quella solare, ciò che ridurrebbe l'intervallo di tempo a meno di 10^{11} anni, essendo K sei volte maggiore. E ciò anche trascurando l'incremento del parametro, prodotto dalla diminuzione della massa.

Tutto ciò, come si è detto, dando ad ε il valore massimo; se si adoperano per ε valori minori – e se non si tiene conto della variazione di massa – la formola mostra che l'intervallo di tempo cresce in ragione inversa. Se invece se ne tiene conto, tale accrescimento è meno rapido, giacchè quanto più arretriamo nel tempo, tanto maggiore diviene la massa solare, e quindi il valore K .

Se quindi, per metterci nell'ipotesi a noi più sfavorevole, diamo ad ε il valore di $4 \cdot 10^{-17}$, come fa il prof. ZAGAR, e cioè un valore mille volte inferiore al nostro, possiamo ritenere per $t - t_0$ un accrescimento di settecento od ottocento volte, e forse anche meno. Vediamo dunque che anche nella peggiore ipotesi, il tempo necessario per far variare il parametro di Nettuno dal valore attuale di 6471 ad 1 (e cioè il tempo indicante l'epoca in cui Nettuno, primo tra i pianeti, si è separato dal globo solare, iniziando così la formazione del Sistema Planetario) sarebbe al più compreso tra 10^{13} e 10^{14} anni.

È ammissibile una tale età per il Sistema Planetario? Negarlo sarebbe certamente assai audace.

Se si vuole infatti essere obbiettivi, occorre riconoscere che, per quanto concerne la determinazione dell'età dell'Universo, non abbiamo ancora altro che congetture più o meno discordanti tra loro e che questa età è ancora tanto incerta (e forse assai più incerta) di quanto lo sia la lunghezza del raggio di curvatura dell'Universo. Gli unici fatti attendibili sono i seguenti:

a) Due miliardi ($2 \cdot 10^9$) di anni fa, la crosta terrestre era già solidificata e già coperta di strati sedimentari, in cui appunto abbiamo ritrovato i materiali radioattivi che sono serviti a tale determinazione. Esistevano quindi, da molto tempo, i mari ed un regime di piogge.

Se teniamo conto del tempo necessario affinché la Terra, da globo gassoso, passasse ad un tale stato, vediamo che la sua età ben difficilmente potrebbe essere inferiore a 10^{11} anni, mentre i pianeti più lontani – almeno se si ritiene che essi siano usciti dal globo solare – debbono essere molto più antichi.

b) Il Sole, ammettendo che la quantità di energia da esso irradiata, si conservi inalterata, può ancora durare più di 10^{13} anni; infatti ogni grammo di materia solare irradia annualmente un'energia pari a $6 \cdot 10^7$ erg., mentre la sua provvista di energia è di $9 \cdot 10^{20}$ erg. E poichè il Sole ha certamente già percorso la maggior parte del suo ciclo evolutivo, è probabile che la sua età passata sia molto maggiore di quella che gli resta a vivere.

Anche quindi se si ammette il valore bassissimo $4 \cdot 10^{-17}$ dato dal prof. ZAGAR al coefficiente cosmogonico e se si fa uso della sua stessa formola, applicandola al pianeta il cui parametro ha la variazione più lenta e cioè a Nettuno, si trova che il tempo richiesto per dare al parametro stesso una variazione di migliaia di volte il valore primitivo, non supera limiti ammissibili.

6. Ma l'età si abbassa di molto se si suppone che i pianeti più lontani, per esempio, Urano e Nettuno, siano stati catturati dal Sole – in epoche che possono ammettersi anche relativamente recenti – quando il Sistema Planetario originario del Sole, e comprendente quindi tutti gli altri pianeti da Mercurio a Saturno, era già formato. In questo caso infatti l'età del Sistema Planetario è quella di Saturno.

Poichè, come è noto, le catture sono più probabili quando il corpo catturato ha moto diretto ed orbita poco inclinata su quella dei pianeti formanti il sistema catturatore, si spiega facilmente il senso del moto e la piccola inclinazione delle orbite di Nettuno ed Urano; inclinazione che, del resto, sarebbe stata diminuita in seguito, in virtù del teorema di complanarità delle orbite.

Probabilmente però i pianeti catturati, Urano e Nettuno, avevano sul principio eccentricità altissime, quasi paraboliche, venendo appunto dagli spazi interstellari. Ma tale eccentricità è oggi scomparsa a causa del termine cosmogonico: fenomeno per cui, come abbiamo visto, si richiede un intervallo di tempo di pochi milioni di anni.

Non ci occuperemo di altre difficoltà « qualitative » sollevate dallo stesso autore ed alle quali, del resto, è facile rispondere. I pochi satelliti « eccezionali » del Sistema Planetario, appunto perchè sono i più lontani dal rispettivo pianeta, potrebbero essere stati catturati in epoche recentissime; l'eccentricità delle stelle doppie cresce in media col crescere della distanza del satellite dall'astro principale, per cause perturbatrici messe bene in luce dal JEANS, ecc.

7. Riepilogando, ad un esame obbiettivo non sembra che le difficoltà numeriche, sollevate contro la nostra ipotesi, abbiano seria consistenza. Quanto alla formola [5], da noi trovata e di cui ci servimmo, essa è ora confermata dallo stesso nostro contraddittore.

Possiamo quindi chiudere definitivamente questo dibattito scientifico, con la convinzione che la nostra ipotesi cosmogonica meriti di essere annoverata tra le altre che la scienza possiede in questo campo. E ciò tanto più che, mentre le altre ipotesi cosmogoniche (a parte le difficoltà che ciascuna di esse presenta) sono fondate su presupposti che potremmo dire cervelotici (esistenza di una nebulosa ruotante, incontro del Sole con un'altra stella, ecc.) la nostra è fondata su concetti di cui nessuno potrà obbiettivamente negare l'alto grado di verisimiglianza; e cioè l'analogia tra la legge di propagazione della gravità e quella della luce e l'ipotesi che la gravità stessa, come in genere tutte le forze della natura, sia una forza dissipativa.

Astronomia (Statistica stellare). — *L'ellissoide di velocità per il gruppo di stelle formanti « l'ammasso del Sole »* ⁽¹⁾. Nota di LUCIA ROVERA, presentata ⁽²⁾ da GIUSEPPE ARMEL-LINI, Aggregato della R. Accademia d'Italia.

1. — L'esistenza di un ammasso solare, cioè di un gruppo di stelle muovendosi insieme con il Sole, fu per la prima volta notata dallo SCHIAPARELLI nei primi anni di questo secolo ⁽³⁾; di questo argomento si sono occupati successivamente G. HORN D'ARTURO ⁽⁴⁾ e L. GIALANELLA ⁽⁵⁾, ai quali fu possibile impostare il problema su basi più rigorose, dato il maggior numero e la maggior precisione dei dati di cui disponevano.

Le stelle di un tale ammasso dovrebbero presentare velocità nulla rispetto al Sole; il fatto però che le caratteristiche stellari, specie parallassi e velocità radiali, siano affette da notevoli errori di determinazione, porta a considerare, come appartenenti all'ammasso stesso, le stelle aventi velocità spaziali relative molto piccole, inferiori per esempio, ai 6 o ai 7 km/sec.

Secondo le conclusioni di L. GIALANELLA, l'ammasso così precisato è formato da un gruppo di 122 stelle aventi velocità spaziali minori di 7 km/sec, ed ha dimensioni di circa 300 parsec e cioè circa 1000 anni di luce; in esso predominano le stelle di tipo spettrale A, la cui percentuale è di 35,8, mentre nell'intero sistema galattico è di 21,7.

Sorge ora il problema di decidere se questo ammasso si debba considerare reale oppure no, o più esattamente se le stelle che lo formano

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nel R. Osservatorio Astronomico di Roma su Monte Mario.

⁽²⁾ Nell'Adunanza del 22 novembre 1941-XX.

⁽³⁾ Cfr. *Orbite cometarie, correnti cosmiche e meteoriti*. « Riv. di Fis. Mat. e Sc. Nat. », Pavia 1908.

⁽⁴⁾ *L'ammasso di stelle dotate di velocità spaziali minime*. « Pubbl. Osserv. di Bologna », vol. II, 4, 1929; *L'ammasso triplanare delle stelle concomitanti il Sole*. « Pubbl. Osserv. di Bologna », vol. II, 5, 1930.

⁽⁵⁾ *Nuove ricerche sull'ammasso del Sole*. « Rend. R. Accad. Naz. dei Lincei », vol. XXVI, 1937; vol. XXVII, 1940. « Rend. R. Accad. d'Italia », vol. I, 1940.

possano avere avuto un'origine comune, oppure si trovino così raggruppate solo casualmente a causa del valore e della direzione comune della loro velocità. A favore della seconda ipotesi stanno considerazioni statistiche, basate sul confronto del numero di tali stelle quale è dato dalle osservazioni con quello calcolato per mezzo di una legge gaussiana di distribuzione delle velocità, e il fatto che le stellè formanti l'ammasso sono poco numerose e distribuite in uno spazio vastissimo; d'altra parte però il prevalere fra le stelle considerate di un unico tipo spettrale su tutti gli altri può far supporre che l'ammasso sia reale (¹).

Per portare un contributo, anche se non definitivo, alla questione, mi sono proposta di determinare l'ellissoide di velocità dell'ammasso. Se si verificasse infatti la seconda delle ipotesi riferite, questo ellissoide non dovrebbe differire sostanzialmente da quello di tutte le stelle prossime al Sole, mentre nel caso contrario le differenze fra i due ellipsoidi di velocità potrebbero essere notevoli.

2. — Cataloghi usciti posteriormente agli studi di L. GIALANELLA hanno messo a nostra disposizione dati diversi e più attendibili risultanti da ricerche più recenti, in base ai quali si sono dovute modificare le nostre nozioni sulla costituzione dell'ammasso. Desumendo infatti i moti propri in ascensione retta e in declinazione dal *General Catalogue* di Boss (Washington, 1937) e dal *Bergedorfer Eigenbewegungs-Lexikon* di Schorr (1936), e usandoli per calcolare le componenti delle velocità spaziali eliocentriche, ho trovato per un buon numero di stelle, velocità diverse da quelle calcolate in precedenza. Precisamente delle 122 stelle prima considerate, soltanto 94 presentano, secondo questi nuovi dati, velocità inferiori ai 7 km/sec., e di queste sole ho perciò tenuto conto per il calcolo dell'ellissoide di velocità. I moti propri da me usati per questa determinazione sono riportati nella seconda e nella terza colonna della tavola allegata, dove inoltre nella quarta colonna ho raccolto i valori delle velocità spaziali eliocentriche V_g .

3. — Il metodo che ho seguito per determinare l'ellissoide di velocità, è quello dei momenti: ho scelto una terna di assi cartesiani aventi per origine il Sole, l'asse x diretto verso il punto vernale γ , l'asse y a 90° nel piano dell'equatore celeste e l'asse z verso il polo boreale della sfera celeste ed ho indicato con α , δ , μ_α , μ_δ l'ascensione retta, la declinazione

(¹) Cfr. A. COLACEVICH, *Sul numero delle stelle con piccola velocità spaziale rispetto al Sole*. « Rend. R. Accad. d'Italia », 1940 e K. GRAF FERRARI, *Zur Frage der Realität des « Sonnenhaufen »*, A. N., Bd. 268 (1939).

ed i moti propri delle singole stelle. Ho quindi calcolato le componenti u, v, w delle *velocità eliocentriche* delle stelle per mezzo delle formule

$$[1] \quad \begin{cases} u = V_0 \cos \alpha \cos \delta - \frac{k}{\pi''} (\mu_a'' \sin \alpha \cos \delta + \mu_\delta'' \cos \alpha \sin \delta) \\ v = V_0 \sin \alpha \cos \delta + \frac{k}{\pi''} (\mu_a'' \cos \alpha \cos \delta - \mu_\delta'' \sin \alpha \cos \delta) \\ w = V_0 \sin \delta + \frac{k}{\pi''} \mu_\delta'' \cos \delta \end{cases}$$

(dove V_0 è la velocità radiale in km/sec. e π'' la parallasse in secondi d'arco). Da queste ho ricavato le *velocità peculiari* (cioè riferite al baricentro del gruppo) di componenti U, V, W , ricordando che si ha

$$[2] \quad U = u - U_0 \quad V = v - V_0 \quad W = w - W_0$$

dove U_0, V_0, W_0 sono le componenti della velocità eliocentriche del baricentro del gruppo stesso e cioè praticamente le medie di U, V, W ; i risultati di questi calcoli sono riportati nelle ultime colonne della tabella qui unita.

Costruite poi le 6 quantità dette *momenti*, cioè

$$[3] \quad \begin{cases} M_{11} = \frac{1}{94} \sum_i U_i^2 & M_{22} = \frac{1}{94} \sum_i V_i^2 & M_{33} = \frac{1}{94} \sum_i W_i^2 \\ M_{12} = \frac{1}{94} \sum_i U_i V_i & M_{13} = \frac{1}{94} \sum_i U_i W_i & M_{23} = \frac{1}{94} \sum_i V_i W_i \end{cases}$$

ho ricavato le lunghezze dei *semiassi dell'ellissoide* dalle 3 radici k_1, k_2, k_3 dell'equazione seguente, ottenuta uguagliando a zero il determinante secolare:

$$[4] \quad \begin{vmatrix} M_{11} - k & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} - k & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} - k \end{vmatrix} = 0.$$

I coseni direttori dei 3 assi, $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, sono poi dati da

$$[5] \quad \alpha_i = \frac{m_{1i}}{\sqrt{m_{11}^2 + m_{12}^2 + m_{13}^2}} \quad \beta_i = \frac{m_{12}}{\sqrt{m_{11}^2 + m_{12}^2 + m_{13}^2}} \\ \gamma_i = \frac{m_{13}}{\sqrt{m_{11}^2 + m_{12}^2 + m_{13}^2}}$$

ove si ponga nei minori m_{jk} del determinante $k = k_i$ ($i = 1, 2, 3$).

Eseguiti i calcoli con i valori di U, V, W riportati nella tabella, ho ottenuto i risultati seguenti:

lunghezze dei 3 semiassi: 5,8 ; 8,4 ; 11,1;

coseni direttori dell'asse maggiore: $\alpha_3 = 0,32$; $\beta_3 = -0,94$; $\gamma_3 = -0,1$.

Servendomi di questi risultati, ho trovato per l'ascensione retta e la declinazione del *vertice* (punto del cielo verso cui è diretto l'asse maggiore) i valori:

$$\alpha = 19^h 16^m \quad \delta = -5^\circ,$$

e per le coordinate galattiche, longitudine e latitudine, i valori:

$$G = 359^\circ \quad g = -10^\circ.$$

Per l'ellissoide generale di velocità delle stelle vicine al Sole, si ha invece, come è noto, $G = 347^\circ$, $g = 0^\circ$, e le lunghezze dei semiassi sono circa 20, 15, 15.

4. Dai risultati ora trovati, si possono dedurre le osservazioni seguenti:

1° l'ellissoide di velocità dell'ammasso solare non risulta approssimativamente rotondo come quello generale delle stelle galattiche; questa affermazione non si può tuttavia considerare definitiva in quanto sui valori trovati influiscono in misura notevole gli errori commessi nella determinazione delle caratteristiche stellari.

2° il vertice non giace sul piano galattico, mentre la sua longitudine è intermedia a quelle trovate da LINDBLAD ⁽¹⁾ per le stelle di tipo A divise in due gruppi secondo la grandezza dei loro moti propri (cioè, per $\mu < 0''040$, $G = 21^\circ$; per $0''040 < \mu < 0''160$, $G = 356^\circ$): questo risultato si accorda bene col fatto già ricordato che nell'ammasso prevalgono le stelle di tipo A.

Se confrontiamo i risultati ottenuti con quelli ricavati da W. M. SMART per l'ellissoide generale di velocità delle stelle prossime al Sole, vediamo che le differenze fra i due ellissoidi di velocità, pur non essendo così nette da provare con certezza la realtà dell'ammasso solare a cui farebbe pensare la preponderanza delle stelle di tipo A, non sono d'altra parte trascurabili, onde acquista maggior peso l'opinione che questo ammasso stellare si possa considerare reale.

⁽¹⁾ Cfr. LINDBLAD, *Das Stellar System* in « Handbuch der Astrophysik », Berlin, 1933, pag. 1065.

TABELLA.
(Stelle dell'ammasso solare)

N.	Stelle	Moto proprio		V_s	Velocità peculiare		
		μ''_α	μ''_δ		U	V	W
1	B 5	0''018	0''005	5,80	— 3,82	4,29	0,49
2	22 Andromedae	0 000	— 0 001	5,50	— 1,81	— 0,47	— 4,77
3	B 41	— 0 003	0 003	5,10	— 4,39	— 1,64	— 2,44
4	B 166	— 0 009	— 0 001	6,50	— 1,93	— 5,28	— 3,55
5	B 229	— 0 013	— 0 008	4,00	— 2,45	— 3,85	— 0,10
6	φ Andromedae	0 009	— 0 008	4,00	0,90	2,48	— 1,79
7	ν Piscium	— 0 024	0 005	3,60	1,30	— 3,53	1,35
8	λ Arietis	— 0 099	— 0 012	5,10	2,23	— 4,71	0,03
9	49 Cassiopeiae	— 0 070	— 0 015	5,20	4,34	— 2,30	— 0,24
10	ε Trianguli	— 0 019	— 0 012	5,70	4,89	— 2,14	— 0,51
11	10 Trianguli	0 012	— 0 004	5,10	1,11	4,33	1,35
12	i Cassiopeiae A	— 0 034	0 016	5,40	— 2,34	— 5,17	2,52
13	ζ Horologii	0 069	0 000	7,00	— 5,34	4,60	1,50
14	γ Persei	0 004	— 0 003	1,26	— 0,05	0,73	1,03
15	β Persei	0 007	— 0 001	5,75	2,09	3,26	4,20
16	31 Persei	0 004	— 0 012	6,80	1,44	4,60	— 3,65
17	B 864	— 0 004	— 0 008	5,00	1,49	0,77	— 3,89
18	B 896	0 010	— 0 006	5,90	— 2,58	0,44	5,99
19	β GC 1927/b	0 004	— 0 009	4,60	— 0,03	1,93	— 3,38
20	B 914	— 0 069	— 0 001	4,83	0,96	— 3,61	3,97
21	ν Tauri	0 006	— 0 002	6,10	— 4,25	— 4,09	— 0,30
22	46 Tauri	— 0 001	0 009	4,40	1,57	2,73	2,81
23	B 974	— 0 015	— 0 001	4,08	1,45	1,50	3,65
24	66 Tauri	— 0 015	— 0 006	4,10	2,20	— 3,07	— 1,04
25	58 Persei	— 0 015	— 0 018	6,05	4,00	3,61	— 0,03
26	SZ Tauri	— 0 015	— 0 007	6,25	3,57	— 4,24	— 2,37
27	α Camelopardi	0 001	0 008	6,30	— 0,32	0,21	6,86
28	5 Camelopardi	— 0 015	— 0 008	5,20	4,01	2,26	0,75
29	5 Aurigae	— 0 016	0 002	6,44	3,05	2,95	4,68
30	B 1268	0 001	— 0 013	5,10	— 1,09	— 2,27	— 4,07
31	B 1348	0 001	0 002	1,82	— 1,25	— 1,26	2,01

Segue: TABELLA.

N.	Stelle	Moto proprio		V_s	Velocità peculiare		
		μ''_α	μ''_δ		U	V	W
32	26 Tauri	— 0''018	— 0''010	4.86	4.24	— 0.66	— 0.74
33	23 Camelopardi	0 000	0 002	3.78	— 0.74	— 3.18	— 1.99
34	2 Lyncis	— 0 009	0 022	6.48	0.96	— 6.81	0.02
35	W Geminorum	0 012	— 0 001	3.60	— 3.70	— 1.94	0.00
36	B 1672	0 003	0 009	4.36	— 0.79	— 3.86	3.57
37	ν^8 Canis Maioris	— 0 009	— 0 007	4.98	3.55	— 2.24	— 1.79
38	12 Lyncis	— 0 040	— 0 004	5.40	4.60	0.44	— 1.29
39	42 Camelopardi	0 016	0 003	4.25	— 3.72	— 3.16	0.16
40	B D + 33°/1454	— 0 003	— 0 004	6.89	— 0.57	6.27	2.13
41	δ Geminorum <i>b</i>	— 0 021	— 0 015	2.99	0.49	2.36	0.08
42	δ Geminorum <i>f</i>	— 0 021	— 0 015	3.65	0.93	2.89	— 0.03
43	B 1916	— 0 036	0 001	4.50	3.64	— 0.06	— 1.28
44	B 1961	— 0 009	0 006	4.80	— 0.79	4.30	— 0.05
45	4 Puppis	— 0 013	0 006	3.31	1.47	— 0.68	2.19
46	82 Geminorum	— 0 009	0 003	5.40	3.59	— 3.84	— 0.62
47	B 2064	— 0 033	0 015	5.38	2.62	3.74	2.01
48	B 2349	— 0 025	0 016	3.40	1.42	0.36	3.38
49	σ^2 Ursae Maioris	0 058	— 0 079	6.60	— 5.01	2.45	— 3.24
50	τ^2 Hydrae	— 0 013	— 0 014	6.30	— 3.35	4.68	— 1.59
51	B 2568	0 012	— 0 015	4.47	0.64	— 4.05	— 1.81
52	42 Lyncis	— 0 021	— 0 001	4.80	2.92	1.75	— 0.88
53	B 2783	— 0 022	— 0 007	4.30	3.21	1.88	0.49
54	B 2952	— 0 081	0 003	4.00	1.11	2.82	2.49
55	ω Virginis	— 0 009	0 000	6.10	— 3.62	4.65	1.17
56	B 3182	0 042	0 017	3.40	2.47	1.16	1.50
57	12 Comae	— 0 010	— 0 015	3.00	— 3.11	0.59	— 0.33
58	14 Comae	— 0 016	— 0 014	4.90	1.04	2.37	— 3.19
59	16 Comae	— 0 007	— 0 016	4.30	— 3.70	0.82	— 1.98
60	21 Comae	— 0 013	— 0 015	5.70	— 2.90	2.93	— 3.33
61	31 Comae	— 0 018	— 0 016	4.60	— 3.84	1.94	— 1.33
62	B 3479	— 0 009	— 0 015	6.90	— 5.13	1.29	— 4.17
63	BD + 33°/2361	0 018	— 0 011	5.50	— 0.27	— 5.24	— 2.12

Segue: TABELLA.

N.	Stelle	Moto proprio		Γ_s	Velocità peculiare		
		μ_α''	μ_δ''		U	V	W
64	83 Virginis	0''010	— 0''010	2.90	0.88	— 2.75	— 2.06
65	BD + 31°/2605	— 0 018	— 0 007	5.90	— 5.29	2.61	— 0.76
66	π^1 Bootis	0 013	0 006	5.23	3.32	— 3.50	2.57
67	B 3759	0 000	— 0 012	6.14	4.29	3.47	0.53
68	56 Hydrae	0 046	— 0 012	6.93	5.10	— 4.41	0.72
69	γ Ursae Minoris	— 0 064	0 016	5.10	— 0.39	3.68	— 2.47
70	B 4022	0 018	0 003	3.85	3.07	— 0.27	— 0.99
71	19 Ursae Minoris	— 0 004	0 010	3.90	0.72	3.31	0.73
72	80 Ophiuchi	0 013	0 030	6.20	— 0.10	— 5.21	4.60
73	18 Draconis	0 003	— 0 019	5.30	1.79	— 5.18	— 1.39
74	B 4270	0 034	0 062	6.97	3.31	4.18	4.24
75	BD + 56°/1959	— 0 010	0 005	5.90	— 2.35	3.91	— 0.91
76	θ Scorpis	0 015	— 0 005	2.76	1.67	— 1.06	— 1.07
77	γ Ophiuchi	0 003	— 0 012	5.50	0.46	4.75	— 1.33
78	34 Draconis	— 0 010	0 000	2.80	0.27	0.38	— 1.97
79	γ Sagittarii	0 010	— 0 013	4.00	— 3.09	1.89	— 1.40
80	B 4724	— 0 012	— 0 005	3.97	— 4.21	0.78	0.94
81	28 Aquilae A	0 003	0 018	6.06	1.02	— 2.23	6.21
82	ρ Sagittarii	— 0 028	0 023	3.70	— 2.01	— 3.47	2.03
83	B 5002	— 0 012	— 0 023	6.10	— 0.89	— 5.12	— 3.38
84	δ Sagittae	0 004	0 009	4.51	1.68	— 1.53	4.43
85	B 5167	— 0 009	0 005	6.60	— 5.62	3.55	— 0.21
86	B 5190	— 0 003	— 0 002	2.90	— 2.37	— 1.41	— 1.32
87	ν Capricorni	0 013	— 0 018	5.10	1.03	2.70	— 3.17
88	5 Aquarii	— 0 004	0 003	3.50	— 3.52	— 0.86	2.39
89	D T Cygni	— 0 006	— 0 003	2.83	— 1.41	— 2.93	— 0.37
90	φ Capricorni	0 012	0 002	6.60	— 1.04	5.67	3.15
91	π Pegasi	— 0 018	— 0 022	6.40	1.89	— 5.62	— 2.39
92	89 Aquarii c	0 024	— 0 007	5.60	— 4.39	3.44	1.65
93	9 Andromedae	— 0 012	— 0 011	6.20	— 1.53	— 3.34	— 4.77
94	BD + 74°/1033	0 001	— 0 010	4.30	3.73	— 0.79	— 0.40

Fisica (Fisica matematica). — *Sull'introduzione delle « condizioni iniziali » nel calcolo operativo dei sistemi fisici retti da leggi lineari.* Nota di GIUSEPPE APRILE presentata ⁽¹⁾ dall'Accademico GIOVANNI GIORGI.

1. Il problema generale che si presenta in pratica per i sistemi fisici (elettrici, meccanici, ecc.) *lineari* è il seguente:

« Dato l'andamento temporale delle *forze esterne* (nel senso di GIORGI) agenti sul sistema a partire da un dato istante $t = 0$; dati i valori che le grandezze fisiche (aventi il ruolo di coordinate generalizzate o lagrangiane, per i vari gradi di libertà) assumono per $t = 0$ (*condizioni iniziali*); determinare l'ulteriore andamento, per $t > 0$, delle anzidette grandezze ».

Secondo qualche Autore, fautore delle recenti vedute del VAN DER POL, e del DOETSCH, sulla formulazione del calcolo operatorio, questo, nella sua trattazione classica dovuta ad HEAVISIDE-GIORGI, si presenterebbe inadatto ad una conveniente introduzione, nelle calcolazioni, delle « condizioni iniziali », e il suo impiego resterebbe pertanto confinato allo studio dei fenomeni di pura « inserzione », nei quali il sistema si presupponga inizialmente a riposo e del tutto scarico (in volliger Entspannung), cioè con un contenuto energetico eguale a zero in tutti i suoi gradi di libertà.

Nella trattazione di VAN DER POL-DOETSCH-WAGNER, si fonda il calcolo operatorio esclusivamente sulla trasformazione di LAPLACE, rinunciando al concetto, se non al nome, di *operatore* (quale simbolo di un'operazione distributiva collegata con la derivazione), e l'introduzione delle « condizioni iniziali » avviene, in verità assai comodamente e facilmente, attraverso la cosiddetta « regola per la differenziazione nel campo superiore » cioè nel campo delle funzioni trasformande (*Regel für die Differentiation im Oberbereich* ⁽²⁾). Il WAGNER dà, e certo non a torto, notevole importanza a questa regola, e arriva fino ad esprimersi a questo modo: « Die Regel (III) (quella sopracennata) ist eine der wichtigsten,

⁽¹⁾ Nell'Adunanza del 22 novembre 1941-XX.

⁽²⁾ Vedi K. W. WAGNER, *Operatorenrechnung*, Ed. Barth, Lipsia, 1940, pag. 53.

und stellt eine bedeutsame Erweiterung der Operatorenrechnung dar ».

Mi propongo tuttavia di mostrare come, anche in base alla formulazione tradizionale del calcolo operatorio funzionale, quale risulta dai lavori di HEAVISIDE e GIORGI, sia però in realtà altrettanto possibile, e abbastanza agevole, tener conto delle « condizioni iniziali » suddette, e di estendere pertanto le calcolazioni a sistemi che non si trovino inizialmente in riposo.

2. - Credo opportuno ricorrere, per maggiore chiarezza, ad un caso pratico, di ovvia generalizzazione.

Sia un circuito elettrico, costituito da una induttanza L in serie con una resistenza R , su cui agisce, dal tempo $t = 0$ in poi, una f. e. m. E di valore costante E_0 . La corrente I abbia al tempo $t = 0$ il valore iniziale *preesistente* I_0 .

a) Trattazione secondo i procedimenti del WAGNER (uso le sue notazioni) ⁽¹⁾:

Equazione differenziale di partenza:

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E = E_0 \cdot 1.$$

Sia \mathcal{L} il simbolo della trasformazione laplaciana *diretta*, e \mathcal{L}^{-1} quello dell'*inversa*, e poniamo:

$$j = \mathcal{L}I \quad ; \quad e = \mathcal{L}E = E_0.$$

Si ha allora:

$$Lpj - LpI_0 + Rj = E_0$$

$$j = \frac{E_0}{L} \frac{1}{p + \alpha} + I_0 \frac{p}{p + \alpha} \quad ; \quad \left(\text{ove è } \alpha = \frac{R}{L} \right)$$

$$I = \mathcal{L}^{-1} j = \frac{E_0}{R} (1 - e^{-\alpha t}) + I_0 e^{-\alpha t}.$$

b) Trattazione classica (notazioni del GIORGI) ⁽²⁾.

Per la linearità possiamo considerare separatamente l'effetto I_ϵ della f. e. m. $E = E_0 \cdot 1(t)$, e la *variazione libera* I_λ prodotta dalla I_0 , cioè porre:

$$I = I_\epsilon + I_\lambda.$$

⁽¹⁾ WAGNER, op. cit.

⁽²⁾ Vedi per esempio: G. GIORGI, *Sul calcolo delle soluzioni funzionali originate da problemi di elettrodinamica*, « Atti dell'A. E. I. », 1905, e altri lavori successivi.

Calcoliamo I_ε :

$$I_\varepsilon = \frac{1}{L\Delta + R} \cdot E_0 \cdot 1(t) = E_0 \cdot \frac{1}{L\Delta + R} 1(t)$$

L'espressione $\frac{1}{L\Delta + R} 1(t)$ non è che la « funzione generatrice integrale » dell'operatore $f(\Delta) = \frac{1}{L\Delta + R}$ (chè è ben nota) e si ottiene (con $\alpha = \frac{R}{L}$):

$$I_\varepsilon = \frac{E_0}{R} (1 - e^{-\alpha t}).$$

Calcoliamo adesso I_λ . Ponendo $I_0 = \frac{V_0}{R}$ si ha:

$$I_\lambda = f(\Delta) \cdot V_0 \cdot 1(-t) = V_0 f(\Delta) [1 - 1(t)]$$

ove $1(-t)$ è la « funzione telegrafica unitaria *retrospettiva* », e il segno 1 indica (*diversamente* dalle notazioni di HEAVISIDE e del WAGNER) una quantità costantemente eguale ad uno a partire da $t = -\infty$ fino a $t = +\infty$. Per avere $f(\Delta) \cdot 1$ possiamo passare al limite, per $t = +\infty$, nell'espressione di $f(\Delta) 1(t)$. Per il principio di reciprocità, che fa corrispondere il valore ∞ di t al valore 0 di Δ (considerato come una variabile complessa) si ha anche:

$$f(\Delta) \cdot 1 = \lim_{t=\infty} f(\Delta) 1(t) = f(0).$$

Pertanto

$$\begin{aligned} I_\lambda &= V_0 f(0) - V_0 f(\Delta) 1(t) \\ &= \frac{V_0}{R} - \frac{V_0}{R} (1 - e^{-\alpha t}) = I_0 e^{-\alpha t}. \end{aligned}$$

E pertanto, sommando i due risultati trovati:

$$I = I_\varepsilon + I_\lambda = \frac{E_0}{R} (1 - e^{-\alpha t}) + I_0 e^{-\alpha t},$$

cioè precisamente la stessa espressione prima ricavata.

Il calcolo col procedimento classico è forse un po' più lungo ma, oltre ad essere altrettanto esatto e rigoroso, presenta indubbiamente il van-

taggio, che a mio avviso non è piccolo, di essere assai più espressivo dal punto di vista fisico, e di palesare anzi interessanti aspetti dell'intimo comportamento del sistema.

Il procedimento descritto è di carattere generale, perchè sempre è possibile, in base alla linearità, separare le « variazioni forzate partenti dal riposo » (fenomeni di *inserzione*) dalle « variazioni libere » (prodotte dalle condizioni iniziali). Queste ultime variazioni si riconducono facilmente pure a fenomeni di inserzione, tenendo conto della identità formale

$$1 = 1(t) + 1(-t)$$

come si è fatto nell'esempio sopra mostrato.

Fisica. — *Sulla produzione di Xenon da uranio bombardato con neutroni*⁽¹⁾. Nota di TITO FRANZINI e VINCENZO RICCA, presentata⁽²⁾ da LAURETO TIERI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

In altre ricerche⁽³⁾ eseguite in questo Istituto con il metodo della camera di Wilson, si è cercato di mettere in evidenza la disintegrazione dell'uranio bombardato con i neutroni provenienti da un preparato $\text{Em} + \text{Be}$.

Abbiamo approfittato dello stesso preparato (gentilmente fornitoci dal prof. G. C. Trabacchi) per eseguire le presenti ricerche sulla formazione di gas nobili radio-attivi, Xe e Kr, da uranio bombardato con neutroni.

Le classiche ricerche di HAHN e STRASSMANN⁽⁴⁾ confermate dai risultati di vari sperimentatori⁽⁵⁾, avevano già messo in evidenza, fra gli altri prodotti di disintegrazione dell'uranio, la presenza di due isotopi radio-attivi dello Xe e di uno del Kr. Ad essi HAHN e STRASSMANN, assegnavano rispettivamente i pesi atomici 139; > 139 ; 88 e le vite medie 30^s; 15^m; 3^h.

La disposizione sperimentale usata nelle presenti ricerche è schematizzata nella figura 1. Il cilindro di vetro *A*, del diametro di 4,5 cm., contiene circa 800 gr di carbonato d'uranio ed al suo centro è posta la sorgente di neutroni *B*. Superiormente ed inferiormente il tubo è riempito di lana di vetro, come pure lo sono molte delle successive canalizzazioni. Lo stesso tubo *A*, è provvisto di due derivazioni *C*, *D*, la seconda delle quali è un tubo capillare così da permettere un efflusso gassoso attraverso ad esso, molto lento. I tubi *C*, *D* sono congiunti ad un rubinetto a tre vie *E*, che a sua volta è in comunicazione attraverso un secondo rubinetto con

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica della R. Università di Firenze.

(2) Nell'Adunanza del 22 novembre 1941-XX.

(3) FRANZINI T., GALLI M., « Ric. Scientif. », novembre 1941 (in corso di stampa).

(4) HAHN O., STRASSMANN F., « Naturwiss. », 27, pagg. 11, 89, 163 e 529 (1939).

(5) HEYN F., ATEN A., BAKKER C., « Nature », 143, pagg. 516 e 679 (1939); TURNER L. A., « Rev. of Mod. Phys. », 12, pag. 1 (1940); LIVINGOOD J., SEABORG G., « Rev. of Mod. Phys. », 12, pag. 30 (1940); SAVITCH P., « C. R. », 208; pag. 646 (1939).

le pompe per il vuoto e con una sorgente di H_2 elettrolitico accuratamente disseccato. Lo stesso cilindro *A* può essere collegato mediante un cono normale N. 3 al rimanente dispositivo.

Nella figura sono indicati solo gli elementi essenziali di questo e cioè: alcune provette una delle quali contenente un po' di olio « Apiezon A », serve da chiusura pneumatica fra le due parti poste prima e dopo di essa; una boccetta *G* contenente alcool assoluto e munita di un rubinetto a tre vie *I*, mediante il quale può essere messa in comunicazione o con il restante dispositivo o con l'esterno attraverso un secondo rubinetto *L*; un provino di McLeod *M* con campo di misura da 120 a 10^{-4} mm. di mercurio ⁽¹⁾.

All'estremità di tale complesso è saldato un contatore di Geiger-Müller *R* del diametro interno di 18 mm. lungo cm. 22, a pareti di ottone

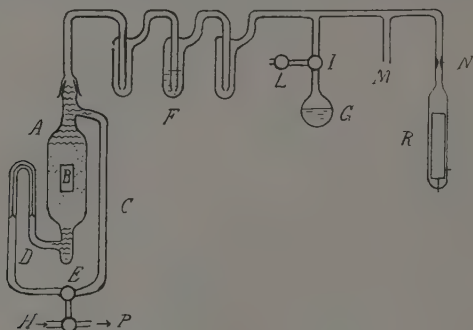


Fig. 1.

e filo di tungsteno da mm. 0,1. A preparazione ultimata, tale contatore può essere facilmente e rapidamente asportato, con un colpo di fiamma alla strozzatura *N* del tubo di vetro.

La preparazione dei contatori venne eseguita con i seguenti criteri: 1° Tutto il dispositivo era accuratamente vuotato per mezzo di pompe a diffusione applicate ai rubinetti *E*, *L*; nel recipiente *A*, attraverso *D* era ripetutamente inviata una corrente di idrogeno il quale veniva poi asportato dalla pompa attraverso *C*; — 2° chiusi i rubinetti *E*, *L*, mentre l'uranio era sottoposto al bombardamento dei neutroni, si immettevano, a destra di *F*, vapori di alcool sino a 10 mm. di *Hg*; — 3° attraverso *D* si faceva passare una corrente di *H* nella polvere di uranio, regolandola in modo che questo *H*, gorgogliando attraverso l'olio di *F*, portasse la pressione nel contatore *R* a 100 mm. di *Hg*; 4° il contatore era quindi staccato per studiarne gli impulsi a mezzo di una opportuna

⁽¹⁾ FRANZINI T., « L'Elettricista », 41, pag. 105 (1932).

registrazione. Come numeratore, si è usato un opportuno demoltiplicatore di impulsi, progettato in questo Istituto ⁽¹⁾, per frequenze medie superiori a 1200 impulsi al minuto; per frequenze medie inferiori si è invece usato un numeratore ad orologio capace di seguire 3000 impulsi equidistanziati al minuto.

Abbiamo in tal modo studiato otto contatori facendo variare ogni due la durata del bombardamento dei neutroni, precisamente abbiamo sperimentato bombardamenti della durata di 150, 1500, 6000, 42.000 secondi. Dai risultati delle numerazioni abbiamo sottratto l'effetto di sfondo nei contatori dovuto ai raggi cosmici e alla radioattività delle pareti complessivamente valutati a 50 impulsi al minuto.

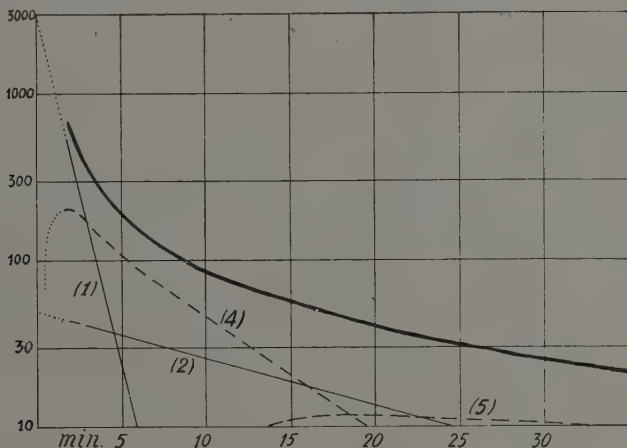


Fig. 2.

Poichè il riempimento del contatore richiede un tempo non del tutto trascurabile (da 20 a 30 secondi) e un altro minuto circa è necessario per saldare il contatore e sistemarlo nella registrazione, rimangono inutilizzati agli effetti del conteggio i primi due minuti di tempo computati dall'inizio dell'efflusso dell' H nel contatore.

Nelle figure 2 e 3 sono indicati i risultati ottenuti con bombardamenti di 150 e 6000 secondi. Gli altri due diagrammi non pubblicati sono del tutto analoghi. La riga a tratto grosso rappresenta l'andamento dei risultati sperimentali (numero degli impulsi in scala logaritmica in funzione del tempo). Le altre linee i nostri tentativi di scomposizione della curva precedente, condotti sulla guida dei risultati fondamentali di HAHN (l. c.).

⁽¹⁾ FRANZINI T. e DELLA CORTE M., « Ric. Scientif. », dicembre 1941 (in corso di stampa).

I nostri risultati confermano chiaramente l'esistenza di sostanze gassose radioattive che difficilmente potrebbero essere cercate al di fuori di quelle indicate da HAHN nei gas nobili Xe e Kr.

Il confronto dei quattro diagrammi, in particolare dei due pubblicati, rivela la presenza di almeno tre sostanze radioattive primarie di diversa vita media, inizialmente in diverso rapporto di attività (e quindi di quantità) fra di loro, al variare della durata del bombardamento. Dai nostri calcoli crediamo di poter assegnare a queste sostanze le vite medie rispettive di $34^s \pm 6$; $16^m,5 \pm 3$; $3^h,4 \pm 0,3$ così da poterle identificare con i gas nobili ricordati all'inizio della Nota.

Esistono inoltre sostanze radioattive secondarie la cui identificazione esula dal presente campo di ricerca, ma che presentandosi con le vite

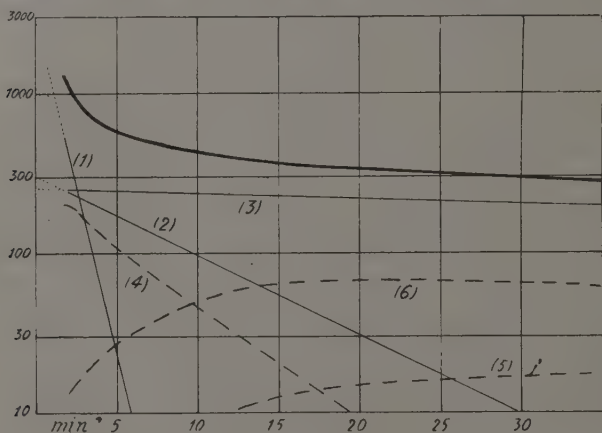


Fig. 5.

medie di circa 6-8 minuti; 30-40 minuti; 18-25 minuti, sono probabilmente il Cs^{139} , Cs^{139} , Rh^{88} ottenuti dai precedenti gas nobili per disintegrazione β .

Dai nostri dati, abbiamo inoltre tentato di calcolare il rapporto delle quantità dei tre gas nobili ottenuti dalla disintegrazione dell'uranio.

In base ai calcoli di DROSTE ⁽¹⁾ e considerando le sole disintegrazioni dovute ai neutroni primari (ossia trascurando gli effetti delle disintegrazioni a catena previste da JOLIOT ⁽²⁾) con la nostra sorgente di Em + Be avente, all'inizio delle esperienze, il valore di 380 mC, e in conseguenza dello spessore dello strato di uranio (circa 20 gr.cm²) irradiato per l'in-

⁽¹⁾ V. DROSTE G., « Zeits. f. Phys. », 110, pag. 84 (1938).

⁽²⁾ JOLIOT F., « C. R. », 208, pag. 341 (1939).

tero angolo solido di 4π , si potevano preventivare circa 5000 disintegrazioni al secondo ossia la produzione di 10.000 frammenti radioattivi al secondo.

Trattando tali frammenti come se fossero dovuti alla disintegrazione di una ipotetica sostanza radioattiva avente la stessa vita media dell'emanazione $\frac{1}{\lambda} = 4,85 \cdot 10^5$ sec, detta sostanza per generare 10.000 nuovi atomi al sec dovrebbe essere costituita da un numero n di atomi eguale a $4,85 \cdot 10^9$. Se di questi 10^4 frammenti, la frazione x_1 è costituita da atomi Xe^{139} , la frazione x_2 da $\text{Xe}^{>139}$ e la frazione x_3 da Kr^{88} che sono i tre atomi che ci interessano, indicando rispettivamente con n_1, n_2, n_3 il numero di essi esistenti dopo un tempo t di bombardamento si avrà

$$[1] \quad n_\alpha = \frac{n \lambda x_\alpha}{\lambda_\alpha - \lambda} (e^{-\lambda t} - e^{-\lambda_\alpha t})$$

dove l'indice $\alpha = 1; 2; 3$ è riferito rispettivamente a $\text{Xe}^{139}, \text{Xe}^{>139}, \text{Kr}^{88}$.

È ben noto come le attività I_α delle tre sostanze radioattive risultino proporzionali a n_α secondo i coefficienti λ_α ossia $I_\alpha = \lambda_\alpha n_\alpha$.

Ora dalle nostre misure si ottiene, in base alle concordanti scomposizioni dei quattro diagrammi (extrapolando all'istante zero le curve 1, 2, 3) i seguenti numeri m_α di impulsi al minuto, che misurano I_α a meno di un fattore k costante di proporzionalità:

Dopo un bombardamento di 150^s

$$m_1 = 3000 \quad ; \quad m_2 = 50 \quad ; \quad m_3 = 78$$

Dopo 6000^s

$$2950 \quad \quad \quad 293 \quad \quad \quad 250$$

Dopo 42.000^s

$$2750 \quad \quad \quad 280 \quad \quad \quad 550$$

e dividendo rispettivamente per

$$\lambda_1 = 1,75 \quad ; \quad \lambda_2 = 0,061 \quad ; \quad \lambda_3 = 0,0049$$

si ottengono i valori di n_1, n_2, n_3 a meno del detto fattore costante k . Sostituendo nelle [1] si perviene a valori del rapporto $x_1 : x_2 : x_3$ abbastanza prossimi fra di loro con i dati relativi ai diversi bombardamenti, ossia per i diversi valori di $t = 2^m, 5; 10^m; 700^m$; precisamente si ottiene $x_1 : x_2 : x_3 = 10 : 1 : 2$.

Per ogni atomo di gas nobile ottenuto la probabilità che esso sia $\text{Xe}^{139}, \text{Xe}^{>139}$ oppure Kr^{88} dovrebbe pertanto essere data rispettivamente

$$\text{da } \frac{10}{13} ; \frac{1}{13} ; \frac{2}{13}.$$

Chimica-Fisica. — *Potenziali elettrochimici e effetto Volta. I calori di idratazione degli ioni*⁽¹⁾. Nota VII⁽²⁾ di OSCAR SCARPA, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. È noto che gli ioni contenuti nelle soluzioni sono uniti con molecole del solvente, costituendo i così detti: « solvati di ioni ».

Nelle soluzioni acquose, in condizioni di media concentrazione, l'ione Cloro si aggrega 4 molecole d'acqua, 3 l'ione Bromo, circa 4 l'ione Cesio, circa 5 l'ione Potassio, circa 8 l'ione Sodio, 14 l'ione Litio, circa 5 l'ione Calcio, 13 l'ione Magnesio, ecc. L'ione idrogeno possiede la minima idratazione: 1 molecola d'acqua.

La formazione di tali idrati di ioni deriva secondo alcuni da cause puramente fisiche, cioè da azioni elettrostatiche che agiscono fra le cariche degli ioni e quelle delle molecole polari del solvente; altri invece ritengono che la causa prima sta nella affinità chimica del solvente rispetto al soluto⁽³⁾. Alla formazione di questi idrati di ioni corrisponde, tanto nell'una quanto nell'altra ipotesi, una variazione dell'energia interna del sistema, variazione di energia che si può misurare con un ipotetico calore di reazione.

FAJANS⁽⁴⁾, mediante considerazioni termodinamiche, ha potuto dedurre la somma dei calori di idratazione dell'anione e del catione derivanti dalla dissociazione elettrolitica di molecole saline. Ha così ottenuto valori che hanno segno positivo e grandezza notevolissima: parecchie centinaia di grandi calorie (kg. cal.) per molecola grammo di sale. Nel seguito, BUTLER, usufruendo di valori più esatti dell'energia reticolare⁽⁵⁾,

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Elettrochimica e di Chimica Fisica del R. Politecnico di Milano.

(2) Presentata nell'Adunanza del 22 novembre 1941-XX.

(3) Una buona esposizione della questione si legge nel trattato di GLASS-TONE. *Electrochimie des solutions*. Paris, Alcan ed. 1936. Per quanto riguarda, in generale, la necessità di ammettere affinità chimica fra solvente e soluto, rinvio nella mia Nota nei « Rendiconti d. R. Accademia dei Lincei », vol. XXIX, anno 1939.

(4) « D. Phys. Ges. », 21, 1919.

(5) GRIMM, « Zeit. Phys. Chem. », 102, 1922.

ha calcolato ⁽¹⁾ valori più approssimati delle somme dei calori di idratazione dell'anione e del catione di alcune serie di sali.

2. Per gli studi chimico-fisici ha evidentemente grande importanza la conoscenza dei valori dei calori di idratazione dei singoli ioni.

GURNEY ⁽²⁾, mediante considerazioni puramente elettrostatiche delle forze agenti fra le cariche degli ioni e quelle delle molecole polari del solvente, nonché sull'energia reticolare dei sali solidi, sul loro calore di dissoluzione e su alcune particolari ipotesi, ha dedotto valori da cui si possono ricavare i calori di idratazione di parecchi ioni.

Tenendo presente l'importanza dell'argomento, ho ritenuto necessario dedurre i valori dei calori di idratazione dei singoli ioni seguendo un differente procedimento e impiegando all'uopo i valori assoluti dei potenziali elettrochimici reali dei diversi metalli che, come risulta dalle precedenti mie pubblicazioni ⁽¹⁾, ho calcolato tenendo conto dei potenziali di contatto (effetti Volta interni) ai contatti intermetallici esistenti nelle pile che s'impiegano per la misura dei potenziali elettrochimici.

Consideriamo un sistema formato da un metallo puro parzialmente immerso nella soluzione di un suo sale, avente concentrazione normale rispetto all'ione metallico, e ammettiamo che, nella parte esterna alla soluzione, tale metallo sia in equilibrio con il suo vapore.

Si facciano avvenire (idealmente) le cinque seguenti trasformazioni che conducono il sistema dal dato stato iniziale a uno stato finale coincidente con l'iniziale.

I. *Evaporazione isotermica di un atomo grammo di metallo.* — La variazione di energia interna sia: ΔU_1 .

Poichè il lavoro fatto contro la pressione esterna si può ammettere di grandezza trascurabile rispetto al calore atomico di evaporazione del metallo (Q_e) risulta, per approssimazione: $\Delta U_1 = -Q_e$ ⁽²⁾.

II. *Ionizzazione, nella fase vapore, dell'atomo grammo di metallo con produzione di N ioni (di valenza ν) e di νN elettroni (N = numero di AVOGADRO).*

⁽¹⁾ « Zeit. Phys. Chem. », 113, 1924.

⁽²⁾ GURNEY, *Ions in solution*. Cambridge, University Press, 1936.

⁽³⁾ Vedere le mie Note nei « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », vol. XXIX, anno 1939-XVII, nel « Nuovo Cimento », vol. XVI, giugno 1939, anno XVII e quelle successive in questi « Rendiconti », anni 1940-XVIII e 1941-XIX.

⁽⁴⁾ Il segno di Q_e è negativo poichè si tratta, di calore *assorbito* dal sistema.

Se I indica il calore atomico di ionizzazione e ΔU_2 la variazione dell'energia interna del sistema si scriverà, per ragione analoga alla precedente: $\Delta U_2 = -I$.

III. *Dissoluzione dei sopradetti ioni gassosi nella soluzione.* — Se Q_s indica il calore di soluzione di tali ioni, il quale in tal caso si può ammettere coincidente con il loro calore di idratazione, e ΔU_3 la corrispondente variazione dell'energia del sistema si ha, per ragioni analoghe alle precedenti: $\Delta U_3 = Q_s$.

IV. *(Contemporanea alla III). Rientrata nel metallo dei νN elettroni liberati nella II trasformazione.*

Se Ω_4 indica il lavoro compiuto per far avvenire questa trasformazione e ΔU_4 la variazione della energia interna del sistema che accompagna la trasformazione (supposta reversibile e isoterma) vale la equazione generale:

$$\Omega_4 = J \Delta U_4 + T \frac{d\Omega_4}{dT}.$$

Poichè la carica elettrica totale corrisponde a νN elettroni è: $\nu 96574$ Coulomb, indicando con φ il valore (in Volt) della funzione elettronica del dato metallo ⁽¹⁾, e ricordando che il valore di $\frac{d\varphi}{dT}$ è piccolissimo, dell'ordine di 10^{-4} volt per grado ⁽²⁾, risulta che, in prima approssimazione, si può trascurare il termine $T \frac{d\Omega_4}{dT}$ e quindi porre: $\Delta U_4 = 23,1 \nu \varphi$.

V. *Deposito elettrochimico sul metallo degli ioni disciolti durante la trasformazione III.*

Se P_{en}^* indica il valore del potenziale elettrochimico normale assoluto del metallo ⁽³⁾ e ΔU_5 la variazione dell'energia interna che accompagna questa trasformazione, si ha l'equazione:

$$\nu 96574 P_{en}^* = J \Delta U_5 + \nu 96574 T \frac{dP_{en}^*}{dT} = J (\Delta U_5 - C)$$

⁽¹⁾ Cioè del cosiddetto lavoro di estrazione dell'elettrone dal metallo quale risulta, in base alla equazione di Einstein, dalle misure fotoelettriche.

⁽²⁾ BOUTRY, *Les phénomènes Photoélectriques*. Paris, Hermann, 1936, pagina 38 e sg.

⁽³⁾ Vedere in *Potenziali elettrochimici e effetto Volta*, Nota IV. *I potenziali assoluti degli elettrodi*. Questi « Rendiconti », serie VII, vol. 1º, anno 1940 XVIII.

ove con C indico genericamente il calore reversibile (calore Peltier) sviluppato al contatto del metallo con l'elettrolita, per effetto del passaggio di ν 96574 Coulomb dal metallo all'elettrolita.

Si ha quindi, in grandi calorie,

$$\Delta U_5 = 23,1 \nu P_{en}^* + C.$$

Ciò posto, se si considera la trasformazione ciclica complessiva, vale per essa: $\Sigma \Delta U = 0$, e quindi sostituendo risulta:

$$23,1 \nu (\varphi - P_{en}^*) + C - Q_e - I + Q_s = 0$$

epperò:

$$Q_{sM} = Q_{eM} + I_M - 23,1 \nu (\varphi_M - P_{enM}^*) - C_M$$

ove ho contraddistinto con l'indice M i valori che si riferiscono al metallo considerato e agli ioni, di valenza ν , che ad esso corrispondono.

Non essendo noti in ogni caso i valori dei calori Peltier, ho riportato nella 4^a colonna della tabella i valori di $Q_{sM} + C_M$ (cioè della somma del calore di idratazione dell'ione metallico e del calore Peltier sviluppato al contatto del metallo M con l'elettrolita; questi valori differiscono dai calori di idratazione dell'ione (cioè dei valori dei Q_{sM}) di quantità che si possono valutare al massimo dell'ordine di ± 10 kg. calorie, poichè questo è l'ordine di grandezza dei limiti entro i quali sono compresi i sopradetti calori Peltier ⁽¹⁾.

I valori dei P_{enM}^* che ho impiegato nei calcoli numerici sono quelli che ho esposto in precedenti pubblicazioni, e che ho chiamato « reali » poichè sono ricavati tenendo conto dei potenziali di contatto (effetti Volta interni) ai diversi contatti metallici esistenti nelle pile usate per la misura dei potenziali elettrochimici ⁽²⁾.

I valori di Q_{eM} e di I_M sono quelli assegnati da GRIMM ⁽³⁾.

⁽¹⁾ I valori dei C per i diversi metalli vengono determinati mediante misure calorimetriche dirette, oppure mediante misure elettriche (misurando i coefficienti di temperatura dei rispettivi potenziali elettrolitici). Nei pochi casi in cui sono stati applicati i due procedimenti, essi hanno portato a valori sufficientemente concordanti; ma allo stato attuale mancano i dati per assegnare i calori Peltier corrispondenti a tutti i casi qui considerati. Come sopra detto i calori Peltier fin'ora noti, per i contatti metallo-elettrolita, sono al massimo dell'ordine di ± 10 kg. calorie.

⁽²⁾ *Potenziali elettrochimici ed effetto Volta*. Nota IV. *I potenziali assoluti degli elettrodi*. Questi « Rendiconti », serie VII, vol. 1^o, anno 1940-XVIII.

⁽³⁾ « Zeit. Phys. Chem. », 102, pag. 118, anno 1922, vedi pure: BUTLER, *loc. cit.*

TABELLA I.

IONE	Q_e	I	$Q_s + C$
Li ⁺	50 Kg. cal.	123,1 Kg. cal.	+ 118 Kg. cal.
Na ⁺	30 »	117 »	+ 102 »
K ⁺	26,9 »	99 »	+ 90 »
Ca ⁺⁺	35 »	411 »	+ 324 »
Mg ⁺⁺	(50) »	519 »	+ (444) »
Zn ⁺⁺	35,8 »	666 »	+ 556 »
Cd ⁺⁺	31,2 »	634 »	+ 521 »
Pb ⁺⁺	57,4 »	548 »	+ 471 »

3. - Usufruendo dei valori di $Q_{sM} + C_M$ dei diversi ioni metallici si possono dedurre i calori di idratazione di alcuni anioni, sottraendo i detti valori a quelli che, secondo FAHNS e BUTLER, esprimono, per i diversi sali, la somma dei calori di idratazione dei corrispondenti cationi e anioni. Tenendo conto del numero di anioni provenienti dalla dissociazione completa degli alogenuri (uno per i metalli monovalenti, due per i bivalenti) si ottengono i seguenti risultati che assegnano, a meno dei valori dei C_M i valori dei calori di idratazione degli ioni Fluoro, Cloro, Bromo, Iodio.

TABELLA II.

IONI	Somma dei calori di idratazione degli ioni	Calori di idratazione dell'ione Fluoro
Li ⁺ + F ⁻	276,3 Kg. cal.	+ 158 Kg. cal.
Na ⁺ + F ⁻	242,8 »	+ 141 »
K ⁺ + F ⁻	223,6 »	+ 133 »
Ca ⁺⁺ + 2F ⁻	650,9 »	+ 163 »
Mg ⁺⁺ + 2F ⁻	750,0 »	+ 153 »

TABELLA III.

IONI	Somma dei calori di idratazione degli ioni	Calori di idratazione dell'ione Cloro
$\text{Li}^+ + \text{Cl}^-$	+ 237,0 Kg. cal.	+ 119 Kg. cal.
$\text{Na}^+ + \text{Cl}^-$	+ 203,6 »	+ 101 »
$\text{K}^+ + \text{Cl}^-$	+ 184,7 »	+ 94 »
$\text{Ca}^{++} + 2 \text{Cl}^-$	+ 570,2 »	+ 103 »
$\text{Mg}^{++} + 2 \text{Cl}^-$	+ 672,3 »	+ 114 »
$\text{Zn}^{++} + 2 \text{Cl}^-$	+ 731,2 »	+ 87 »
$\text{Cd}^{++} + 2 \text{Cl}^-$	+ 678,2 »	+ 78 »

TABELLA IV.

IONI	Somma dei calori di idratazione degli ioni	Calori di idratazione dell'ione Bromo
$\text{Li}^+ + \text{Br}^-$	+ 225,9 Kg. cal.	+ 108 Kg. cal.
$\text{Na}^+ + \text{Br}^-$	+ 192,1 »	+ 90 »
$\text{K}^+ + \text{Br}^-$	+ 172,9 »	+ 82 »
$\text{Ca}^{++} + 2 \text{Br}^-$	+ 547,9 »	+ 112 »
$\text{Mg}^{++} + 2 \text{Br}^-$	+ 649,7 »	+ 102 »
$\text{Zn}^{++} + 2 \text{Br}^-$	+ 708,6 »	+ 76 »
$\text{Cd}^{++} + 2 \text{Br}^-$	+ 656,8 »	+ 67 »

TABELLA V.

IONI	Somma dei calori di idratazione degli ioni	Calori di idratazione dell'ione Iodio
$\text{Li}^+ + \text{J}^-$	+ 215,2 Kg. cal.	+ 97 Kg. cal.
$\text{Na}^+ + \text{J}^-$	+ 181,2 »	+ 79 »
$\text{K}^+ + \text{J}^-$	+ 162,2 »	+ 72 »
$\text{Ca}^{++} + 2 \text{J}^-$	+ 526,1 »	+ 101 »
$\text{Mg}^{++} + 2 \text{J}^-$	+ 630,0 »	+ 93 »
$\text{Zn}^{++} + 2 \text{J}^-$	+ 688,9 »	+ 66 »
$\text{Cd}^{++} + 2 \text{J}^-$	+ 639,8 »	+ 59 »

Se si considerano le serie di valori riportati nell'ultima colonna delle precedenti tabelle, e si tien conto delle numerose cause di errore di cui sono necessariamente affetti (allo stato attuale delle conoscenze) i dati da cui derivano i risultati dei calcoli sopra riportati, appare che le differenze fra i valori dei calori di idratazione di uno stesso anione, che vengono dedotti per diversi sali aventi in comune il catione, non sorpassano limiti che si possono accettare come discreti. Ne segue che le medie aritmetiche di tali serie di valori possono venir assunte come valori più probabili. Questi valori medi sono:

Calore di idratazione dell'ione Fluoro: 149 Kg.Cal.

»	»	Cloro:	102	»
»	»	Bromo:	91	»
»	»	Jodio:	81	»

I massimi scarti di questi valori medi dai singoli, sono (arrotondando le cifre) di:

Per l'ione Fluoro	{	+ 17 Kg.Cal.	
	{	— 14	»
» Cloro	{	+ 23	»
	{	— 17	»
» Bromo	{	+ 24	»
	{	— 17	»
» Jodio	{	+ 22	»
	{	— 20	»

4. — Se si accetta come valore del calore di idratazione dell'ione Cloro 100 kg. calorie (che, arrotondando le cifre, ben ne rappresenta l'ordine di grandezza), è possibile ricalcolare in base ai sopracitati dati di Fajans e di Butler (cioè alle somme dei calori di idratazione dell'anione e dei cationi provenienti dai diversi sali) i calori di idratazione dei diversi ioni metallici nonchè quelli di altri cationi. I risultati di questi calcoli sono riportati nella tabella VI nella quale ho pure indicato, per i casi meno dubbi, i numeri delle molecole d'acqua aggregate ad ogni ione.

TABELLA VI.

IONE	Calore di idratazione del catione + vQ_{sce}^-	Calore di idratazione del catione per: $Q_{sce}^- = 100$	Numero di molecole d'acqua aggregate ad ogni catione
Li ⁺	+ 237	+ 137	14
Na ⁺	+ 203	+ 103	8
K ⁺	+ 184	+ 84	5
Rb ⁺	+ 179	+ 79	—
Cs ⁺	+ 173	+ 73	3,8
Ag ⁺	+ 208	+ 108	—
Cu ⁺	+ 247	+ 147	—
Mg ⁺⁺	+ 672	+ 472	13
Ca ⁺⁺	+ 570	+ 370	10
Sr ⁺⁺	+ 540	+ 340	8
Ba ⁺⁺	+ 493	+ 293	4
Zn ⁺⁺	+ 731	+ 531	—
Cd ⁺⁺	+ 678	+ 478	—
Pb ⁺⁺	+ 598	+ 298	—

Dall'esame di questa tabella risulta:

1° I calori di idratazione dei cationi bivalenti sono molto maggiori dei calori di idratazione degli ioni monovalenti. Questo fatto si verifica anche se si fa riferimento agli ioni-equivalenti.

2° Per gli ioni dei metalli appartenenti al 1° gruppo α della classificazione periodica degli elementi ⁽¹⁾ (Li⁺, Na⁺, K⁺, Rb⁺, Cs⁺) il calore di idratazione cresce pressochè linearmente al crescere del numero delle molecole idratanti.

Lo stesso fenomeno avviene per gli ioni dei metalli appartenenti al 2° gruppo β (Ca⁺⁺, Sr⁺⁺, Ba⁺⁺) (vedi fig. 1).

⁽¹⁾ Vedi nella nota VI di questa serie di studi.

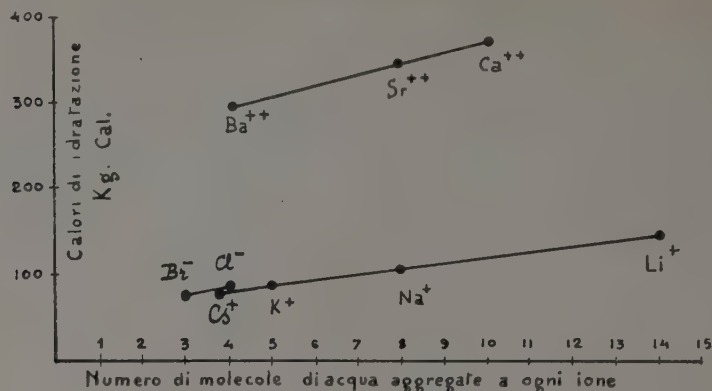


Fig. 1.

3° Se si disegna il diagramma avente per ascisse i numeri atomici e per ordinate i calori di idratazione degli ioni, risulta:

A) I calori di idratazione dei cationi metallici variano periodicamente al crescere del numero atomico del corrispondente elemento.

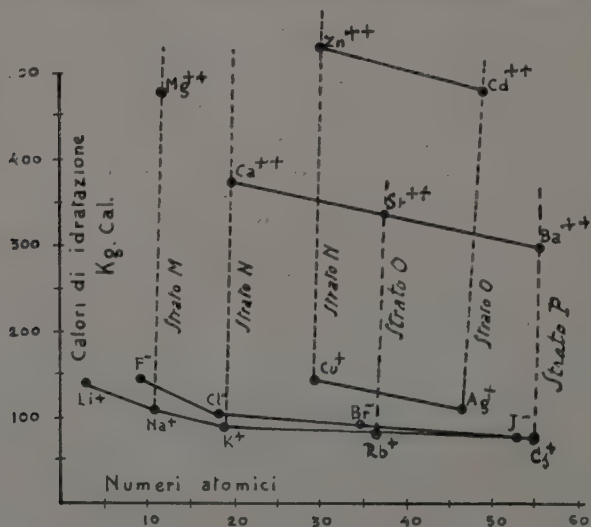


Fig. 2.

Naturalmente ciò risulta soltanto per quei casi (coppie: Na^+ , Mg^{++} ; K^+ , Ca^{++} ; Cu^+ , Zn^{++} ; Rb^+ , Sr^{++} ; Ag^+ , Cd^{++} ; Cs^+ , Ba^{++}), rispettivamente appartenenti al 3°, 4°, 5°, 6° periodo Mendeleeffiano, che è possibile esaminare con i dati sopraesposti. Questa periodicità appare chiaramente

dalla figura 2 ⁽¹⁾ ove le dette coppie sono collegate mediante linee tratteggiate. In questa figura ho messo in evidenza anche l'indicazione dello strato elettronico corticale ⁽²⁾ caratteristico dei rispettivi periodi.

B) I calori di idratazione degli ioni appartenenti alla serie degli elementi:

Fluoro , Cloro , Bromo , Jodio;
Litio , Sodio , Potassio , Rubidio , Cesio;
Calcio , Stronzio , Bario;

diminuiscono con grande regolarità al crescere del numero atomico. Ciò appare nella figura 2 ove le dette serie sono collegate con linee continue.

È notevole che i segmenti che riuniscono i punti rappresentativi delle coppie:

Rame , Argento
Zinco , Cadmio

per le quali, in causa della mancanza di dati, si possono considerare due soli elementi per serie, hanno andamento pressochè parallelo a quello dei diagrammi che si riferiscono alle serie sopracitate.

Tutti questi fatti hanno notevole interesse per la discussione dei fenomeni e delle cause da cui dipendono.

In particolare è interessante ricordare che se si esprime con una equazione del tipo:

$$Q_s = a + bm$$

il fatto per cui nelle serie di ioni sopracordinate (Li^+ , Na^+ , K^+ , Cs^+ ; Ca^{++} , Sr^{++} , Ba^{++}) il calore di solvatazione (Q_s) segue una legge lineare al crescere del numero (m) delle molecole aggregate a ogni ione, si ottiene per gli ioni dei metalli appartenenti al 1° gruppo α :

$$Q_s = 54,5 + 5,9m$$

e per quelli dei metalli appartenenti al 2° gruppo β :

$$Q_s = 242 + 12,8m.$$

⁽¹⁾ Tale periodicità risulta anche impiegando nel diagramma i dati del Gurney.

⁽²⁾ Vedere la figura 3 nella mia Nota VI di questa serie di studi (Questi « Rendiconti », serie VII. vol. II, 1941-XIX) e per maggiori particolari, in: O. SCARPA, *Aleune rappresentazioni grafiche del sistema periodico degli elementi* in «Atti del IX Congresso Internazionale de Química pura y Aplicada», Madrid, 1934.

Da queste equazioni appare che il coefficiente di proporzionalità (*b*) sarebbe circa doppio per i citati ioni bivalenti rispetto ai monovalenti, fatto che se fosse possibile di dimostrare con maggior generalità, avrebbe evidentemente grande importanza teorica.

D'altra parte lo stesso fatto per cui le grandezze dei calori di idratazione di ogni gruppo di ioni appare esprimibile come somma di una quantità costante (diversa per i diversi gruppi di ioni) e di una quantità proporzionale al numero di molecole di acqua aggregate a ogni ione, ha un significato profondo circa la natura delle forze che causano l'aggregazione agli ioni delle molecole di solvente.

5. — Se si confrontano i calori di idratazione dei cationi ottenuti con il procedimento da me adottato e calcolati in base ai valori dei potenziali elettrochimici REALI (cioè di quelli corretti rispetto alle differenze di potenziale Voltiane esistenti ai contatti intermetallici delle pile impiegate nelle misure) con quelli ottenuti con il medesimo procedimento, ma in base ai valori « *apparenti* » dei potenziali elettrochimici (cioè quelli non corretti, fin'ora esposti nei trattati) e si confrontano queste due serie di valori con quelli dei calori di idratazione ottenuti dal GURNEY con diverso procedimento, si trova (tabella VII) che i calori di idratazione

TABELLA VII.

Ione	Calori di idratazione (Kg. Cal.)		
	Gurney	Scarpa (dai valori reali dei Pot. ech.)	Scarpa (dai valori apparenti dei Pot. ech.)
Li ⁺	140	137	58
Na ⁺	115	103	49
K ⁺	94	84	32
Rb ⁺	87	79	—
Ca ⁺	80	73	—
Ag ⁺	126	108	—
Cu ⁺⁺	407	370	214
Sr ⁺⁺	382	340	—
Ba ⁺⁺	345	293	—
Mg ⁺⁺	488	472	387
Zn ⁺⁺	528	531	524
Cd ⁺⁺	462	478	499

ottenuti con il procedimento da me adottato, in base ai sopradetti valori REALI dei potenziali elettrochimici, notevolmente si accordano con i valori dedotti da GURNEY, mentre tale accordo non esiste (salvo forse per gli ioni Zn^{++} e Cd^{++}) per i valori calcolati in base ai potenziali elettrochimici apparenti.

Inoltre se, usufruendo di calori di idratazione dei cationi calcolati in base ai sopradetti valori « *apparenti* » dei potenziali elettrochimici, si calcolano, con il procedimento dianzi seguito, i valori dei calori di idratazione degli ioni: Fluoro, Cloro, Bromo, Jodio, si ottengono valori che, se dedotti per le serie di sali con eguale anione, differiscono l'un l'altro molto di più di quanto risulta confrontando quelli dedotti in base ai potenziali elettrochimici REALI (vedi nelle tabelle II, III, IV, V).

Questi due fatti hanno notevole interesse anche perchè potrebbero essere assunti in appoggio della accettabilità della teoria di MILLIKAN che mi ha servito come punto di partenza per il calcolo dei valori reali dei potenziali elettrochimici. Tuttavia ritengo che, almeno per ora, sarebbe imprudente dare ad essi un peso tale da assumerli, a tal riguardo, come prova di valore decisivo.

Chimica (Chimica biologica). — *Micrometodo per la determinazione dell'acido acetico*. — III. *Dosaggio dell'acido acetico in presenza di altri acidi grassi* ⁽¹⁾. Nota di P. CASELLI e E., CIARANFI presentata ⁽²⁾ da FRANCESCO PENTIMALLI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

In una Nota precedente abbiamo descritto un metodo ossidimetrico per la determinazione quantitativa dell'acido acetico, che permette di dosare con molta esattezza piccolissime quantità di questa sostanza. Il metodo, che è una modificazione del procedimento di CORDEBARD e MICHL, consiste nell'ossidazione dell'acido acetico con una miscela di acido solforico e bicromato d'argento, il bicromato residuo essendo poi completamente ridotto con sale di Mohr, il cui eccesso viene determinato per titolazione di ritorno con permanganato di potassio. Tale metodo dà risultati molto soddisfacenti, ma naturalmente è applicabile solo nel caso di soluzioni pure di acido acetico o di suoi sali. Se l'acido acetico da determinare si trova disciolto in una soluzione contenente altre sostanze capaci di ridurre il bicromato è necessario come prima cosa separare l'acido acetico da queste ultime. Sempre nella Nota precedentemente citata abbiamo descritto un procedimento che permette di separare l'acido acetico dalle sue soluzioni acquose, senza ricorrere agli usuali metodi di distillazione in corrente di vapore, i quali, per dare risultati quantitativi, devono protrarsi per un tempo molto lungo, con l'inconveniente di dare una quantità eccessiva di liquido nel distillato, anche se il procedimento vien fatto sotto vuoto (WELDE).

Il principio del metodo è il seguente: la soluzione contenente l'acido acetico e le altre sostanze riducenti viene leggermente alcalinizzata e bollita in bagno-maria salato per cloruro di calcio, sotto corrente di aria fin tanto che tutta l'acqua sia stata allontanata. L'acetato sodico viene quindi trasformato in acetato di metile che distilla in una soluzione

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Patologia generale della R. Università di Napoli.

⁽²⁾ Nell'Adunanza del 22 novembre 1941-XX.

diluita di soda dove l'etere si saponifica. Dopo allontanamento del metanolo l'acido acetico si determina ossidimetricamente.

Elaborato un micrometodo di dosaggio dell'acido acetico, ci siamo proposti di rendere applicabile questo procedimento analitico al campo della chimica biologica. Poichè nei liquidi organici l'acido acetico eventualmente presente si trova mescolato con molte altre sostanze organiche, occorre allontanare o distruggere le altre sostanze presenti, o, quando questo non è possibile, trovare un metodo che permetta di dosare l'acido acetico in presenza di esse.

Le sostanze riducenti che si possono trovare in un liquido organico, dopo l'allontanamento con i metodi usuali delle proteine e degli idrati di carbonio, sono principalmente aminoacidi, basi organiche, urea, ammoniaca, corpi purinici, alcoli, aldeidi, acetone, acidi grassi della serie formica e della serie ossalica, saturi ed insaturi e loro ossi- e cheto-derivati, per quanto diversi prodotti di questi gruppi di sostanze, essendo insolubili come sali di calcio, vengono eliminati insieme alle proteine e agli idrati di carbonio.

Il procedimento di separazione dell'acido acetico dalle sue soluzioni acquose da noi descritto nella Nota precedente, che si attua mediante successivi processi di essiccazione, esterificazione e distillazione, elimina di per sè stesso molte sostanze che potrebbero interferire nella determinazione ossidimetrica dell'acido acetico. Difatti durante l'essiccazione sotto corrente di aria, mentre l'acido acetacetico si decompone in anidride carbonica e acetone, alcoli e aldeidi volatili, acetone e ammoniaca vengono completamente allontanati. Nel successivo processo di esterificazione e distillazione resta soltanto la possibilità che acidi organici (acidi grassi e loro derivati, aminoacidi, acidi aromatici) distillino insieme all'acetato di metile sia come acidi liberi che come esteri: questo si verificherà principalmente per gli acidi della serie formica vicini all'acetico, il cui punto di ebollizione come esteri metilici non è molto discosto da quello dell'acetato di metile.

Nella presente Nota abbiamo preso in considerazione gli acidi grassi mono- e di carbossilici saturi e insaturi e i loro ossi- e cheto-derivati.

Per stabilire quali acidi organici e in quale percentuale passino nel distillato nelle condizni del nostro metodo, abbiamo fatto le prove seguenti. Una determinata quantità di acido (in genere circa mg. 5) viene dosata ossidimetricamente con bismato d'argento, col procedimento descritto per l'acido acetico nella Nota precedente. Una stessa quantità, alcalinizzata leggermente con soda, viene essiccata e dopo aggiunta di cc. 15 di metanolo e cc. 3 di H_2SO_4 concentrato, viene distillata per 10 m' in 5 cc. di acqua distillata alcalinizzata con cc. 0,5 di NaOH 10 %. Dopo neutralizzazione con H_2SO_4 fino a leggerissima alcalinità e successiva

essiccazione, si determina ossidimetricamente l'acido eventualmente presente nel residuo.

Di tutti gli acidi presi in considerazione e cioè: acidi grassi della serie formica e della serie ossalica, saturi e insaturi e loro rispettivi ossi - e cheto-derivati, passano nel distillato solo quelli riportati nella tabella I.

Si nota che gli acidi grassi saturi della serie formica vicini all'acido acetico passano come esteri in una percentuale che decresce con l'aumentare del punto di ebollizione dei loro esteri metilici; fa eccezione l'acido formico, il quale, per la sua facile decomponibilità, viene parzialmente distrutto dall'acido solforico. Degli ossiacidi l'estere metilico del glicolico passa in una quantità minima mentre gli esteri dei chetoacidi non distillano.

TABELLA I.

ACIDI	Percentuale che passa nel distillato.
Formico.	20
Acetico	100
Propionico	63
Butirrico	44
Valerianico	8
Capronico	3
Eptilico	1
Glicolico	0,5

L'acido formico, che è uno degli acidi la cui presenza in una soluzione contenente acido acetico disturba la determinazione di quest'ultimo, può essere facilmente eliminato in base alle sue proprietà riducenti, operando nel modo seguente: cc. 10 del liquido in esame vengono versati in un palloncino da cc. 50 con collo smerigliato, contenente g. 0,3 di solfato mercurico e cc. 0,3 di acido solforico concentrato. Si connette, mediante lo smeriglio, il palloncino a un refrigerante a ricadere e si bolle per un'ora. Si lascia raffreddare, si lava quantitativamente il ricadere con acqua distillata che viene raccolta nel palloncino, si alcalinizza con soda fino a netta alcalinità al tornasole, si filtra su carta raccogliendo in un secondo palloncino a collo smerigliato, si lava quantitativamente il filtro con acqua distillata e poi si procede come al solito alla determinazione dell'acido acetico.

Con questo mezzo l'acido formico viene completamente distrutto mentre l'acido acetico non viene per nulla attaccato. Quanto all'acido glicolico esso può essere praticamente trascurato. Gli acidi propionico, butirrico, valerianico, capronico e eptilico non sono eliminabili e alcuni di essi passano in quantità notevole; è stato quindi necessario trovare un artificio che permettesse di dosare l'acido acetico in miscele di queste sostanze.

Esistono nella letteratura dei procedimenti che permettono di dosare singoli componenti di miscele di questo tipo, però questi metodi, elaborati per quantità piuttosto grandi di queste sostanze, non sono applicabili alla scala microanalitica quale a noi interessa. Il fondamentale di essi è il metodo descritto da DUCLAUX (1900). Questo A., distillando la soluzione di un acido grasso, stabilisce anzitutto la quantità percentuale di acido che passa in funzione della massa del liquido distillato; esprimendo graficamente l'andamento del fenomeno si ottengono delle curve caratteristiche per ogni acido grasso. DUCLAUX osserva che gli acidi distillano più facilmente quanto meno sono volatili. Distillando una miscela di due acidi grassi si ottengono delle curve che all'inizio sono parallele a quella dell'acido a più alto peso molecolare, alla fine sono parallele a quella dell'acido più basso. Servendosi di questo comportamento caratteristico delle curve di distillazione, è possibile determinare con una certa approssimazione le quantità rispettive di due acidi grassi componenti una miscela.

Tale metodo, che ha subito diversi perfezionamenti per opera di EDELSTEIN e CSONKA (1912), DYER (1916), WOLF e TELFER (1917), VIRTANEN e PULKKI (1928), non è però utilizzabile per risolvere il nostro problema analitico che consiste nel determinare l'acido acetico in presenza di altri cinque acidi grassi e per di più in quantità dell'ordine del milligrammo e perfino di decimi di milligrammo.

Abbiamo invece pensato di sfruttare la diversa resistenza di questi acidi all'ossidazione cromo-solforica. Come è noto l'acido acetico resiste completamente, entro certi limiti, a questo tipo di ossidazione, mentre gli altri acidi vengono tutti più o meno facilmente attaccati.

Naturalmente la resistenza dell'acido acetico all'ossidazione cromo-solforica non è assoluta, ma dipende da tre fattori e cioè 1° la durata dell'ebollizione, 2° la concentrazione dell'acido solforico, 3° la concentrazione del bicromato. Gli stessi fattori influiscono naturalmente sulla velocità di ossidazione degli altri cinque acidi grassi in questione.

Mantenendo costante la concentrazione dell'acido solforico e quella del bicromato, abbiamo studiato anzitutto la velocità di ossidazione dei vari acidi grassi in funzione del tempo. I dati relativi sono riportati nella tabella II, nella quale viene riferito un esempio eseguito con acido solforico al 50 % in diluizione finale e bicromato N/10.

TABELLA II.

ACIDI	Percentuale di ossidazione						
	15 m'	30 m'	45 m'	60 m'	120 m'	180 m'	240 m'
Acetico	0	0	0	1	4	10	23
Propionico	55	65	—	75	78	80	82
Butirrico.	72	76	—	78	79	80	82
Valerianico	69	72	74	75	—	—	—
Capronico	65	69	71	74	—	—	—

Dai dati riportati nella Tabella II si osserva che in queste condizioni gli acidi propionico, butirrico, valerianico e capronico bruciano rapidamente tanto che nel primo quarto d'ora più della metà di ognuno di essi è già ossidata; alla fine della prima ora questi acidi sono ossidati con una percentuale quasi uguale oscillante dal 74 al 78 %. Dopo la prima ora l'ossidazione di questi composti prosegue con molta lentezza.

L'acido acetico invece nei primi tre quarti d'ora non è attaccato e alla fine della prima ora è bruciato solo nella misura dell'1 %; dopo la prima ora l'ossidazione di esso prosegue lentamente con velocità che va, però, gradatamente aumentando.

Si può osservare inoltre che il comportamento di fronte alla ossidazione cromo-solforica degli acidi propionico, butirrico, valerianico e capronico è pressochè omogenea il che permette di considerarli globalmente rispetto all'acido acetico.

Mantenendo ora costante a 60 m' il tempo di ebollizione e fissa la quantità di bicromato aggiunto, abbiamo fatto variare la concentrazione dell'acido solforico; dai dati riportati nella Tabella III si può desumere l'andamento dell'ossidazione dei vari acidi grassi in funzione della concentrazione dell'acido solforico.

In essa si vede che la concentrazione più alta di acido solforico alla quale l'acido acetico non viene attaccato è del 50 % usando bicromato N/50 e N/20; con bicromato N/10, essendo bruciato l'acido acetico nella percentuale dell'1 %, esso può essere praticamente considerato come non ossidato, usando acido solforico alla concentrazione del 50 %. Con soluzioni di bicromato a titolo maggiore la concentrazione dell'acido solforico alla quale non si ha ossidazione dell'acido acetico è naturalmente più bassa.

TABELLA III.

ACIDI	Percentuale ossidata con le concentrazioni di acido solforico del							
	25 %	30 %	35 %	40 %	45 %	50 %	55 %	60 %
<i>Bicromato N/2.</i>								
Acetico	0	0	0	0	2	11	33	75
Propionico	0	1	10	40	62	70	80	83
Butirrico	2	10	35	56	64	76	80	84
Valerianico	14	29	47	61	66	75	77	82
Capronico	4	9	25	50	65	74	78	84
<i>Bicromato N/5.</i>								
Acetico	0	0	0	0	1	5	26	73
Propionico	0	0	2	12	50	70	80	82
Butirrico	1	6	20	53	64	76	80	82
Valerianico	7	15	35	54	65	75	78	80
Capronico	4	8	25	46	63	75	80	81
<i>Bicromato N/10.</i>								
Acetico	0	0	0	0	0	1	25	67
Propionico	0	0	0	4	42	72	81	86
Butirrico	0	5	16	35	60	78	85	88
Valerianico	5	13	28	50	66	74	80	83
Capronico	3	7	20	40	63	74	83	90
Eptilico	—	26	—	49	—	73	—	90
<i>Bicromato N/20.</i>								
Acetico	0	0	0	0	0	0	18	58
Propionico	0	0	0	3	40	72	86	90
Butirrico	0	3	11	33	69	79	85	90
Valerianico	0	7	22	51	71	78	85	89
Capronico	0	4	19	39	59	72	81	83
Eptilico	3	—	—	52	—	73	—	94
<i>Bicromato N/50.</i>								
Acetico	0	0	0	0	0	0	15	55
Propionico	0	0	0	0	2	55	77	81
Butirrico	0	0	4	10	46	66	75	80
Valerianico	0	5	6	29	64	71	77	80
Capronico	0	6	18	40	55	67	73	78
Eptilico	—	—	—	42	—	75	—	95

Questo diverso comportamento dell'acido acetico da un lato e degli acidi propionico, butirrico, valerianico, capronico ed eptilico dall'altro permette di determinare ossidimetricamente l'acido acetico in miscele di questi diversi acidi.

A tale scopo, se si usa bicromato N/10, N/20 e N/50, si bolle per un'ora un campione della soluzione in esame con bicromato d'argento e acido solforico in modo da avere l'ossidazione totale di tutti gli acidi componenti la miscela; un altro campione della miscela viene bollito per lo stesso tempo con bicromato di potassio e acido solforico al 50 %, realizzando una ossidazione parziale degli acidi propionico, butirrico, valerianico, capronico ed eptilico, mentre l'acido acetico resta praticamente inattaccato.

Essendo noto il valore medio della percentuale di ossidazione degli acidi propionico, butirrico, valerianico, capronico ed eptilico alla concentrazione del 50 % di acido solforico, è evidentemente nota la quantità totale di questi acidi la quale, detratta dal valore ottenuto con l'ossidazione del primo campione, ci darà la quantità di acido acetico presente nella miscela.

Se A è la quantità di bicromato ridotta nella prima prova e B quella ridotta nella seconda, e p la percentuale media di ossidazione, avremo che l'acido acetico presente nella miscela espresso in mg. sarà:

$$\text{mg. ac. acetico} = \left[A - \left(B \frac{100}{p} \right) \right] f$$

dove con f s'intende il fattore corrispondente alla normalità di bicromato adottata. Naturalmente l'esattezza di questo calcolo sarà tanto maggiore quanto più vicine tra loro saranno le percentuali di ossidazione degli acidi grassi componenti la miscela nella quale si deve determinare l'acido acetico.

L'esame della Tabella III farebbe prevedere che i risultati migliori si debbano ottenere usando bicromato N/10 e N/20, ove le percentuali di ossidazione, relative alla concentrazione del 50 % di acido solforico, sono più omogenee.

Nelle tabelle IV, V, e VI sono riportati valori di determinazioni di acido acetico in miscele di acidi ottenuti con questo metodo.

Le percentuali di ossidazione (p) usate per le tabelle IV, (reattivi N 50) e V (reattivi N/20) sono le medie delle percentuali di ossidazione desunte dalla tabella III. Come percentuale di ossidazione (p) usata per la tabella VI (reattivi N/10) invece di 75, media desunta dalla tabella III si è usato 78, perchè abbiamo visto che con questo fattore i risultati sono migliori: ciò si spiega perchè alla concentrazione di $K_2Cr_2O_7$ N/10 e H_2SO_4 50 % l'acido acetico viene un po' attaccato, cosicchè il fattore

più alto diminuisce l'errore in difetto che si otterrebbe usando la media aritmetica dei valori di ossidazione.

TABELLA IV.
(Reattivi N/50).

Acido acetico dosato da solo		Miscela di ac. propionico, butirrico, valerianico e capronico	Ac. acetico + miscela di ac. propionico, butirrico, valerianico e capronico, bruciato con $\text{Ag}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$ H_2SO_4 60 % $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$ H_2SO_4 50 %		Acido acetico trovato		Differenza	Errore
cc. K Mn O ₄	mg.	cc. K Mn O ₄	cc. K Mn O ₄	cc. K Mn O ₄	cc. K Mn O ₄	mg.	mg.	%
0,80	0,12	0,50	1,30	0,31	0,82	0,12	0,00	0,0
0,90	0,13	0,45	1,35	0,32	0,86	0,13	0,00	0,0
0,90	0,13	0,45	1,35	0,30	0,86	0,13	0,00	0,0
1,00	0,15	2,00	3,00	1,40	0,84	0,13	— 0,02	— 13,3
1,05	0,16	2,10	3,15	1,43	0,95	0,14	— 0,02	— 12,5
1,20	0,18	0,60	1,80	0,35	1,26	0,19	+ 0,01	+ 5,5
1,27	0,19	0,53	1,80	0,42	1,15	0,17	— 0,02	— 10,5
1,35	0,20	0,50	1,85	0,40	1,24	0,19	— 0,01	— 5,0
1,90	0,28	1,23	3,13	0,97	1,64	0,25	— 0,03	— 10,5

I dati riportati dimostrano che col metodo da noi proposto si può dosare l'acido acetico in miscele di acidi propionico, butirrico, valerianico e capronico con una precisione che si può ritenere abbastanza soddisfacente.

Nel caso dell'impiego di reattivi N/50 si deve notare che la percentuale di ossidazione (p), in base alla quale abbiamo calcolato i valori della tabella IV, è la media di valori piuttosto distanti l'uno dall'altro. La miscela degli acidi propionico, butirrico, valerianico e capronico usata conteneva una eguale quantità di ognuna di queste sostanze e i valori relativi dell'acido acetico dosato nella miscela corrispondono abbastanza bene a quelli dell'acido acetico dosato da solo. Se l'acido propionico fosse stato prevalente o l'unico acido grasso presente nella soluzione di acido acetico, i valori calcolati con $p = 65$ sarebbero stati sbagliati in eccesso, poichè, come si desume dalla tabella III, la percentuale di ossidazione per l'acido propionico è di 55; nel caso quindi che l'acido propionico sia il solo acido presente nella soluzione di acetato in esame converrà usare questo fattore.

TABELLA V.
(Reattivi N/20).

Acido acetico dosato da solo		Miscela di acido propio- nico e butirrico	Ac. acetico + mi- scela di ac. pro- pionico e butir- rico bruciato con		Acido acetico trovato		Diffe- renza	Errore
			$\text{Ag}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$ H_2SO_4 60 %	$\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$ H_2SO_4 50 %				
cc. KMnO_4	mg.	cc. KMnO_4	cc. KMnO_4	cc. KMnO_4	cc. KMnO_4	mg.	mg.	%
2,07	0,78	0,73	2,80	0,53	2,09	0,78	0,00	0,0
2,00	0,75	0,90	2,90	0,80	1,83	0,69	— 0,06	— 8,0
1,85	0,69	1,00	2,85	0,80	1,78	0,67	— 0,02	— 2,9
1,67	0,63	1,31	2,98	1,10	1,51	0,57	— 0,06	— 9,5
1,60	0,60	1,40	3,00	1,12	1,50	0,56	— 0,04	— 6,7
1,11	0,41	1,57	2,68	1,22	1,05	0,39	— 0,02	— 4,9
1,00	0,37	2,20	3,20	1,67	0,97	0,36	— 0,01	— 2,7
0,87	0,33	2,33	3,20	1,70	0,93	0,35	+ 0,02	+ 6,1
0,55	0,20	2,63	3,18	1,95	0,58	0,22	+ 0,02	+ 10,0
		Miscela di acido propio- nico, bu- tirrico, valerian- ico e ca- pronico	Ac. acetico + mi- scela di ac. pro- pionico, butirri- co, valerianico e capronico					
2,20	0,82	0,35	2,55	0,42	1,99	0,75	— 0,07	— 8,5
1,85	0,69	0,75	2,60	0,75	1,60	0,60	— 0,09	— 13,0
1,34	0,50	1,21	2,55	0,95	1,28	0,48	— 0,02	— 4,0
1,27	0,48	1,55	2,82	1,15	1,28	0,48	0,00	0,0
1,15	0,43	1,52	2,67	1,06	1,25	0,47	+ 0,04	+ 9,7

TABELLA VI.

(Reattivi N/10)

Acido acetico dosato da solo		Acido propio- nico	Ac. acetico + ac. propionico bru- ciato con		Acido acetico trovato		Diffe- renza	Errore
			$\frac{Ag_2Cr_4O_7}{H_2SO_4 60\%}$	$\frac{K_2Cr_2O_7}{H_2SO_4 50\%}$				
cc. K Mn O ₄	mg.	cc. K Mn O ₄	cc. K Mn O ₄	cc. K Mn O ₄	cc. K Mn O ₄	mg.	mg.	%
1,08	0,81	2,05	3,13	1,57	1,11	0,83	+ 0,02	+ 2,5
1,08	0,81	2,05	3,13	1,62	1,05	0,79	— 0,02	— 2,5
1,10	0,83	1,49	2,59	1,15	1,11	0,83	0,00	0,0
1,12	0,84	1,46	2,58	1,12	1,14	0,85	+ 0,01	+ 1,2
1,14	0,86	1,55	2,69	0,89	1,14	0,86	0,00	0,0
1,33	1,00	1,73	3,06	1,29	1,40	1,05	+ 0,05	+ 5,0
1,33	1,00	1,76	3,09	1,32	1,40	1,05	+ 0,05	+ 5,0
1,61	1,21	2,21	3,82	1,25	1,60	1,20	— 0,01	— 0,8
1,72	1,29	2,36	4,08	1,30	1,67	1,25	— 0,04	— 3,1
1,78	1,33	1,20	2,98	1,08	1,60	1,20	— 0,13	— 9,8
1,84	1,38	2,58	4,42	1,37	1,75	1,31	— 0,07	— 5,1
1,78	1,33	1,20	2,98	1,08	1,60	1,20	— 0,13	— 9,8
1,91	1,43	1,02	2,93	0,87	1,82	1,37	— 0,06	— 4,2
1,91	1,43	1,02	2,93	0,87	1,82	1,37	— 0,06	— 4,2
		Miscela di acido propio- nico butirrico, valeria- nico e ca- prionico	Ac. acetico + mi- scela di ac. pro- pionico, butirri- co, valerianico, e capronico					
1,13	0,85	1,89	3,02	1,42	1,20	0,90	+ 0,05	+ 5,9
1,30	0,97	1,76	3,06	1,40	1,27	0,95	— 0,02	— 2,1
1,31	0,98	0,87	2,18	0,68	1,31	0,98	0,00	0,0
1,32	0,99	1,76	3,08	1,37	1,32	0,99	0,00	0,0
1,33	1,00	1,76	3,09	1,40	1,29	0,97	— 0,03	— 3,0
1,34	1,00	0,82	2,16	0,68	1,29	0,97	— 0,03	— 3,0
1,34	1,00	0,80	2,14	0,67	1,28	0,96	— 0,04	— 4,0
1,35	1,01	0,80	2,15	0,70	1,25	0,94	— 0,07	— 6,9
1,37	1,03	0,79	2,16	0,67	1,30	0,98	— 0,05	— 4,9
1,43	1,07	1,41	2,84	1,08	1,45	1,09	+ 0,02	+ 1,8
1,46	1,09	1,41	2,87	1,13	1,42	1,07	— 0,02	— 1,8
1,70	1,28	1,06	2,76	0,82	1,71	1,28	0,00	0,0
1,73	1,30	1,06	2,79	0,74	1,84	1,38	+ 0,08	+ 6,1
1,94	1,45	0,70	2,64	0,55	1,93	1,45	0,00	0,0

Volendo dosare quantità di acido acetico maggiori di quelle riportate nelle tabelle precedenti, si possono usare quantità maggiori di reagenti, oppure impiegare reagenti più concentrati. In questo secondo caso si va però incontro all'inconveniente sopra accennato di dovere utilizzare delle percentuali di ossidazione desunte da valori piuttosto distanti l'uno dall'altro, a tutto scapito della esattezza della determinazione.

Per ovviare a questo si può diluire il bieromato di potassio, impiegato per la prova di ossidazione parziale, in modo che questo assuma una normalità più appropriata. Abbiamo fatto delle prove in questo senso usando reattivi N/5 e N/2, diluendo opportunamente il bieromato per la prova di ossidazione parziale, rispettivamente a N/10 e N/5. I risultati sono riportati nelle tabelle VII e VIII.

TABELLA VII.

(Reattivi N/5)

Acido acetico dosato da solo		Miscela di acido propionico, butirrico, valerianico e capronico	Ac. acetico + miscela di ac. propionico, butirrico, valerianico e capronico bruciato con		Acido acetico trovato		Differenza	Errore
			$\frac{Ag_2Cr_2O_7}{H_2SO_4 60\%}$	$\frac{K_2Cr_2O_7}{H_2SO_4 50\%}$				
cc. K Mn O ₄	mg.	cc. K Mn O ₄	cc. K Mn O ₄	cc. K Mn O ₄	cc. K Mn O ₄	mg.	mg.	%
1,45	2,18	1,30	2,75	1,10	1,34	2,01	— 0,17	— 7,8
1,45	2,18	1,35	2,80	1,15	1,33	2,00	— 0,18	— 8,3
1,75	2,63	2,25	4,00	1,75	1,75	2,63	— 0,01	— 0,4
1,75	2,63	2,23	3,98	1,80	1,68	2,52	— 0,11	— 4,2
1,75	2,63	2,70	4,45	2,04	1,83	2,74	+ 0,11	+ 4,2
1,75	2,63	2,65	4,40	2,10	1,70	2,55	— 0,08	— 3,0
1,85	2,78	0,70	2,55	0,67	1,69	2,54	— 0,24	— 8,3
1,87	2,80	0,78	2,65	0,70	1,75	2,63	— 0,17	— 6,1
1,90	2,85	2,10	4,00	1,75	1,75	2,63	— 0,22	— 7,7
1,90	2,85	2,60	4,50	1,98	1,96	2,94	+ 0,09	+ 3,1

TABELLA VIII.

(Reattivi N/2)

Acido acetico determinato da solo		Miscela di acido propio- nico, butirrico, valerianico e capronico	Ac. acetico + mi- scela di ac. pro- pionico, butirri- co, valerianico e capronico, bru- ciato con		Acido acetico trovato		Diffe- renza	Errore
cc. K Mn O ₄	mg.	cc. K Mn O ₄	Ag ₂ Cr ₂ O ₇ H ₂ SO ₄ 60 %	K ₂ Cr ₂ O ₇ H ₂ SO ₄ 45 %	cc. K Mn O ₄	mg.	mg.	%
1.30	4,87	1,90	3,20	1,25	1,28	4,80	— 0,07	— 1,4
1.33	5,00	1,93	3,26	1,30	1,26	4,73	— 0,27	— 5,4
1.40	5,25	1,95	3,35	1,35	1,28	4,80	— 0,45	— 8,6
1.68	6,30	1,22	2,90	0,82	1,63	6,12	— 0,18	— 2,8
1.71	6,40	1,22	2,93	0,82	1,66	6,23	— 0,17	— 2,7
1.74	6,52	1,22	2,96	0,82	1,69	6,33	— 0,19	— 2,9
2.25	8,45	1,95	4,20	1,35	2,12	7,95	— 0,50	— 5,9
2.27	8,50	2,01	4,28	1,42	2,09	7,85	— 0,65	— 7,6
2.30	8,60	1,98	4,28	1,45	2,05	7,70	— 0,90	— 10,5
2.30	8,60	1,94	4,24	1,40	2,08	7,80	— 0,80	— 9,3

I dati mostrano che mediante il procedimento sopra indicato, si ottengono risultati in complesso abbastanza soddisfacenti, con reattivi N/5 diluendo a N/10 il bicromato per la prova di ossidazione parziale, mentre impiegando reattivi N/2 e bicromato diluito a N/5 i risultati sono peggiori.

Queste conclusioni erano del resto prevedibili, considerando che la percentuale media di ossidazione (*p*) per il bicromato N/5 alla concentrazione del 45 % di acido solforico si ricava facendo la media di 4 valori uno dei quali è assai più basso degli altri tre (Vedi tabella III).

In conclusione l'esame dei dati riportati nelle tabelle IV-VIII mostra che i risultati migliori si hanno impiegando bicromato N/10 per la prova di ossidazione parziale e usando, a seconda della concentrazione di acetato, gli altri reattivi alla stessa normalità oppure a normalità doppia. Va notato che le determinazioni di acido acetico in miscele di altri acidi grassi sono state eseguite senza previa esterificazione e distillazione della

miscela di acidi grassi, cioè in condizioni volutamente sfavorevoli. È ovvio che se si distillano gli acidi grassi come esteri metilici col procedimento di cui si è fatto cenno al principio di questa Nota, la successiva determinazione ossidimetrica si compirà in condizioni assai più favorevoli, perchè la concentrazione degli acidi valerianico, capronico ed epitilico verrà ridotta a meno di 1/10 e quella degli acidi propionico e butirrico presso che dimezzata. S'intende pertanto che volendo determinare l'acido acetico in una miscela di acidi grassi converrà sempre dosarlo previa esterificazione e distillazione.

Praticamente la determinazione si fa nel modo seguente: una determinata quantità della miscela, leggermente alcalinizzata con soda, viene essiccata a bagno-maria in palloncino Kjeldahl e poi distillata, dopo aggiunta di metanolo e acido solforico, come è descritto nella nostra Nota precedente. Se la miscela contiene anche acido formico questo verrà distrutto prima dell'essiccazione nel modo indicato. Il distillato, portato a leggerissima alcalinità, viene diviso in due porzioni uguali, le quali, dopo essiccazione, vengono ossidate, l'una completamente con bieromato d'argento e forte concentrazione di acido solforico, l'altra parzialmente con bieromato di potassio e acido solforico al 50 %; la determinazione del bieromato consumato e il calcolo dell'acido acetico presente nella miscela si fanno nel modo sopra indicato.

Riportiamo alcune determinazioni fatte seguendo questo procedimento.

TABELLA IX.

Acido formico	Acido acetico	Acido propionico	Acido butirrico	Acido Valerianico	Acido capronico	Acido epitilico	Acido acetico trovato	Differenza	Errore
mg.	mg.	mg.	mg.	mg.	mg.	mg.	mg.	mg.	%
8	4,80	4	4	4	8	4	4,70	- 0,10	- 2,1
—	4,38	4	4	4	—	4	4,50	+ 0,12	+ 2,7
2	1,51	2	2	2	2	2	1,57	+ 0,06	+ 4,0
—	1,20	1,5	1,5	1,5	—	1,5	1,15	- 0,05	- 4,2
1,5	1,20	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,27	+ 0,07	+ 5,8
—	1,16	1,2	1,2	1,2	—	1,2	1,10	- 0,06	- 5,2
0,7	0,82	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,86	+ 0,04	+ 4,9
—	0,68	0,7	0,7	0,7	—	0,7	0,68	0,00	0,0

L'esame della tabella IX permette di rilevare che eseguendo la determinazione dell'acido acetico in miscele di acidi grassi previa distillazione i

risultati che si ottengono sono migliori che non con la determinazione diretta; conclusione del resto prevedibile, in base ai dati riferiti precedentemente.

La presente Nota dimostra che è possibile eseguire delle microdeterminazioni ossidimetriche di acido acetico, anche se questo si trova in miscele di acidi grassi delle serie mono- e dicarbossilica, saturi e insaturi e di loro ossi- e cheto-derivati; l'esattezza del metodo si può ritenere soddisfacente per gli scopi biologici per i quali fu elaborato, non esistendo d'altra parte nessuno altro procedimento microanalitico atto a questo scopo.

BIBLIOGRAFIA.

- P. CASELLI e E. CIARANFI, «Atti della Reale Accademia d'Italia», fasc. 12, serie VII, vol. II, 1941.
H. CORDEBARD e V. MICHL, «Bull. Soc. Chim. de France», 43, 97 (1928).
E. DUCLAUX, *Traité de Microbiologie*, to. III, pag. 384, Masson, Paris, 1900.
D. C. DYER, «J., Biol. Chem.», 28, 445 (1916).
F. EDELSTEIN e F. V. CSONKA, «Bioch. Zs.», 42, 372 (1912).
A. I. VARTANEN e I. PULKKI, «J. Am. Chem. Soc.», 50, 3138 (1928).
E. WELDE, «Bioch. Zs.», 28, 504 (1910).
C. G. L. WOLF e S. V. TELFER, «Bioch. J.», 11, 197 (1917).
-

Chimica. — *Contributo alla conoscenza del sistema Nichelio-Zolfo* ⁽¹⁾. Nota di GIORGIO PEYRONEL e ELSA PACILLI, presentata ⁽²⁾ da LIVIO CAMBI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Lo studio più completo che sia stato finora compiuto sul sistema Ni/S è quello di BORNEMANN [1] [2] secondo i metodi della metallografia classica per via termica, densimetrica e micrografica. Questo A. ne ha stabilito il diagramma di stato in modo esauriente fino alla percentuale del 31 % S in peso. Dal diagramma di stato risultano esistenti fino a quella percentuale le seguenti quattro fasi, i cui simboli da noi riportati sono quelli adottati dall'ABEGG [3], semplificati rispetto a quelli di BORNE-MANN.

Fase α — nichel, il quale presenterebbe, secondo i dati di BORNE-MANN [1] un piccolo intervallo di solubilità per lo zolfo pari al 0,3 – 0,5 % in peso di questo. Secondo i dati più recenti di MASING e KOCH [4] la solubilità dello zolfo nel nichel sarebbe inferiore al 0,002 % S in peso, poichè per questo valore sarebbe ancora visibile tra cristallo e cristallo l' Ni_3S_2 .

Fase β — fase corrispondente ad una soluzione solida con composizione variabile fra i limiti 24 % e 30,5 % S in peso e stabile fra le temperature estreme di 620° e 818° C. Nessun dato strutturalistico esiste finora su questa fase stabile ad alta temperatura. Essa dà un eutettico con Ni a 645° C e 21,5 % S corrispondente alla composizione Ni_9S . L'esame micrografico di BORNEMANN [1] e quello röntgenografico successivo di BRILL e HALLE [5], confermati entrambi dai nostri risultati, dimostrano la inesistenza di una vera fase corrispondente a questa composizione che è dunque da considerare casuale. La fase β dà per raffreddamento, a cominciare da 553° C la seguente fase β' .

Fase β' — Ni_4S_2 (26,7 % S) la quale dà delle soluzioni solide a tenori di zolfo crescenti da 553° C a 503° C e decrescenti fra 503° C e la temperatura ambiente, a cui possiede la composizione teorica indicata.

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale della R. Università di Milano. Centro Metallurgico del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

⁽²⁾ Nell'Adunanza del 22 novembre 1941-XX.

Fase γ — Secondo BORNEMANN a questa fase corrisponderebbe la formula Ni_6S_5 (31,28 % S). Questa conclusione è tratta dall'A. citato in base ai tempi d'arresto osservati lungo le orizzontali di 520° C e 503° C corrispondenti alla segregazione di due eutettoidi tra la fase γ e le soluzioni solide Ni_3S_2 —S. La presenza di due eutettoidi distinti dimostra l'esistenza fra 520° C e 503° C di una probabile fase o modificazione allotropica che il BORNEMANN indica con ζ , ma di cui non si hanno finora dati più precisi.

Un altro argomento a favore della composizione Ni_6S_5 è dato secondo BORNEMANN dalla bassa percentuale di Ni_3S_2 che compare nella micrografia della lega al 31,0 % S (nota 1, fig. 31). Ora questa percentuale è talmente prossima a quella teorica per Ni_6S_5 (31,28 % S) che la quantità di Ni_3S_2 che compare nella micrografia è veramente troppo grande per la minima differenza (0,28 % S) che intercorre fra le due composizioni.

Le micrografie da noi ottenute per le percentuali 31,25 e 31,40 % S mostrano infatti ancora quantità rilevanti di Ni_3S_2 .

Anche la misura dei tempi d'arresto sulle due orizzontali 520° C 503° C del diagramma di stato non è una prova sufficiente per decidere a favore della composizione Ni_6S_5 , data la imprecisione di tali misure per differenze di percentuali così minime quali sono quelle che intercorrono tra la composizione Ni_6S_5 e le successive Ni_7S_6 , Ni_8S_7 , ecc... come verrà più oltre discusso.

Le conclusioni di BORNEMANN relative alla composizione della fase γ , da lui data come probabile, sono quindi discutibili e giustificano lo studio più approfondito e sistematico che ci siamo proposti allo scopo di meglio definire le condizioni, le modalità di esistenza e la composizione di questa nuova fase.

L'esistenza dell' Ni_6S_5 è stata assunta dagli AA. successivi come dimostrata; tanto che ha servito per esempio a HÜLSMANN e WEIBKE [6] per interpretare analogicamente la fase γ del sistema CoS come Co_6S_5 , mentre studi strutturalistici più recenti [7] hanno definitivamente assegnato a questa fase la composizione Co_9S_8 .

Anche SCHENCK e VON DER FORST [8], studiando l'equilibrio $\text{NiS} + \text{H}_2 \rightleftharpoons \text{Ni} + \text{H}_2\text{S}$ a diverse temperature, hanno creduto di poter confermare l'esistenza di Ni_6S_5 con l'isoterma a 500° C, il cui andamento, parallelo all'asse dei % S, piega bruscamente alla composizione del 31,3 % S. Questi AA. non hanno però considerato il fatto che la loro isoterma a 400° C si flette in corrispondenza al 31,7 % S. Anche i risultati di SCHENCK non dimostrano quindi l'esistenza dell' Ni_6S_5 ; anzi, come diremo nella discussione dei nostri risultati sperimentali, confermano le nostre conclusioni sulla esistenza di una fase a più alta percentuale di zolfo.

Le altre fasi più ricche di zolfo del sistema Ni S non sono mai state indagate per via termica, date le elevate tensioni di zolfo che si hanno oltre il 31-32 % S.

Queste fasi sono state peraltro definite röntgenograficamente in numero di due: NiS (35,33 % S) dimorfo e NiS₂ (52,2 % S) (tipo pirite). I rapporti tra queste due fasi sono stati indagati anche per via röntgenografica da W. BILTZ e COLL. [9], i quali non hanno riscontrato altre fasi nell'intervallo compreso fra di esse.

La fase Ni₃S₄ (tipo spinello) si trova solo in natura ma non potè essere preparata sinteticamente.

Il dimorfismo della fase NiS si manifesta in una forma esagonale (tipo NiAs) stabile ad alta temperatura e in una forma romboedrica (millerite) stabile a temperatura inferiore. Il punto di trasformazione tra le due fasi è stabilito da BILTZ a 396° C. La trasformazione NiS esagonale → NiS romboedrico può venire inibita, secondo BILTZ, dalla presenza di impurezze tra cui principalmente lo zolfo in lieve eccesso. Questa però non sembra essere l'unica causa del permanere a temperatura ambiente della fase esagonale poichè essa è stata preparata anche per via umida [10]. D'altronde le leghe al 34 % S da noi preparate in cui l'NiS presente non può certo contenere un eccesso di zolfo hanno dato tanto la fase esagonale se scaldate verso i 1000° C, quanto quella romboedrica se scaldate sotto i 900° C. Ciò sembra quindi dimostrare anche un'influenza della temperatura massima raggiunta sulla struttura finale della fase.

Le soluzioni solide di zolfo in NiS osservate da BILTZ [9] per un intervallo assai ristretto di composizione sembrano dovute a sottrazione di Ni, come nel caso dell'FeS [11]. Tali soluzioni solide sono ancora più estese nel caso dell'NiS₂.

Da quanto precede risulta che l'unico intervallo del sistema Ni/S ancora non chiarito è quello compreso fra la fase Ni₃S₂ (26,7 % S) e l'NiS (35,33 %S). È scopo di questa ricerca di portare un contributo alla sua conoscenza e a quella della fase γ in esso esistente.

PARTE SPERIMENTALE.

Preparazione delle metalline.

Il nichel usato per la preparazione delle metalline studiate è stato ottenuto riducendo in corrente di idrogeno l'ossido precipitato dal solfato puro reso esente da cobalto.

Lo zolfo era cristallizzato da solfuro di carbonio.

Le metalline furono preparate per sintesi diretta dagli elementi in corrente d'azoto fino al 32 % S in peso. Questa percentuale è la massima da noi ottenuta a pressione atmosferica, a differenza di BORNEMANN che ottiene solo il 31 % S. Le metalline con percentuale maggiore furono preparate in tubo di quarzo chiuso sotto vuoto arricchendo metalline a più basso contenuto di zolfo.

Per alcune metalline del primo gruppo si eseguì anche l'analisi termica che diede risultati concordanti con quelli di BORNEMANN e ci dissuase quindi dal rivedere in modo più approfondito il diagramma di stato dato da questo A. Questa ricerca avrà maggior significato quando sarà meglio conosciuta la natura della fase γ .

La composizione delle metalline venne stabilita con analisi dirette determinando ponderalmente il nichel e lo zolfo. Poichè l'errore complessivo delle due analisi era dell'ordine del $\pm 0,1$ % riportiamo le sole percentuali di zolfo trovate per i vari campioni nella tabella 1 delle densità, e ad esse si riferiscono tutte le indicazioni contenute nel testò.

Abbiamo notato nei campioni più ricchi di zolfo, preparati in crogiolo cilindrico, una diversità di composizione fra la zona inferiore e quella superiore, sempre più ricca di zolfo. Per questo il metodo di BORNEMANN della pesata diretta del crogiolo prima e dopo la fusione non può essere applicato oltre una certa percentuale, e le misure da noi eseguite si riferiscono a zone molto ristrette della metallina la cui composizione venne esattamente determinata per via chimica.

In alcuni campioni le parti di metallina rimaste sulle pareti del crogiolo, isolate dalla massa sottostante, avevano, anche preparate in corrente di azoto, la composizione NiS. Questo fatto può essere spiegato o con l'ipotesi di una variazione continua di composizione della fase liquida verso l'alto, o di un arricchimento degli strati solidi superiori per il passaggio di zolfo dagli strati sottostanti.

Lo studio delle metalline ottenute venne per ora eseguito solo coi metodi micrografico, densimetrico e röntgenografico.

Esame micrografico.

I reattivi da noi usati per l'attacco sono stati: 1° l'acido nitrico concentrato che a freddo colora in bruno la fase Ni_3S_2 in circa 5 sec. e la fase γ in 20–30 sec. mentre lascia inalterati il nichel e le due fasi NiS; 2° la soluzione di composizione: acido cromico gr. 33, acido solforico concentrato cc. 35, acqua cc. 65 (brevemente indicata nelle tavole e nel testo con « acido cromico »), la quale a 100° C colora in bruno solo l' Ni_3S_2 , e corrode in modo diverso la fase γ e le due fasi NiS.

Fino al 31 % S i nostri risultati concordano con quelli di BORNEMANN: la figura 1 (20,01 % S) mostra l'eutettico Ni_3S_2 -Ni, nella figura 2 (26,90 % S) compare della fase γ (parte bianca), sotto forma di un eutettoide con Ni_3S_2 (fondo scuro). Di questo eutettoide diamo una micrografia molto caratteristica nella figura 3 (30,60 % S). Per questa composizione, il cui insieme non è qui rappresentato, compaiono ancora ampie zone di eutettoide, mentre la fase γ è solcata fra cristallo e cristallo da ampie striscie di Ni_3S_2 .

La figura 4 (31,25 % S) e la figura 5 (31,40 % S) presentano ancora notevoli quantità di Ni_3S_2 nella massa fondamentale di fase γ e dimostrano quindi che la composizione di quest'ultima dev'essere superiore al 31,28 % S, contrariamente alle conclusioni di BORNEMANN tratte dall'esame micrografico della sua metallina al 31 % S.

La figura 6 (31,90 % S) mostra il caratteristico aspetto della fase γ con l'attacco all'acido cromico. Questo attacco è più profondo di quello, all'acido nitrico. I limiti tra cristallo e cristallo risultano profondamente segnati da veri e propri solchi: i cristalli vengono corrosi secondo fasci di linee parallele che si intersecano secondo un angolo di circa 79° . Non è possibile per ora indicare il significato di questo valore angolare che si può tuttavia presumere abbia una relazione con la struttura di questa fase.

Le metalline con la composizione 31,90–32,10 % S non presentano più dell' Ni_3S_2 eccettuato un caso in cui si osservarono ancora tracce di questa fase nella zona periferica più esterna del campione. In alcuni campioni della stessa composizione, di cui riportiamo un esempio nella figura 7, fu invece possibile osservare, con l'attacco all'acido nitrico, minime tracce di NiS , anche queste molto localizzate.

La presenza di Ni_3S_2 e di NiS in quantità trascurabili e in forma localizzata nell'intervallo 31,90–32,10 % S dimostra che la composizione della fase γ deve essere molto prossima a questo valore. Fra le composizioni con rapporto Ni/S semplice

Ni_6S_5	Ni_7S_6	Ni_8S_7	Ni_9S_8
31,28 % S	31,90 % S	32,30 % S	32,60 % S

sono quindi da escludere le estreme. Non è possibile scegliere in modo assoluto tra le due formule intermedie data la loro minima differenza di percentuale di zolfo; propendiamo tuttavia per la formula Ni_7S_6 poichè le percentuali di zolfo delle metalline che presentano solo la fase γ sono comprese tra i valori 31,90–32,10 % S.

L'unico caso in cui si osservi il rapporto 7/6 è quello dei composti intermetallici $(\text{Co}, \text{Fe})_7(\text{Mo}, \text{W})_6$ [14]. Il debole carattere metalloidico del molibdeno e del wolframio non è sufficiente per provare analogicamente la possibilità della formula Ni_7S_6 ; tanto più che il fotogramma della fase γ è diverso da quello dei composti citati, ricavabile dai valori numerici dei loro fotogrammi [14].

Un argomento a favore della percentuale 31,90 % S (Ni_7S_6) è dato invece dal già ricordato lavoro di SCHENCK [8] nel cui grafico, riunendo con una curva i punti di flesso delle isoterme 600° , 500° , 400° C, si giunge per estrapolazione a temperatura ambiente alla composizione 31,90 % S.

La figura 8 (33,17 % S) e la figura 9 (31,20 % S) mostrano chiaramente la coesistenza distinta della fase γ con la millerite: i campioni corrispon-

denti vennero preparati a temperatura inferiore a 900°C e l'esistenza della millerite venne accertata con l'analisi röntgenografica. Oltre il 32 % S la porosità delle metalline si fa più sensibile, come è evidente dalle micrografie.

Le figure 10, 11, 12 (34,10 % S) dimostrano la coesistenza distinta della fase γ con l' NiS esagonale (tipo NiAs), metastabile a temperatura ordinaria, ma che tuttavia abbiamo ottenuto preparando la metallina a temperatura di circa 1000°C pur essendo il tempo di raffreddamento uguale a quello impiegato per i campioni contenenti millerite. Le figure 10 e 11 (acido nitrico) mostrano chiaramente una struttura di eutettoide. Riportiamo pure la figura 12 come esempio della diversità dell'attacco con acido cromico sulle fasi γ ed NiS .

Analisi röntgenografica.

Si eseguì l'esame röntgenografico col metodo delle polveri (radiazione $\text{Fe K}\alpha$ non filtrata, 20 KV, 18 mA, una semionda, camera 57,3 mm) sull'intervallo di composizione 26,7–35,3 % S.

I fotogrammi ottenuti sono messi a confronto nel diagramma I e nelle fig. 13–19. Esse confermano pienamente i risultati dell'analisi micrografica. Infatti le metalline con composizione 31,90–32,10 % S danno un fotogramma (N. 3, diagr. 1) caratteristico, nel quale sono assenti tanto le righe dell' Ni_3S_2 quanto quelle delle due fasi NiS . Nell'intervallo 26,70–31,90 % S si ha un passaggio graduale progressivo dall' Ni_3S_2 (N. 1, diagr. I) alla fase γ .

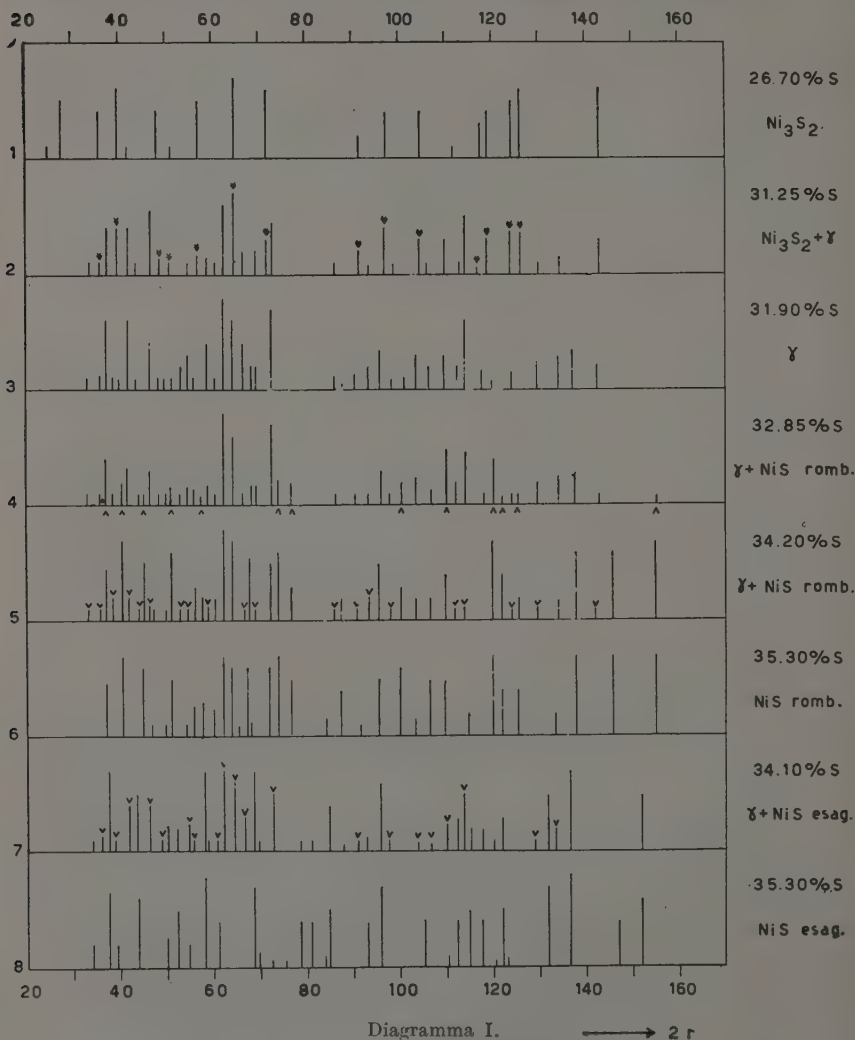
Per la composizione 31,25 % S. (N. 2, diagr. I) si notano ancora in modo sensibile le righe della fase inferiore Ni_3S_2 , ciò che, come l'esame micrografico, dimostra l'inesistenza dell' Ni_6S_5 .

I fotogrammi successivi dimostrano la coesistenza, nell'intervallo 31,90–35,30 % S, delle fasi γ + millerite e γ + NiS esagonale. Già col 32,85 % S (N. 4, diagr. I) si hanno sensibili quantità di millerite visibili anche all'esame micrografico (qui non riprodotto). Ciò dimostra la impossibilità della formula Ni_6S_8 per la fase γ . Maggiore diventa la percentuale di millerite per 34,20 % S (N. 5, diagr. I) e di NiS (N. 7, diagr. I) per 34,10 % S.

L'esame röntgenografico, come quello micrografico, esclude l'esistenza di soluzioni solide γ + Ni_3S_2 e γ + NiS (tanto romboedrico che esagonale), di una certa importanza.

Sulla struttura cristallina della fase γ , la sola prova che possa dare una dimostrazione assoluta della sua formula, non è possibile per ora avere alcun dato preciso, poichè, dato il suo basso grado di simmetria, il fotogramma delle polveri non è sufficiente per stabilirne la struttura, nè ci è riuscito ancora di isolarne un cristallo singolo. Il suo fotogramma è

il peggiore tra tutti quelli delle altre fasi del sistema Ni/S. La sua abbondanza di righe, per lo più deboli, indica che questa fase ha un basso grado



di simmetria. Non è possibile trovare analogie con gli altri solfuri dei metalli di transizione, neppure con la fase Co_9S_8 (fig. 19) monometrica. Ciò conferma ancora la impossibilità della formula Ni_9S_8 e dimostra quindi

la sostanziale differenza tra il sistema Ni/S e Co/S. Su questo interessante problema ci riserviamo di fare alcune osservazioni in una prossima Nota.

Abbiamo anche esaminato coi raggi X la metallina al 20 % S scaldata in quarzo al disopra della temperatura di 535°C e bruscamente raffreddata in modo da impedire la trasformazione $\beta \rightarrow \beta'$ che essa subisce per raffreddamento a quella temperatura. Come nel caso della fase β del sistema Co/S (6) non è stato possibile notare alcuna diversità di struttura: ciò dimostra che la fase β non può sussistere neanche allo stato metastabile a temperatura ambiente.

L'esame diretto sulla metallina scaldata oltre 535°C , che abbiamo tentato, non ha dato per ora risultati positivi.

Anche le prove di ricottura in quarzo sotto vuoto della fase γ per oltre 120 ore non hanno mostrato variazioni di sorta nella sua struttura, nè hanno dato miglioramento alcuno del suo fotogramma.

Esame densimetrico.

Nel diagramma II riportiamo i valori delle densità finora noti e di quelli da noi misurati per il sistema Ni/S. Le misure di BORNEMANN (indicate con \times) per l'intervallo Ni — γ sono prese direttamente da [1]; quelle di BILTZ (indicate con \otimes) per l'intervallo NiS — NiS_2 sono state calcolate dal diagramma riportato da questo A. in [9]. Possediamo inoltre le densità röntgenografiche (indicate con \odot) delle fasi di cui si conosce l'esatta struttura.

Abbiamo quindi completato lo studio densimetrico nell'intervallo γ — NiS e ripetute le misure per quello Ni_3S_2 — γ i cui valori dati da BORNEMANN [1] erano molto discordanti. Le nostre misure sono indicate nel diagramma II con \odot , salvo quelle che riguardano le metalline γ — NiS esagonale, indicate con \emptyset . Esse si allineano in modo soddisfacente sulla retta che congiunge le densità röntgenografiche di Ni_3S_2 — millerite — NiS_2 ; sull'ultimo tratto di essa trovano posto con lo stesso grado di approssimazione le misure di BILTZ per l'intervallo NiS — NiS_2 .

Dato l'andamento rettilineo del grafico delle densità nell'intervallo Ni_3S_2 — NiS_2 non è quindi possibile avere da questo alcun indizio sulla esatta composizione della fase γ . La retta B del diagramma, assunta da BORNEMANN come congiungente Ni_3S_2 — γ , non è dunque valida, per quanto si possa farla corrispondere alla linea delle densità delle soluzioni solide $\text{Ni}_3\text{S}_2 + \text{S}$ calcolate come nel caso della pirrotina FeS [11], per sottrazione e non per sostituzione di nichel nell' Ni_3S_2 . Non ci sembra tuttavia che questa coincidenza sia per ora sufficiente per affermare che le misure di BORNEMANN si riferiscano a possibili soluzioni solide di questo tipo, ma reputiamo piuttosto che la loro discordanza dai nostri valori siano dovute ad errori causati dalla notevole porosità di queste metalline.

Per ovviare a questo inconveniente ed avere risultati concordanti abbiamo infatti dovuto eseguire la densità picnometrica sulle metalline ridotte in polvere e setacciate.

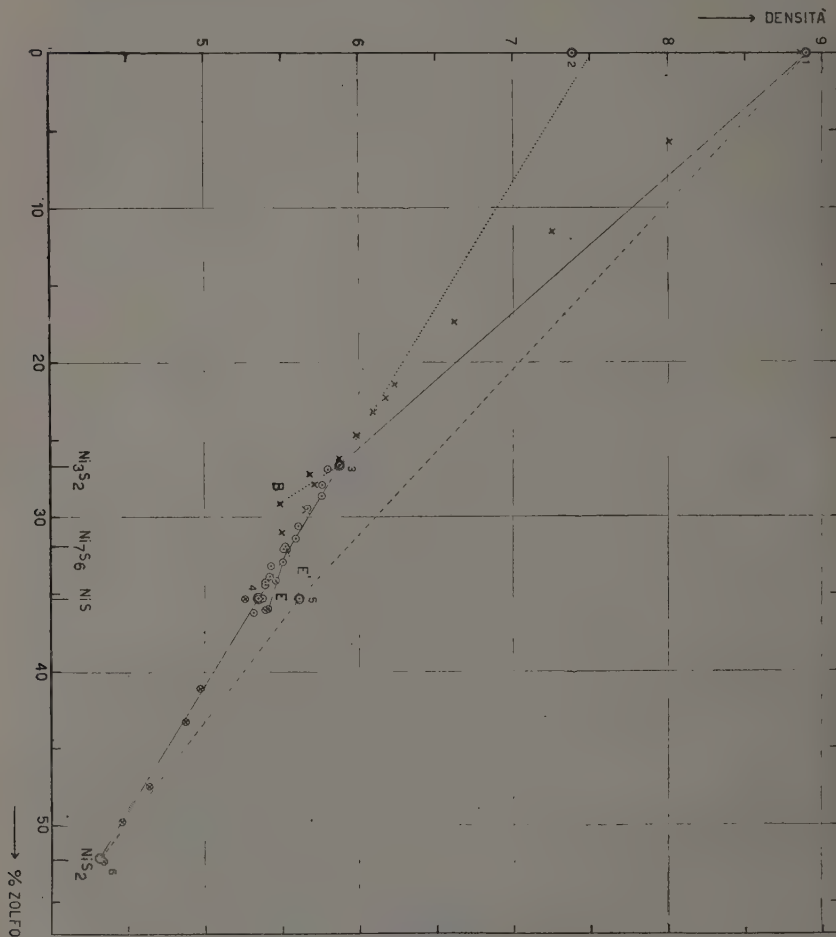


Diagramma II.

© densità röntgenografiche [3] di

- 1 - Ni cubico
- 2 - Ni esagonale (?) [12]
- 3 - Ni_3S_2
- 4 - NiS romboedrico
- 5 - NiS esagonale
- 6 - NiS_2

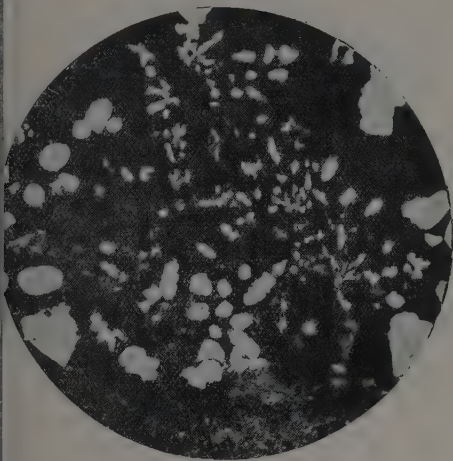


Fig. 1. - 20,01 % S (HNO_3) 49 \times

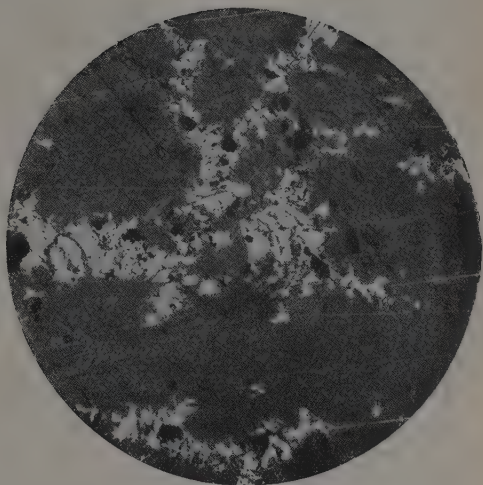


Fig. 2. - 26,00 % S (ac. crom.) 49 \times

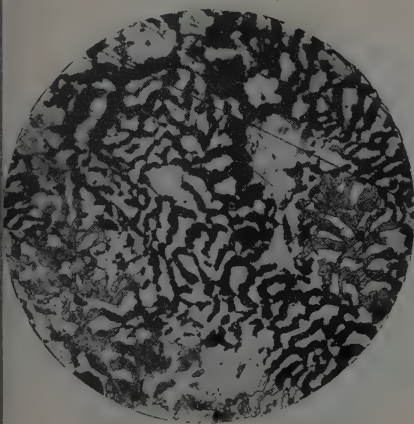


Fig. 3. - 30,60 % S (ac. crom.) 134 \times

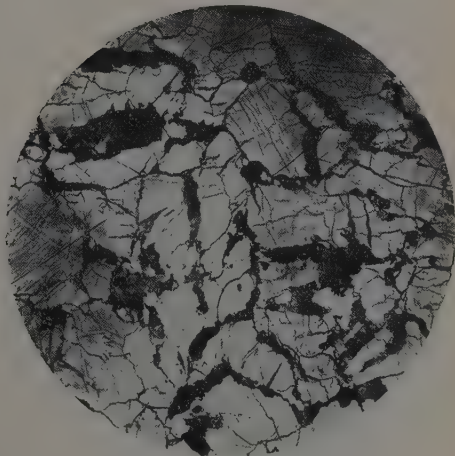


Fig. 4. - 31,25 % S (HNO_3) 49 \times

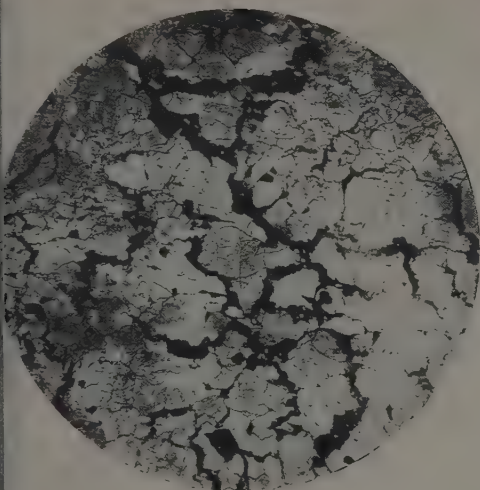


Fig. 5. - 31,40 % S (HNO_3) 49 \times

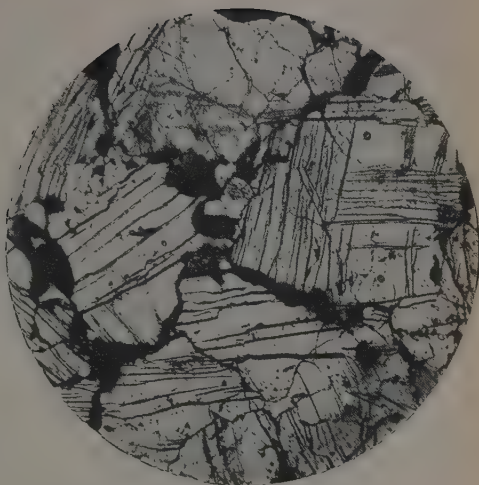


Fig. 6. - 31,90 % S (ac. crom.) 88 \times

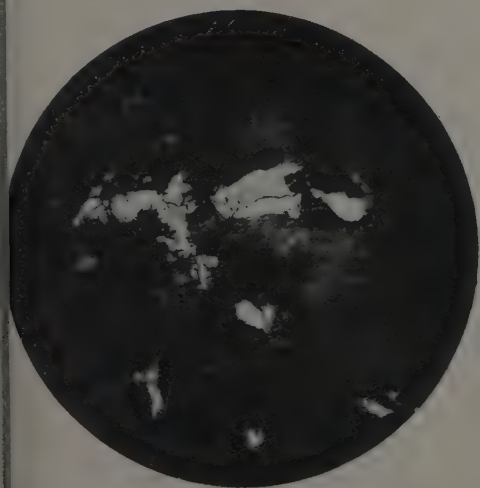


Fig. 7. - 31,90 % S (HNO_3) 134 \times

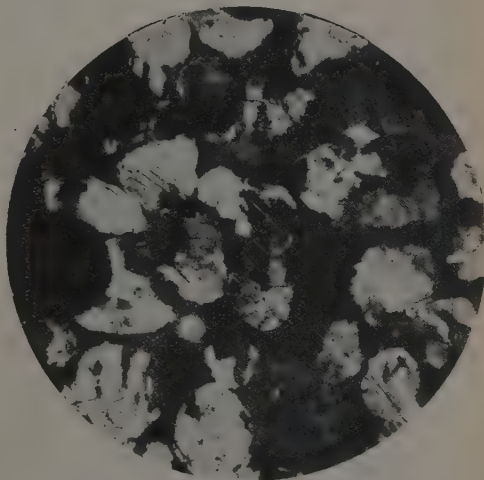


Fig. 8. - 33,17 % S (HNO_3) 88 \times

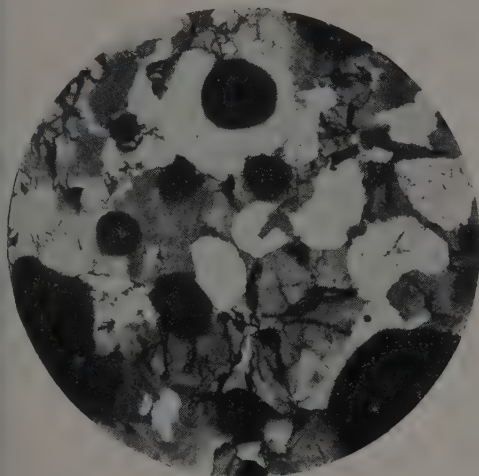


Fig. 9. - 34,20 % S (HNO_3) 88 \times

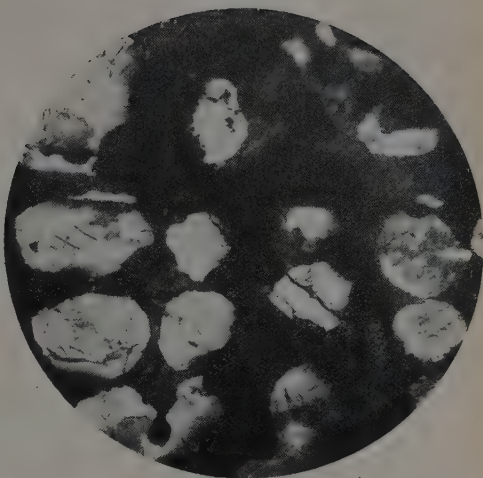


Fig. 10. - 34,10 % S (HNO_3) 88 \times

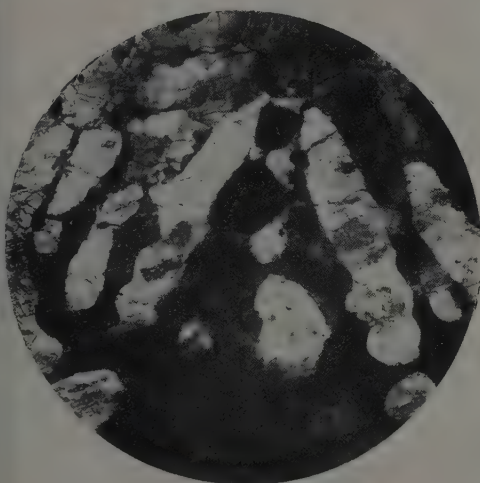


Fig. 11. - 34,10 % S (HNO_3) 49 \times

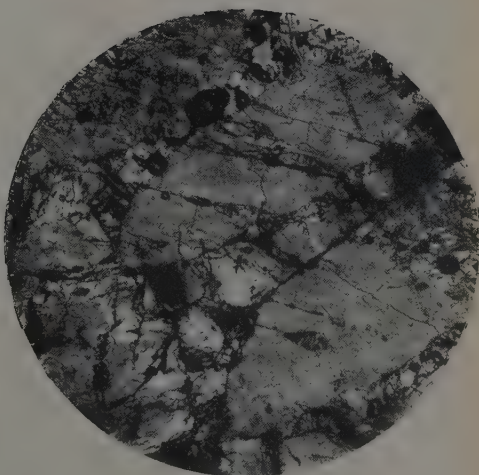


Fig. 12. - 34,10 % S (ac. crom.) 134 \times

La linea E corrisponde ai miscugli $\gamma + \text{NiS}$ esagonale ed è più bassa della congiungente i presumibili valori teorici röntgenografici. È notevole il fatto che tutti i valori da noi trovati, come quelli sperimentati di altri AA. per NiS esagonale, siano inferiori a quelli röntgenografici: ciò è imputabile alla metastabilità della modificazione esagonale della fase NiS a temperatura ambiente.

Le linee tratteggiate del diagramma congiungono i dati röntgenografici della letteratura [3] per il nichel cubico, NiS esagonale, NiS_2 .

TABELLA DELLE DENSITÀ.

N.	%	d	fasi
1	26,90	5,799	$\beta + \gamma$
2	27,90	5,763	»
3	28,60	5,760	»
4	29,40	5,670	»
5	30,60	5,600	»
6	31,40	5,586	
7	31,90	5,518	γ
8	32,10	5,505	»
9	32,10	5,529	»
10	32,85	5,502	$\gamma + \text{NiS}$ romboedrico
11	33,17	5,430	» » »
12	33,85	5,420	» » »
13	34,10	5,460	» » esagonale
14	34,20	5,390	» » romboedrico
15	34,40	5,390	» » »
16	35,95	5,410	» » esagonale
17	36,00	5,395	» » »
18	36,20	5,315	» » romboedrico

Prolungando la retta $\text{NiS}_2 - \text{Ni}_3\text{S}_2$ essa incontra l'asse delle ordinate a quota 7,50, molto prossima alla densità 7,37 del nichel esagonale, contenente idrogeno, ottenuto per deposizione catodica [12] e stabile sotto la temperatura di circa 300°C , il quale, secondo BÜSSEM e GROSS avrebbe

una struttura interstiziale (Einlagerungsstruktur) e non corrisponderebbe a un vero e proprio composto. Questo dimorfismo del nichel può essere ritenuto possibile dato il polimorfismo di tutti gli altri metalli che lo precedono (Cr, Mn, Fe, Co): si può pensare che la modificazione esagonale del nichel sia resa stabile dalla inserzione degli atomi di idrogeno nei suoi interstizi.

Notiamo questo fatto per la sua singolarità e perchè sembra potersi collegare al dimorfismo dell' NiS . Le densità delle due modificazioni di esso, infatti, si allineano in modo quasi rettilineo fra NiS_2 — Ni cubico l'una NiS_2 — Ni esagonale l'altra. Questo fatto sembra convalidare la tesi di Hägg [13] secondo cui anche le strutture delle metalline del nichel sarebbero da considerare come interstiziali, per quanto più complesse di quelle che sono state oggetto della nota classificazione sistematica di questo A. Ci riserviamo uno studio più approfondito del problema in un prossimo lavoro.

I valori di BORNEMANN per l'intervallo Ni cubico — Ni_3S_2 presentano notevoli scarti dai valori teorici dati dalla congiungente Ni cubico — Ni_3S_2 . Questo divario può essere spiegato, come quelli successivi già notati, con l'erroneità delle misure dovuta alla porosità delle metalline.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] K. BORNAMANN, « Metallurgie », 5, 13 (1908).
- [2] K. BORNEMANN, « Metallurgie », 7, 667 (1910).
- [3] *Abeggs Handbuch anorg. Chem.*, vol. IV, sez. III, parte IV, pag. 864 sgg. (1939).
- [4] G. MASING, L. KOCH, « Z. Metallkunde », 19, 278 (1927).
- [5] R. BRILL, F. HALLE, « Z. angew. Chem. », 48, 787 (1935).
- [6] O. HULSMANN, F. WEIRKE, « Z. anorg. allgem. Chem. », 227, 113 (1936).
- [7] M. LINDQVIST, D. LINDQVIST, A. WESTGREN, « Svensk Kemisk Tidskrift », XLVIII, 156 (1936).
- [8] R. SCHENCK, P. v. d. FORST, « Z. anorg. allgem. Chem. », 241, 145 (1939).
- [9] W. BILTZ, « Z. anorg. allgem. Chem. », 228, 275 (1936).
- [10] G. R. LEVI, A. BARONI, « Z. Kristallographie », (A) 92, 210 (1935).
- [11] H. HARALDSEN, « Z. anorg. allgem. Chem. », 246, 169 (1941).
- [12] W. BUSSEM, F. GROSS, « Z. Phys. », 87, 778 (1934).
- [13] G. HAGG, « Z. Phys. Chem. », (B) 12, 33 (1931).
- [14] A. MAGNELI, A. WESTGREN, « Z. anorg. allgem. Chem. », 238, 268 (1938);
H. ARNFELT, A. WESTGREN, « Jernkontorets Ann. », 185 (1935).

Geologia. — *Sulle rocce eruttive del gruppo Ortles-Cevedale* ⁽¹⁾. Nota preliminare di CIRO ANDREATTA, presentata ⁽²⁾ da MICHELE GORTANI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

L'importante meraviglioso gruppo montuoso Ortles-Cevedale, che si erge massiccio fra la Val Venosta, la Val di Sole e la Valtellina, è costituito geologicamente da una serie di terreni fra le più interessanti. Se le rocce prevalenti sono le metamorfiche che, abbondanti in tutta la loro vasta gamma di ordini, specie e varietà, costituiscono un paradiso per il petrografo sistematico, ben rappresentate sono pure le sedimentarie della placca compatta che costituisce le più alte e le più ardite cime del gruppo (Ortles, Cristallo, Thurwieser, Gran Zebrù, ecc.).

Relativamente più scarse, come volume totale, sono le rocce eruttive. Queste però sono presenti quasi ovunque, in masse molto limitate o in filoni che attraversano tutto il complesso delle altre rocce. Se si volessero segnare con punti neri tutti gli affioramenti di rocce eruttive sparsi nel grande gruppo di montagne su una carta topografica d'assiene, si vedrebbero numerosissimi punti irregolarmente disposti come quelli di una spruzzatura. Ma l'immagine della spruzzatura, se è giusta per un osservatore dall'alto, non corrisponde alla realtà osservata dal geologo. Infatti, le rocce metamorfiche e sedimentarie risultano tutte quante cribrate, dal basso all'alto, da apofisi e filoni di rocce eruttive, che spesso danno origine a complicate maglie di irregolari reticoli.

Nell'estate 1930 ho iniziato il rilevamento dettagliato al 25 mila del gruppo in parola, principiando dalla media e passando l'anno successivo all'alta Val d'Ultimo. In seguito i miei rilievi si estesero a tutto il versante alto-atesino del gruppo ed al versante italiano della catena del Cavallaccio, per poi passare sul versante trentino e su quello lombardo del massiccio Ortles-Cevedale. Il rilevamento è stato condotto essenzialmente per incarico avuto dal Direttore della Sezione Geologica del Magistrato alle Acque di Venezia, per i versanti trentino ed alto-atesino, e dal R. Comitato Geologico, per il versante lombardo.

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia e Petrografia della R. Università di Bologna.

⁽²⁾ Nell'Adunanza del 22 novembre 1941-XX.

La zona rilevata durante le dodici campagne estive, durate ognuna dai due ai quattro mesi, comprende una buona parte del gruppo in parola e delle regioni immediatamente circostanti.

La carta geologica al 50 mila della parte Nord del gruppo, corrispondente alle otto intere tavolette al 25 mila Tubre, Lasa, Silandro, Laces, Gogo dello Stelvio, Cima Vertana, Martello e San Nicolò, era già in avanzato corso di stampa fino dallo scorso anno, quando il litografo fu costretto ad interrompere il lavoro, quasi ultimato, per ragioni di carattere contingente. Della parte Sud il rilevamento è già a buon punto e mancano ancora solo alcune zone corrispondenti a parti delle valli di Rabbi, di Bressimo, Furva e Zebrù. Per le impervie regioni comprese nelle valli lombarde il lavoro fu particolarmente gravoso perchè manca qualsiasi base geologica, per quanto approssimata e vecchia, ed il rilievo fu dovuto eseguire ex-novo.

La massa del materiale da studio raccolto durante le dodici campagne di rilevamento, è, naturalmente, enorme ed in buona parte risulta straordinariamente interessante.

Senza dubbio, una categoria molto varia di rocce che attira subito l'interesse del petrografo e del geologo, è data dalle rocce eruttive raccolte nelle diverse zone del massiccio.

Da vari anni ho preparato un piano organico di lavori per lo studio approfondito e dettagliato delle rocce eruttive del gruppo Ortles-Cevedale, scaglionato nel tempo, con l'esecuzione di molti lavori parziali, in parte affidati pure ad allievi, allo scopo di portare un contributo il più definitivo possibile alla conoscenza di queste rocce, sia dal punto di vista puramente sistematico, sia soprattutto da quelli della differenziazione magmatica e del meccanismo geologico delle iniezioni ed intrusioni entro questa interessantissima parte della catena alpina.

Come prima parte di questo programma, sono in via di elaborazione o già elaborati diversi lavori ed uno è già stampato, come risulta dall'elencazione seguente.

Le rocce eruttive dell'*alta Val d'Ultimo*, esclusa la conca del Lago Bianco, sono state studiate dal dott. Carlo Minguzzi e la relativa Memoria è già stampata (bibl. 1):

le rocce eruttive della *catena Cima Toro-Monte Orecchia-Monte Marco-Gran Ladro-Gogo dei Ronchi* (sinistra della Val d'Ultimo) saranno descritte in un lavoro attualmente in preparazione da parte della dott.ssa Anna Maria Tomba;

le rocce eruttive della *Val di Solda* sono state affidate per lo studio al dott. Ugo Guandalini;

le rocce eruttive del *Passo della Bottiglia* al dott. Luigi Tomasi ed il relativo lavoro è già in corso di stampa; questo lavoro è parzialmente in relazione con uno precedente dello stesso dott. Tomasi sulla fassaita di contatto delle pareti Nord ed Est del Gran Zebrù (bibl. 2);

le rocce eruttive della *parete Sud del Gran Zembrù*, assieme ai materiali dei contatti e delle mineralizzazioni, sono in corso di studio da parte di chi scrive;

le rocce eruttive del *giacimento di ferro della Val Zembrù* saranno descritte in altro lavoro in corso per il quale sono già pronte varie analisi chimiche eseguite dalla dott.ssa Isa Zuccherini.

Infine vari altri lavori sono in programma su interessanti gruppi unitari di altre rocce eruttive e precisamente su quelle di:

gruppo del Monte Confinale-Cime del Forno;

alta Val di Peio;

Valle del Gavia, Val dell'Alpe e Punta Tresero;

alta Val di Rabbi;

zona Piz Cavaion-Monte Villar-Monte Sole in Val di Rabbi;

regione del Lago Bianco in Val d'Ultimo;

Val Martello;

regione dei dintorni di Malè.

Naturalmente, quando tutti i lavori di dettaglio relativi a queste diverse zone saranno stati pubblicati e che altro materiale di affioramenti più sparsi di rocce eruttive sarà stato completamente studiato, potrà pensare ad un lavoro sintetico riassuntivo generale, nel quale i vari problemi di unità genetica, di differenziazione magmatica, di meccanismo delle iniezioni e delle intrusioni e della geologia delle stesse, saranno ampiamente discussi e trattati, tentandone le relative più probabili soluzioni.

Poichè il programma che ho brevemente esposto si potrà completamente realizzare solo fra vari anni, è evidente che in una prima nota preliminare annunci almeno i risultati dei miei rilevamenti geologici e dei miei studi di campagna sulle rocce eruttive del gruppo, dato che molti di tali risultati sono nuovissimi. Più che una descrizione vera dei risultati prevalentemente geologici da me raggiunti, accennerò sinteticamente per gruppi unitari ai più interessanti affioramenti di rocce eruttive, mettendo in rilievo soprattutto i nuovi affioramenti da me scoperti.

PORFIRITI, DIORITI E GRANODIORITI DEL MASSICCIO DEL GRAN ZEMBRÙ.

L'ardito blocco dolomitico del Gran Zembrù, che si eleva a 3859 m., e le montagne dolomitiche immediatamente ad esso circostanti, costituiscono senza dubbio una delle più interessanti regioni dell'intero gruppo Ortles-Cevedale, sia dal punto di vista petrografico sia da quello tettonico. Attraverso questa zona passa la grande «linea dello Zembrù» che si dirige da poco sopra la Baita del Pastore in Val Zembrù verso oriente decisamente e, passando sotto i depositi detritici quaternari che stanno a

valle della Miniera di Ferro e sotto la Vedretta della Miniera, raggiunge presso la q. 3354 il costone meridionale della Cima Pale Rosse. Da questo punto scompare quasi per intero sotto il grande mantello ghiacciato che costituisce la Vedretta Cedech e la Vedretta di Solda, affiorando per breve tratto al Passo della Bottiglia (o Forcella di Cedech) e poi più a NE. Sulla continuazione orientale di questa linea di dislocazione avrà occasione di ritornare in altra sede.

Lungo questa nota « linea dello Zebrù » vengono a contatto il blocco dolomitico soprastante, che costituisce le cime più alte, e gli scisti cristallini che formano lo zoccolo sottostante e che si estendono a Sud ed a SE di tale linea. Mentre in alcuni punti di questa regione le superfici di triturazione, milonitizzazione e scivolamento sono multiple ed interessano uno spessore non indifferente di rocce, come per esempio a Nord della Baita del Pastore ed a Nord dei Castelli, altrove il limite fra i due tipi di terreno è più netto, come sul costone Sud della Cima Pale Rosse, oppure completamente cancellato da rocce eruttive iniettate esattamente lungo la superficie-limite, come si può osservare al Passo della Bottiglia.

Sulla carta geologica austriaca al 75 mila, rilevata da HAMMER negli anni 1901-1904 (bibli. 3), nella quale non è segnato alcun rilevamento della parte lombarda del gruppo perchè era fuori dai confini dello Stato austriaco, sono segnati gli affioramenti di porfirite che si trovano sui costoni settentrionale ed orientale del Gran Zebrù a vari livelli e quello isolato che si trova subito sotto la vetta di Punta Graglia (Kreil Sp.). Nei lavori dello stesso Autore relativi alla zona (bibli. 4) e nelle note illustrative della carta geologica (bibli. 5) sono segnalati, però, l'affioramento di diorite del Passo della Bottiglia, quelli del costone Sud di Cima Pale Rosse e quelli del costone Sud di Cima della Miniera.

Lo studio accurato sul posto mi ha permesso di identificare numerosi altri affioramenti e di precisare la forma e le dimensioni degli stessi. Elenco le cose più notevoli.

Il complesso filladico della Punta Graglia è tutto attraversato da un reticolo di apofisi filoniane costituite da una porfirite anfibolica di tipo dioritico, particolarmente sul costone Sud della punta.

La parete meridionale del Gran Zebrù ed il suo costone SE che sale dal passo della Bottiglia, presentano più di una decina di filoni di porfirite anfibolica e di diorite quarzifera, nessuno dei quali è stato fin'ora segnalato, tutti affioranti entro la roccia dolomitica. Le direzioni delle apofisi e dei filoni sono variabili e, date le non piccole difficoltà alpinistiche particolarmente della parete Sud, non mi fu possibile osservare se i filoni si riuniscono a formare maglie più o meno irregolari di un complesso reticolo. Oltremodo interessanti sono le azioni metamorfiche di contatto originate dal magma, con produzione di vari minerali tipici ed una certa mineralizzazione a magnetite ed a solfuri pirritosi.

Il costone filladico che affiora, come un'isola, in piena Vedretta di Cedech a SO del Passo della Bottiglia e che culmina a q. 3251, è pure attraversato da un reticolo non molto complicato, costituito da alcuni filoni di granodiorite a grana fine passante, per le caratteristiche strutturali, a porfirite quarzifera plagioclasica, e di porfirite anfibolica.

Il costone Sud della Cima Pale Rosse è pure molto ricco di affioramenti di diorite e di porfiriti, dei quali alcuni furono già segnalati da HAMMER; una di queste masse tabulari è particolarmente potente. Qui le rocce eruttive sono incassate parte nella dolomia e parte nelle filladi quarzifere.

Infine, il costone Sud di Cima della Miniera è tutto trapuntato da piccoli affioramenti di diorite che attraversano la dolomia. Il reticolo è qui particolarmente complesso e necessita di un accuratissimo rilevamento di dettaglio. Abbondanti sono le mineralizzazioni ad ottima magnetite accompagnata da interessanti altri prodotti di contatto.

I materiali da me raccolti in questa zona sono in parte già stati studiati ed in parte in corso di studio.

PORFIRITI DI PIZZO TRESERO, DELLA VALLE DI GAVIA E DELLA VALLE DELL'ALPE.

Molti sono i filoni di porfiriti, per lo più anfiboliche dioritiche, che si trovano in questa zona, pochissimi dei quali segnalati con sicurezza fin'ora. Dapprima nei lavori di STACHE (bibl. 6) sono ricordate vagamente le zone fra la Val di Gavia e la Valle dell'Alpe per il rinvenimento di porfiriti; nei successivi lavori di HAMMER (bibl. 4) si ritrova citata tale località ed il costone occidentale del Pizzo Treseiro, senza alcuna precisa indicazione.

Nel massiccio di filladi quarzifere, frequentemente listate da lame di quarzite, del Pizzo Treseiro, ho rinvenuto fin'ora circa una decina di filoni di porfirite. Alcuni si trovano sul versante settentrionale della montagna: sopra Cerenà ed in Valle Lossena. Un filone si trova sul versante occidentale dello spuntone di q. 3121 lungo il costone SO del Pizzo Treseiro verso la Valle di Gavia.

Un complesso di filoni molto interessanti si trova sulla parete rocciosa di filladi quarzifere che forma un netto gradino avente direzione N-S nella Vedretta del Dosegù, come prolungamento del costone Sud della Punta Pedranzini. Un maggiore filone si dirige dalla q. 3476 di questo gradino verso SSO, obliquando lungo la parete, per una lunghezza di circa 600 m. Vari altri filoni si trovano più a Sud di questo ed hanno minore estensione pur essendo quasi paralleli al primo. La loro iniezione è avvenuta in maniera concordante con i piani di scistosità delle filladi quarzifere.

Sul versante montuoso che da Punta della Sforzellina si abbassa verso NO e verso Ovest verso la Val di Gavia si trovano due lunghi filoni

di porfiriti subparalleli, lunghi ambedue più di un chilometro in linea d'aria, incassati ancora nelle filladi quarzifere. Il loro andamento non è rettilineo, poichè è evidente che l'affioramento si adatta alle irregolarità della superficie topografica. Il più basso parte dalla q. 2884 del costone NNO di Punta della Sforzellina e si dirige verso SO lungo un dorso roccioso, per immergersi, poco sopra al vecchio Rifugio di Gavia, sotto la coltre dei detriti morenici, dalla quale tuttavia emerge in due punti in corrispondenza dei solchi scavati da torrentelli scendenti dalla Vedretta della Sforzellina. Il secondo dista dal primo poco più di un centinaio di metri sullo stesso costone roccioso, ma in basso divarica un pò per dirigersi sulla parete del gradino che trovasi sotto la lingua terminale delle medesima Vedretta.

Alle salbande dei filoni della Vedretta Dosegù e di quelli di Punta della Sforzellina si notano frequentemente interessanti azioni metamorfiche di contatto entro le filladi quarzifere, con indurimenti e ricristallizzazioni, che sono riuscite in molti punti dell'immediato contatto a far scomparire quasi totalmente la tessitura scistosa. Si notano inoltre con grande evidenza diffuse silicizzazioni e feldispatizzazioni. In un punto presso il filone sopra il vecchio Rifugio di Gavia si possono notare le filladi trasformate in un metagneis feldispatico che assomiglia addirittura ad un ortogneis occhiadino. Il passaggio a questo metagneis dalla fillade avviene per gradi man mano che ci si avvicina alla zona di immediato contatto.

Un piccolo filone assai curioso affiora sotto la q. 2920 della Costa di Gavia, lungo il costone che si prolunga verso NE del Monte Gavia. La porfiriti qui è intensamente laminata e quasi trasformata in un ortogneis, come laminate sono le rocce feldispatizzate di contatto, per cui sembra esistere un graduale continuo passaggio fra i paragneis di fondo e la porfiriti laminata. Interessante assai è la struttura di questa roccia, che è a fondo intersertale e che sarà descritta in altra sede.

Nella Valle dell'Alpe affiora, sul suo versante destro, un filone di porfiriti anfibolica lungo circa un chilometro ed abbastanza potente. Esso parte da poco a Nord della q. 2640 della Costa di Gavia (a Sud del ponte della carrozzabile sul Torrente dell'Alpe), si dirige verso SO attraversando obliquamente il canalone, sotto gli abbondanti detriti, scendente dalla cima di segnale q. 2750, e si innalza sul ripido versante montuoso dirigendosi verso il canalone che dalla Cima di Gavia scende verso Nord. I detriti di questa porfiriti sono abbondantissimi in varie zone della bassa Valle dell'Alpe e della Val di Gavia verso l'Alpe di Gavia. le vaghe citazioni di STACHE e di HAMMER a proposito di questo punto per il rinvenimento di porfiriti credo si possano far risalire al ritrovamento, da parte di questi Autori, di frammenti di porfiriti nei detriti di falda.

PORFIRITI E DIORITE QUARZIFERA DEL CEVEDALE
E DI VALLE DELLA MARE.

Da questa regione non si ha mai avuta alcuna segnalazione per il ritrovamento di rocce eruttive. Anzi HAMMER ha voluto proprio mettere in rilievo la mancanza di rocce eruttive nella Val di Peio (di cui la Val della Mare ⁽¹⁾ è la diramazione verso Nord) e la grande scarsezza in Val di Rabbi, nella quale segnalò un solo affioramento sul Monte Villar.

I filoni del Monte Cevedale affiorano su una piccola parete rocciosa emergente dalla distesa ghiacciata che è costituita dalla Vedretta della Forcola, dalla Vedretta del Cevedale e dalla Vedretta Lunga più a Nord. Si tratta di una porzione della parete di quel gradino roccioso che corre fra la Vedretta della Forcola e la Vedretta del Cevedale quasi interamente coperto, come costone orientale della q. 3687 del Cevedale. Il roccione scoperto porta la q. 3340 e sulla sua parete si vedono netti i due filoni di porfiriti, aventi direzione NO.

Altri due filoni si trovano sul versante orientale del Monte Cevedale, poco a Sud della Forcola, ad un'altezza di circa 2840–2860 m. Gli affioramenti si possono vedere su quei roccioni che scendono a balze irregolari verso SEE dalla cimetta di q. 3452 che si trova sul costone che si dirama dapprima verso SE e poi verso Est dalla vetta centrale (q. 3764) del Monte Cevedale.

Un quinto interessante filone di porfiriti trovasi nell'alta conca di Val Venezia, poco ad oriente del Lago delle Marmotte. Il filone è poco sviluppato e poco potente e presenta direzione NO.

Tutti questi primi cinque filoni, costituiti da tipi vari di porfiriti anfibolico-plagioclastiche, affiorano entro le filladi quarzifere, nelle quali dimostrano di aver esercitato discrete azioni metamorfiche di contatto.

Interessante è l'affioramento di diorite quarzifera, accompagnato da porfiriti, che si trova sul versante orientale del Tof di Malè, a SO di Malga Mare, entro le filladi quarzifere ricche di potenti intercalazioni di quarziti grige. Entro il canalone che scende ripido verso oriente sopra la località detta Celvestrè ⁽²⁾ sono numerosi i detriti di dioriti e di porfiriti anfiboliche.

(¹) Valle e Malga Mare è l'esatta denominazione, non « di Lamare » come è scritto nelle tavolette al 25 mila dell'I. G. M.

(²) Celvestrè non « Cielvastre » come è scritto sulla tavoletta dell'I. G. M.

* * *

In appendice ai cenni dati sugli affioramenti di rocce eruttive delle più alte regioni del gruppo Ortles-Cevedale, faccio notare che è frequente trovare nelle porfiriti degli inclusi arrotondati od a spigoli vivi di diorite quarzifera. Tali inclusi hanno grandezza variabile, ma i più comuni sono delle dimensioni di un pugno. Lo studio dell'interessante associazione è in via di esecuzione ed i risultati relativi saranno resi noti fra poco.

Qui mi limito ad elencare le zone dove osservai delle porfiriti con tali inclusi: catena Cima Solda-Cima Madriccio, Val del Pozzo (Butzen T.) in Val Martello, alta Val di Solda, conca del Lago Bianco in Val d'Ultimo, alta Val Cedech.

PORFIDI DELLA CATENA MONTE MARCO-GIOGO DEI RONCHI.

Delle numerose rocce filoniane affioranti nella catena di montagne sulla sinistra della Val d'Ultimo, HAMMER segnalò alcuni filoni che si trovano nella zona fra il Passo di Soi e la Cima Tovo (Tufer Sp.). Ho avuto occasione d'identificare numerosi altri affioramenti di rocce filoniane lungo la stessa catena montuosa. Un gruppo numeroso ed interessante costituiscono i filoni che si trovano proprio nelle regioni di cresta fra il Monte Marco ed il Giogo dei Ronchi, a Nord della parte alta di Val Praecupola.

I filoni sono circa una ventina, dei quali qualcuno molto potente, aventi direzioni subparallele, molti iniettati parallelamente alle superfici di scistosità delle filladi quarzifere granatifere. Le rocce che costituiscono questi filoni sono di un tipo acido non molto dissimile da quello di certi porfidi granitici. Altri filoni, circa una decina, si trovano più a NE, sul versante montuoso verso la Val Venosta della catena Cima Quattro Pastori-Giogo Alto. Questo complesso di filoni, assieme a quelli pure in parte acidi della zona del Monte Tovo, saranno trattati in un lavoro di non lontana pubblicazione.

PORFIRITI DELLA ZONA PIZ CAVAION-MONTE VILLAR-MONTE SOLE IN VAL DI RABBI.

Sui fianchi del Piz Cavaion verso la Val di Rabbi ho potuto identificare sei filoni di rocce eruttive, nessuno dei quali fu precedentemente notificato da altri autori.

Quattro di questi si trovano esattamente ad oriente della vetta del Piz Cavaion, a quote fra i 2100 ed i 2500 m. Due sono sul versante sini-

stro della vallecola che scende fra il Piz Cavaion e la Cima Pontevecchio; altri due poco più a NE, sul costone SE della Cima Pontevecchio. La loro direzione non è lontana dalla NE. Si tratta di rocce del tipo di porfiriti anfiboliche.

Poco più a SO, a Monte della Malga Stablaz alta, si trova un lungo filone di porfirite anfibolica iniettato entro una spaccatura parallela alle superfici di scistosità dei paragneis. Il suo affioramento, che si estende per circa 1,5 km, parte dal fondo della conca che si trova immediatamente a Nord di Cima Verdignana (¹), si dirige dapprima a oriente, poi piega lievemente verso SE per volgere bruscamente a Nord in una zona intermedia fra le q. 2515 e 2600 che si trovano a circa un chilometro in linea d'aria dalla Malga Stablaz alta. Il filone si vede costantemente affiorare su di una paretina rocciosa che ha lo stesso andamento dell'affioramento del filone e che fu provocata probabilmente dalla maggiore resistenza alle azioni di degradazione meteorica offerta dalla porfirite e dai paragneis che al contatto sono fortemente induriti e silicizzati. Piccola è la pendenza del filone che si presenta quasi fosse un filone-strato. Il suo spessore varia fra i 3 ed i 6 metri.

Un altro interessantissimo filone affiora verso i 2700 m., poche decine di metri più a Nord del primo, ma solo per breve tratto, in corrispondenza della parte alta di questo. La sua estensione all'affioramento è piccola: poche decine di metri di lunghezza e circa un metro di potenza. La caratteristica che distingue nettamente la roccia di questo filone da quella del filone accanto è la fortissima alterazione, che si accompagna quasi ovunque ad una brecciatura dovuta a movimenti tettonici evidenti in diverse superfici di scorrimento che attraversano il filone stesso. In conseguenza dell'alterazione e della brecciatura la roccia del filone si presenta all'affioramento con l'aspetto di un tufo, friabilissima in un terriccio sabbioso.

Sulla tondeggiante dorsale del Monte Villar-Monte Sole ho trovato circa una decina di affioramenti di filoni di porfiriti, per lo più anfiboliche come le precedentemente citate, dei quali solo uno fu segnalato da precedenti Autori, e precisamente da HAMMER. I vari affioramenti si trovano quasi tutti nella zona di cresta del costone, fra il Monte Villar, sulla cui cimetta si vedono affiorare due filoni (che forse sono collegati), ed il Monte Sole. Un filone si presenta alquanto discosto dalle regioni di cresta: esso si trova precisamente più in basso, presso la q. 2461 dell'Alpe Villar.

Tutti i diversi filoni di questa regione sono incassati nei paragneis sericitici ricchi di intercalazioni di quarziti e di ortogneis.

(¹) Cima Verdignana non « Vedrignana », come è segnato sulle tavolette dell'I. G. M.

DIORITI QUARZIFERE LUNGO LA « LINEA DELLE GIUDICARIE »
NEI DINTORNI DI MALÈ.

Come è noto a tutti i Geologi alpini, un grande interesse tettonico offre la cosiddetta « linea delle Giudicarie » o « limite alpino-dinarico », grande dislocazione che tocca solo la parte sud-orientale del gruppo Ortles-Cevedale e che divide i terreni cristallini a NO dai terreni sedimentari a SE. Appunto perchè è molto interessante, questa grande linea di dislocazione fu studiata in varie riprese da molti Autori, che qui non posso citare dato il carattere della presente nota ed essendo stata la mia esplorazione puramente occasionale, in quanto rientra nella regione del mio rilevamento.

Procedendo da SO a NE, scendendo lungo la Val di Sole, si incontra una prima zona di affioramento di dioriti lungo il solco scavato dal Torrente Rotiano, nella sua parte più bassa, proprio subito sopra al conoide di deiezione che il torrente ha costruito ad Ovest di Dimaro. La roccia eruttiva affiora perciò lungo una sottile striscia e non è possibile osservare alcun contatto, essendo la zona coperta da una potente coltre morenica incisa solo lungo il solco torrentizio. L'osservazione della diorite così in basso è dovuta allo SCHMIDEGG (bibl. 7). Più in alto fu osservata la roccia eruttiva sul versante orientale del Monte Spolverin da G. DAL PIAZ (bibl. 8).

Fra Dimaro e Terzolas la « linea delle Giudicarie » è coperta interamente dai depositi quaternari, alluvionali e morenici, del fondo valle.

Lungo il tratto intercorrente da Samoclevo alla Valle di Lavazè (Rumo) della linea di dislocazione, quasi interamente e facilmente esplorabile, furono scoperti vari lembi di tonalite da G. DAL PIAZ (bibl. 8) nel 1926. Alcuni di questi furono dimostrati in realtà collegati a formare una unica grande lama da SCHMIDEGG (bibl. 7), per la regione ad oriente del Monte Pin, fra la Valle Inferna e la Valle di Lavazè.

Le mie ricerche lungo la « linea delle Giudicarie » si arrestano, almeno per ora, al limite del foglio al 100 mila « Monte Cevedale » e perciò poco prima che detta linea raggiunga la Val di Bresimo.

In questa limitata regione da me percorsa G. DAL PIAZ (bibl. 8) trovò tre « nuclei tonalitici »: uno presso la Rocca di Samoclevo, uno nella valletta di Cassana ed il terzo sul fianco destro della Valle di S. Giacomo. In quest'ultimo posto le mie ricerche per trovare la roccia eruttiva riuscirono vane, amenochè l'affioramento citato da DAL PIAZ non sia quello di Trignana (si veda in seguito) che si trova però sulla dorsale di un costone montuoso.

Gli altri due affioramenti, che distano in linea d'aria poco meno di 800 metri, ho potuto osservare che sono collegati e che la diorite quarzi-

fera si estende invece ininterrottamente in una sottile fascia per una lunghezza di più di due chilometri.

Le mie ricerche furono condotte con estrema minuziosità, seguendo la roccia eruttiva, da occidente verso oriente, metro per metro, attraverso fitti boschi sul versante montuoso molto ripido, scoscesi valloncelli, dirupi svariati.

La lama di diorite quarzifera presenta uno spessore che varia da una quarantina di metri fino a soli 4-5 m., dimostrando che il maggiore spessore si osserva nella parte più occidentale della lama, mentre a NE della Rocca di Samoclevo il suo spessore diminuisce gradatamente finché scompare.

La diorite incomincia ad emergere dal mantello quaternario del fondo valle in un punto sopra la casa (detta la Maleda) che si trova fra Terzolas e Samoclevo, sopra la strada che collega questi due paesi. Il punto si trova a pochi metri dal solco di un torrentello che scende 500-600 m. ad Ovest di Samoclevo, sul suo fianco sinistro, ad un'altezza di circa 820 m.

Da questo punto l'affioramento della lama di diorite quarzifera si dirige quasi rettilineamente verso NE. Non citerò tutti i posti nei quali potei osservare la roccia eruttiva che, ripeto, seguì letteralmente metro per metro. Ricorderò solo che tale lama taglia le varie mulattiere che salgono per la ripida montagna ad Ovest di Samoclevo, passa esattamente sotto la Rocca, interseca la Valle Rocca a Nord della Rocca ad un'altezza di 960-970 m., sale sul versante montuoso sotto le case Mason, incrociando anche qui varie strade mulattiere ad altezze varianti fra i 1000 ed i 1050 m. Indi, ancora più a NE, si abbassa fino a tagliare il valloncetto percorso dal torrente che scende fra Trignana e Mason. Questo valloncetto è intersecato alla quota di 980 m. Da qui la lama dioritica sale decisamente, sempre più assottigliandosi, verso il gruppo dei masi Trignana, dove si può pure osservare sulla mulattiera, ad un'altezza di 1120 m., esattamente sul costone che scende da Trignana, poco sotto gli ultimi masi.

A Trignana la diorite costituisce ancora una lama di pochi metri e si presenta eccezionalmente milonitica ed alterata. Dal suo pessimo stato di conservazione e dal fatto che si trova esattamente sul costone montuoso che poi scende a NE verso la Val Baiarda (la Valle di S. Giacomo) si potrebbe arguire che questo punto fu quello osservato da G. DAL PLAZ («nucleo del fianco destro della Valle di S. Giacomo»).

Più oltre, verso NNE, ho seguito il limite fra i terreni scistoso-cristallini e quelli non metamorfici oltre la Valle Baiarda, fino al sommo del costone fra il Monte Parol ed il Monticello. Anche per quest'ultimo tratto della «linea delle Giudicarie» condussi le mie ricerche molto minuziosamente: non ho più riscontrato la presenza di rocce eruttive.

Dai masi Trignana la linea scende obliquamente lungo il versante montuoso fino al fondo della Val Baiarda. Nel solco di questa valle il limite passa a circa 1010 m. di altezza presso le case Ploner. Passa poi sopra le stesse case e, dopo aver attraversato un torrentello scendente da Nord, si alza bruscamente seguendo quasi esattamente la linea di massima pendenza, interseca varie mulattiere e raggiunge la sommità del costone fra il Monte Parol ed il Monticello in prossimità della q. 1604.

Solo per questo tratto fra Trignana ed il costone del Monte Parol ho potuto notare una divergenza abbastanza netta fra l'andamento della « linea delle Giudicarie » come si può osservare in realtà e quello che è segnato sulla carta geologica austriaca, rilevata da VACEK e da HAMMER (bibl. 9). Rispetto a quanto risulta segnato su detta carta, la linea passa alquanto più ad oriente in realtà.

Lungo tutta la parte precedentemente descritta della « linea delle Giudicarie », per circa 4 km. in linea d'aria, una sola placca relativamente considerevole di sedimenti quaternari copre la linea stessa per un breve tratto: la morena che costituisce la collina sulla quale sorge la Rocca di Samoclevo. Qui la diorite quarzifera, dal punto nel quale si presenta sulla bella mulattiera che sale da Sud verso la Rocca, scompare immergendosi sotto la coltre morenica in corrispondenza dei prati per un tratto di circa 100 m. in linea d'aria, per poi riaffiorare nella vallecola profonda a NE della Rocca, poco sopra la presa dell'acquedotto di Samoclevo.

Altrove, in altri diversi punti, la « linea delle Giudicarie » ed eventualmente la diorite ad essa associata, sono coperte per brevi tratti da piccole frane, da non vaste zone di detriti di falda e, talora, dal terreno vegetale del bosco stesso.

La posizione nello spazio della superficie di scivolamento con relativa lama di diorite quarzifera è quasi esattamente ed in generale NE con pendenza forte verso NO, sempre per il tratto da me dettagliatamente esplorato.

I terreni che vengono a contatto al di qua e al di là della linea, rispettivamente della lama di diorite, sono dati da rocce sedimentarie mesozoiche, e secondo DAL PIAZ anche cenozoiche, verso SE al letto; dalla massa di scisti cristallini verso NO al tetto. Gli scisti cristallini sono in prevalenza paragneis sericitici e micascisti feldispatici; in questa massa fondamentale di parascisti si trovano intercalate numerose lame di anfiboliti, specialmente nella Val Baiarda e lame di ortogneis aplitici muscovitici. In vari punti, come ad occidente di Samoclevo, sui fianchi destro e sinistro della Val Baiarda ed in altre zone, negli scisti cristallini si trovano lame di ortogneis esattamente al contatto, sì che essi si potrebbero scambiare, ad un esame superficiale, con rocce eruttive.

Quali sono le azioni esercitate dal magma sulle rocce incassanti? Le risposte che si possono dare a tale quesito, come si può comprendere

facilmente, rivestono particolare importanza. A tale scopo sto conducendo ricerche microscopiche particolari che saranno rese note appena sarà ultimato lo studio dei materiali raccolti lo scorso anno e recentissimamente.

Intense ed evidenti sono le trasformazioni subite dagli scisti cristallini; appaiono totalmente assenti, ad un primo esame su materiale di alcune località del quale posseggo ora le sezioni sottili, le azioni esercitate sopra le rocce sedimentarie calcareo-dolomitiche ed arenacee.

Gli scisti al contatto con la diorite quarzifera si presentano molto induriti, cotti, feldispatizzati ed epidotizzati: si devono considerare in massima parte come cornubianiti. Interessante è far notare che gli scisti cristallini presentano lievi azioni metamorfiche anche in qualche punto nel quale non affiora la diorite quarzifera, lungo la « linea delle Giudicarie », come, per esempio, a Nord ed a NE delle case Ploner.

Le rocce sedimentarie, invece, pare che non presentino alcuna azione metamorfica di contatto, almeno per le osservazioni condotte su poche sezioni sottili e macroscopicamente su molti campioni di varie località. Ma si può ben comprendere che se l'azione metamorfica di contatto si fosse esplicata, tenuto presente lo spessore della roccia eruttiva, che pur non essendo considerevole non è neppure trascurabile, essa dovrebbe essere facilmente identificabile anche all'osservazione macroscopica per ricristallizzazioni e formazioni di minerali tipici, ed essere inoltre spinta ad una certa distanza dalla linea di immediato contatto.

Invece in un punto, proprio là dove manca la diorite quarzifera, ho potuto individuare una mineralizzazione a pirite entro le rocce sedimentarie. Si tratta di una piccola zona del versante destro della Val Baiarda, sita a poca distanza dal fondo valle, a occidente delle case Ploner. La zona mineralizzata è ben visibile sulla mulattiera che sale verso i masi di Trignana, a poche decine di metri dal fondo valle. Essa si estende per pochi metri di spessore entro i calcari e per un tratto di qualche decima di metri.

Si tratta di mineralizzazioni originate da azioni tipicamente epitermali e teletermali, provocate da soluzioni a temperatura poco alta: il minerale portato è dato quasi esclusivamente da pirite ed all'affioramento costituisce poche lenticelle od amigdale aventi uno spessore massimo di circa due decimetri ed una estensione massima di 5-6 dm.

Attualmente il minerale solforato è quasi completamente trasformato in limonite, sicchè solo in pochi limitati punti esso è visibile con sicurezza. Assai alterati si presentano qui anche gli scisti cristallini che vengono a contatto con le rocce calcareo-dolomitiche o arenacee.

Infine faccio notare che lungo tutta la « linea delle Giudicarie » nella regione da me percorsa, risaltano con evidentissima intensità le azioni di milonitizzazione, di triturazione, di scivolamento, con frequenti e mul-

tiple superfici di taglio e conseguenti movimenti e deformazioni intergranulari ed intragranulari, sia negli scisti cristallini e nelle cornubianiti di contatto, sia nelle rocce sedimentarie calcareo-dolomitiche ed arenacee, sia infine nella diorite quarzifera, dove questa esiste.

PORFIRITI DI LOCALITÀ VARIE.

Di minore importanza, ma non trascurabile, sono alcuni filoni isolati non ancora segnalati e la definizione precisa dei tipi petrografici di alcuni gruppi di filoni già segnalati da precedenti Autori.

Fra i filoni di nuovo ritrovamento citerò alcuni sparsi in varie località della Val Venosta (versante meridionale), della Val Martello e della Val d'Ultimo. Un gruppo di filoni di porfiriti anfiboliche a grana minuta si trova poco sotto le case Erta (Steil) e Maso Arso a Sud del paese di Plaus in *Val Venosta*; si tratta di 4-5 filoni di non grande potenza. Diversi filoni nuovi ho potuto identificare in *Val Martello*, assieme a quelli già segnalati da HAMMER, sulla cresta fra la Cima Madriccio e la Cima di Solda e nelle regioni ad essa immediatamente circostanti.

Filoni di roccia porfirítica assai interessante rinvenni in una zona assai distante da tutti gli altri gruppi di filoni. Uno precisamente su di un costone boscoso a NE del Monte delle Betulle (Pircherberg), il quale è situato a sua volta a NE di S. Valpurga in *Val d'Ultimo*. Il filone si incontra salendo per la mulattiera che segue la cresta del costone, sopra le case Ortler, in direzione della cima di q. 2055 del Monte Mariol. Altro filone trovasi circa 500 m. a NO delle case Giglirn verso la Valle del Torrente Marcenel (Marschnell); si tratta di una roccia porfirica basica tendente alla lamprofirica. Dei vari grossi filoni da me rinvenuti a S. Maurizio, presso le case Bosco (Holz) e Al Maso (Am Holf) di S. Nicolò, sempre in Val d'Ultimo, ha dato descrizione MINGUZZI nel suo recente lavoro (bibl. 1).

Pure in zona assai eccentrica ho potuto trovare un filone di roccia porfirítica laminata, a grana finissima, petrograficamente assai interessante, di solo pochi decimetri di potenza, presso il Forte Strino nella Valle del Vermigliana (*Val di Sole*).

Di interesse petrografico e geologico non indifferente potrà riuscire la esatta definizione e classificazione delle porfiriti della *Valle di Solda*, fra le quali sono da ricordare le classiche suldeniti ed ortleriti, che affiorano nei costoni del Monte Marlet, del Monte delle Vacche e del Coston.

Infine, credo che risulterà interessante una roccia eruttiva a struttura porfirica che HAMMER, nella sua carta geologica, segnò semplicemente come diorite e che mi sembra invece una roccia mista, risultante da parziale digestione di rocce incassanti da parte di un magma dioritico: essa si trova nella prima parte della Valle di Silandro.

* * *

Chiudendo questa breve nota, voglio ricordare che lo studio di campagna ed il rilevamento geologico dell'intero gruppo Ortles-Cevedale non è stato ancora completato, come dissi nell'introduzione. Una regione non ancora studiata, ma che spero di percorrere prossimamente, è quella del gruppo Monte Confinale-Cime del Forno; in questo gruppo numerosi ed interessanti credo che siano i filoni di rocce eruttive. Intanto proseguono nell'Istituto di Mineralogia e Petrografia dell'Università di Bologna i lavori di laboratorio per lo studio del complesso di interessanti rocce.

BIBLIOGRAFIA

- [1] CARLO MINGUZZI, *Ricerche petrografiche sopra alcuni lamprofiri, porfiriti e dioriti della Val d'Ultimo (Alto Adige)*. « Studi Trentini di Scienze Naturali », annata XXI, 1940-XVIII, Trento.
- [2] LUIGI TOMASI, *Fassaite di Val di Solda e sua paragenesi*. « Studi Trentini di Scienze Naturali », annata XXI, 1940-XVIII, Trento.
- [3] W. HAMMER e G. B. TRENER, *Foglio Bormio und Passo del Tonale, Geologische spezialkarte der Oesterreichisch-Ungarischen Monarchie*. Vienna. 1908.
- [4] W. HAMMER, *Mitteilung über Studien in der Val Furva und Val Zebbrù bei Bormio (Vellin)*. « Verhandlungen der k. k. Geologischen Reichsanstalt », Wien, annata 1902.
- Id., *Geologische Aufnahme des Blattes Bormio-Tonale*. « Jahrbuch der k. k. Geologischen Reichsanstalt », Wien, vol. 55, 1905.
- Id., *Vorläufige Mitteilung über die Neuaufnahme der Ortlergruppe*. « Verhandl. k. k. Geol. Reichsanstalt », Wien, annata 1906.
- Id., *Die Ortlergruppe und der Ciavatlatschkamm*. « Jahrbuch der k. k. Geol. Reichsanstalt », Wien, vol. 58, 1908.
- [5] W. HAMMER, *Das Gebiet nördlich des Noce und des Torrente Vermigliana*. « Erläuterungen zur geologischen Karte », ecc. *Bormio und Passo del Tonale*, Wien, 1908.
- [6] G. STACHE, *Aus dem Ortler Gebiet*. « Verhandlungen der k. k. Geol. Reichsanstalt », Wien, annata 1876.
- Id., *Ueber die alten andesitischen Eruptivgesteine des Ortlergebietes*. « Verhandlungen der k. k. Geol. Reichsanstalt », Wien, annata 1876.
- [7] O. SCHMIDEGG, *Steilachsige Tektonik und Schlingensbau auf der Südseite der Tiroler Zentralalpen*. « Jahrbuch der Geol. Bundesanstalt », Wien, vol. 86, 1936.
- [8] G. DAL PIAZ, *Il confine alpino-dinarico dall'Adamello al massiccio del Monte Croce nell'Alto Adige*. « Atti dell'Accademia Scientifica Veneto-Trentino-Istria », vol. XVII (1926), Padova.
- [9] M. VACEK e W. HAMMER, *Foglio Cles, Geologische Spezialkarte der Oesterreichisch-Ungarischen Monarchie*, Vienna, 1903.

Paleontologia. — « *Migliorinia* », nuovo genere di *Echinide* dell'Eocene della Migiurtina ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di GIUSEPPE CHECCHIA-RISPOLI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Lo studio degli Echinidi eocenici raccolti nella Migiurtina, negli anni 1936-1939, dalla missione geologica organizzata dall'Azienda Generale Italiana Petroli (A. G. I. P.), ha portato a risultati importanti sia per il gran numero di specie, circa una trentina, che compongono quella fauna, che per la rarità ed il valore cronologico di alcune di esse: sono queste ultime che hanno permesso di stabilir i rapporti con faune eoceniche di altre regioni. Come sarà detto più estesamente, tra i caratteri più salienti di questa fauna va notata la grande abbondanza di *Echinolampas* e di *Brissoides* e la forte percentuale di nuove ed interessanti specie. Tutte queste forme però vanno riferite a generi conosciuti; fanno eccezione solamente alcuni echinidi, per i quali ho dovuto creare un nuovo genere, che ho distinto col nome di *Migliorinia*, in omaggio al prof. Carlo Migliorini, che diresse la missione.

Siccome la illustrazione delle specie raccolte nei vari terreni, circa un centinaio, siccome la pubblicazione non può avvenire da un momento all'altro, così dò conto, con la presente Nota, di questo nuovo singolare genere eocenico.

Tutti gli esemplari raccolti portano il numero 13450 Mt della collezione. Essi provengono dal calcare noduloso marnoso bianco della parte alta del « Carcar », a circa 7 metri sotto alla sommità della collina a sinistra della progressiva Km. 20 della pista Garoe-Geriban (Nogal, Somalia settentrionale). Lat. 8°15'0" N, Long. 48°32'30" E Grw. 21 aprile 1939-XVII.

* * *

Descrizione di « Migliorinia migiurtina », gen. et sp. nov. — Echinidi di piccole dimensioni, dal guscio moderatamente gonfio, a contorno leggermente ovale, un po' ristretto e alquanto sinuoso anteriormente, protratto

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto Geopaleontologico dell'Università di Roma.

⁽²⁾ Presentata nell'Adunanza del 22 novembre 1941-XX.

indietro, con la maggiore larghezza verso la metà della lunghezza. Faccia superiore un po' appiattita in alto con la maggiore altezza verso la metà dell'interambulacro posteriore. Faccia posteriore stretta ed obliquamente troncata. Faccia inferiore subpianeggiante e appena sporgente in corrispondenza del tallone del plastron. Bordo arrotondato.

Apparecchio apicale un po' eccentrico avanti, poco esteso, etmolise, con madreporite in principio molto stretta tra le genitali posteriori, al di là delle quali si slarga rapidissimamente e diventa sporgente. Pori genitali bene sviluppati e molto avvicinati.

Solco anteriore largo e poco profondo, limitato da due carene nodulose; verso il bordo esso si approfondisce un poco intaccandolo sensibilmente, indi si restringe prolungandosi ben distinto sino al peristoma. Area ambulacrale larga, granulosa, composta di placchette biporifere: i pori sono molto piccoli e situati in leggere depressioni, le quali sono spostate verso la sutura adorale.

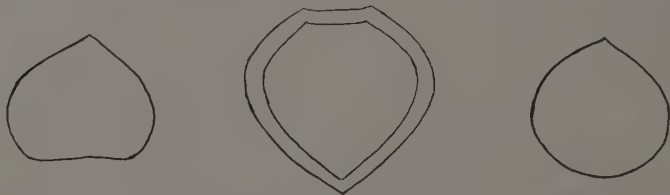


Fig. 1. - Peristoma.

Fig. 2. - Fasciola sottoaoale.
(Le figure sono ingrandite c. 3 volte).

Fig. 3. - Periprotto.

Petali pari uguali, larghi, di forma ovale, arrotondati e chiusi all'estremità, alloggiati in solchi ben delimitati, non molto profondi. I petali anteriori sono trasversi ed i posteriori abbastanza divergenti.

Zone porifere larghe, in parte situate sui fianchi dei solchi: quelle anteriori dei petali anteriori per oltre un terzo della loro lunghezza sono molto ristrette e ridotte a semplici coppie di pori, che diventano microscopici verso l'apice. Le coppie sono abbastanza distanti fra di loro e in ogni zona se ne contano una ventina, separate da costole arrotondate e granulose. I pori delle due serie sono subuguali, ovali, allungati internamente, molto appuntiti e coniugati da solchi poco profondi. Spazi interzonali più stretti di una zona porifera.

Peristoma poco eccentrico avanti, lontano dal bordo, situato alla base del solco anteriore, di forma subpentagonale, a lati più o meno curvi, sempre ottusamente appuntito in alto, privo di labbro sporgente; la placca che costituisce il labbro è corta ed è a contatto con le due sternali.

Periprotto superficiale, grande, circolare, un po' appuntito sopra e situato molto in alto della troncatura posteriore del guscio, al disopra

della linea dell'ambito e soprastante ad un'area triangolare poco estesa e ben accusata; esso è visibile tanto dalla faccia superiore che da quella posteriore ed è compreso tra la fasciola peripetala e quella sotto anale, essendo vicinissimo all'una ed all'altra, tanto da venire in qualche caso quasi a contatto con esse.

La fasciola peripetala è ben visibile e presenta delle strozzature; essa circonda molto da vicino i petali ed è un po' angolosa negli spazi interambulacrali posteriori; in linea retta attraversa l'interambulacro posteriore e l'ambulacro anteriore.

La fasciola sottoanale è più larga della peripetala, cordiforme e racchiude il piccolo scudo, rasentando quasi in alto il periprotto.

Le placche interambulacrali sulla faccia abactinale sono convesse nel mezzo, dimodochè con le loro sporgenze determinano delle carene, mentre lo spazio intermedio è più o meno depresso. Carene e depressioni sono più accentuate nei due interambulacri anteriori; verso l'ambito esse scompaiono del tutto.

Pochissimi tubercoli perforati, a scrobicolo poco profondo si osservano sulla faccia superiore lungo le pareti del solco; più piccoli e molto radi sono quelli che si trovano nei tre interambulacri posteriori.

Al disotto dell'ambito i tubercoli sono più sviluppati e più numerosi; sullo stretto plastron sono serati e nello spazio circoscritto dalla fasciola sottoanale sono disposti in serie radiali. I tubercoli di tutta la faccia inferiore sono impiantati su zoccoli obliqui.

Dimensioni: lunghezza mm. 33, 31, 25; larghezza mm. 29, 29, 22.5; altezza mm. 18, 18, 14.

* * *

Rapporti e differenze. — Ho esaminato quattro esemplari di questa specie, di cui quelli figurati si presentano in perfetto stato di conservazione. In tutti si ripetono i medesimi caratteri, cioè: petali pari larghi e piuttosto corti, uguali, a pori appuntiti internamente; apice quasi centrale; peristoma superficiale, pentagonale, privo affatto di labbro sporgente; periprotto sopramarginale, circolare, compreso fra la fasciola peripetala e quella sottoanale, che è nettamente cordiforme, ecc. Per la conformazione dei petali situati in solchi ben definiti, e non in semplici depressioni del guscio, questi echinidi sono da considerarsi indubbiamente dei veri *Brissidae* con rapporti più o meno vicini con vari generi di questa famiglia. Per la forma del peristoma pentagonale, privo affatto di labbro sporgente, essi ricordano quello di alcuni *Palaeostomidi* cretacei, dai quali però si distinguono per la presenza di una fasciola sottoanale completa e ben netta. Per questo carattere essi invece si avvicinano, tra i *Plesia-*

steridi, ai *Macropneustinae* e propriamente al genere *Macropneustes* Agassiz. Ma questo genere, oltre ad avere un peristoma trasverso con labbro sporgente, ha una forma massiccia; i petali pari stretti, lunghi e scavati; periprotto posteriore e distante tanto dalla fasciola peripetala che da quella sottoanale, che è di forma marcatamente biloba.

Nel 1874 il Pavay istituì il genere *Deakia* per alcuni echinidi del Terziario inferiore d'Ungheria, distinti da un guscio poco elevato, rostrato posteriormente, ad ambulacri pari profondamente scavati, stretti, di cui gli anteriori lievemente arcuati, ad apice eccentrico avanti, peristoma semilunare con labbro sporgente, periprotto situato al disotto del rostro posteriore, fasciola peripetala molto sinuosa e sottoanale biloba e lontana dall'ano; grossi tubercoli non limitati dalla fasciola peripetala. In seguito detto genere è stato dal Lambert considerato come un sottogenere di *Macropneustes* e da questo distinto per il guscio meno massiccio, per i petali più corti e tubercoli più contrastanti. A *Deakia* il Lambert riporta anche alcuni echinidi dell'Eocene dell'India descritti dallo Stoliczka ed alcuni dell'Eocene della Francia, già riferiti ad altri generi. Fra questi ultimi ve n'è uno, *D. minor* Agassiz (*Euspatangus*) ⁽¹⁾ che presenta alcuni caratteri comuni con gli esemplari somali, vale a dire la forma depressa del guscio, il labbro peristomale poco sporgente e la forma circolare del periprotto. Questa specie, che il Desor di già considerò un *Macropneustes*, ha però il guscio nella parte posteriore tagliato verticalmente, l'apice molto eccentrico avanti, i petali più stretti ed a pori ovali, il solco impari più stretto, il peristoma semicircolare, il periprotto lontano dalla fasciola sottoanale, che ha la forma di anello bilobo, come nei tipici *Macropneustes*, ed infine i tubercoli, racchiusi dalla fasciola peripetala, più numerosi e più contrastanti e sviluppati in tutti e cinque le aree interambulacrali ed anche al di là della fasciola che circonda i petali. Per tutti questi caratteri *E. minor* è molto differente da *Migliorinia* e pertanto nasce il dubbio che la specie dell'Agassiz possa essere una cosa ben diversa dei veri *Deakia*, i quali, ripeto, hanno i petali più lunghi, profondi, stretti ed incurvati, il peristoma nettamente semilunare con labbro molto sporgente, la fasciola sottoanale biloba, distante dal periprotto, che è marginale e situato al disotto del rostro posteriore; caratteri questi che non si riscontrano affatto negli esemplari migiurtini. I rapporti con altri echinidi sono maggiormente lontani, tanto che io credo si tratti realmente di un nuovo genere di *Brissidae*, che resta isolato per il momento, in quanto che esso presenta contemporaneamente i caratteri dei Palaeostomidi (peristoma pentagonale senza labbro sporgente) e quelli di

⁽¹⁾ COTTEAU, *Paléont. Franç. Échin. éocène*. Tome I, pag. 145, tav. 34 e 35, 1885-1889.

alcuni Plesiateridi (presenza di una fasciola sottoanale completa e ben delimitata).

I caratteri del genere *Migliorinia* si possono così stabilire: « Echinide di piccole dimensioni, dal guscio moderatamente gonfio, intaccato avanti e obliquamente troncato indietro; aeree interambulacrali formate di placche turgide. Apice subcentrale, etmoliso, con quattro pori genitali. Petali eterogenei, i pari piuttosto corti e larghi situati in solchi ben definiti, con zone interporifere strette e con pori appuntiti ed appena coniugati; l'impari situato in un solco largo e poco profondo con pori avvicinati. Peristoma poco eccentrico, lontano dal bordo, pentagonale, privo di labbro sporgente. Periprotto circolare, aprentesi molto in alto della faccia posteriore in modo da essere visibile anche dalla faccia superiore, strettamente compreso fra le due fasciole. Plastron stretto amfisterno; le due sternali sono uguali e a contatto col labbro.

« Tubercoli perforati: scrobicolati quelli racchiusi nello spazio circoscritto dalla fasciola peripetala ed impiantati sopra zoccoli obliqui quelli di tutta la faccia inferiore. Due fasciole: una peripetala, circoscrivente molto da vicino i petali ed una sottoanale cordiforme, entrambe molto avvicinate al periprotto ».

Genotipo: *Migliorinia migiurtina* Checchia-Rispoli, dell'Eocene della Migiurtina.



Fig. 1.

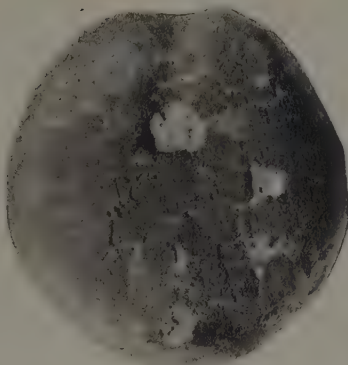


Fig. 3.

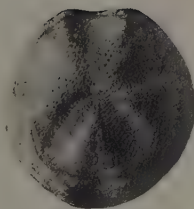


Fig. 2.



Fig. 4.

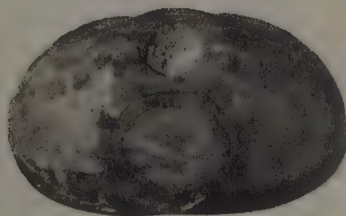


Fig. 5.



Fig. 8.



Fig. 6.

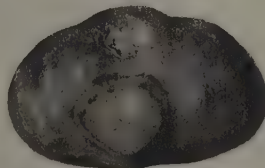


Fig. 7.

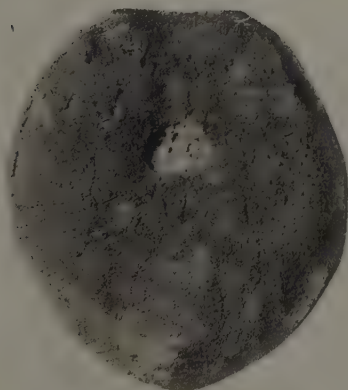


Fig. 9.

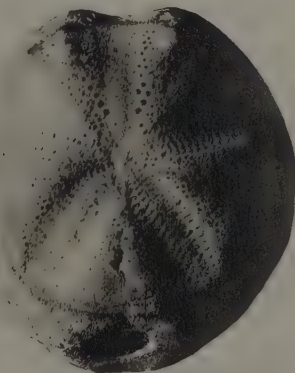


Fig. 10.

Mineralogia. — *Determinazioni sulla intensità di colorazione dei minerali opachi e delle leghe metalliche al microscopio a luce riflessa* ⁽¹⁾. Nota di FILIPPO FALINI, presentata ⁽²⁾ dall'Ecc. FEDERICO MILLOSEVICH.

Nel riconoscimento dei minerali metalliferi al microscopio per luce riflessa, uno dei più salienti caratteri diagnostici è il colore; anzi, nelle più diffuse tabelle di riconoscimento in uso, dovute a SCHNEIDERHÖHN e RAMDOHR [1] il colore di riflesso rappresenta, assieme alla durezza e alla eventuale anisotropia, la base della suddivisione tritomica dei minerali in tabelle. Ognuno dei nove gruppi ai quali si arriva in base alla durezza e all'anisotropia, è diviso in minerali bianchi, poco colorati, chiaramente colorati. Nello stabilire però queste caratteristiche entrano molto l'esperienza e la sensibilità fisiologica del ricercatore, e non infrequentemente anche a persone esperte capita di errare nella valutazione.

Si è perciò ritenuto utile sostituire alla valutazione soggettiva del colore dei minerali un mezzo di misura oggettivo al quale si possa ricorrere sia per la corretta interpretazione delle tabelle di riconoscimento, sia per avere delle grandezze numeriche che servano alla diagnosi precisa dei minerali e alla definizione dei termini delle miscele isomorfe ⁽³⁾.

La sensazione di colore che prova l'occhio umano osservando al microscopio una superficie lucidata di un mezzo riflettente è dovuta alla variazione del potere riflettente della superficie (rapporto tra il flusso luminoso riflesso e quello incidente) in funzione della lunghezza d'onda λ delle varie luci, della composizione spettrale della luce inviata sulla superficie e delle caratteristiche fisiologiche dell'occhio che osserva. In quello che segue non si terrà conto delle caratteristiche delle luci, in quanto la loro composizione si può ritenere abbastanza costante e prossima alla composizione della luce bianca solare.

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Miniere (Giacimenti Minerari) della R. Università di Roma e nell'Istituto di Geologia applicata e d'Arte mineraria della R. Università di Napoli.

⁽²⁾ Nell'Adunanza del 22 novembre 1941-XX.

⁽³⁾ Questo resoconto è il riassunto di una Memoria completa di prossima pubblicazione.

Se il potere riflettente della superficie è costante rispetto a λ inviando su di essa un fascio di luce « bianca » (la cui composizione spettrale sia cioè quella corrispondente all'emissione del « corpo nero » a 5200°K), ogni radiazione monocromatica viene egualmente attenuata, e il fascio riflesso è ancora « bianco ». Se invece il potere riflettente è variabile, e si ha cioè una *dispersione dei poteri riflettenti*, non tutte le radiazioni verranno egualmente attenuate; il fascio riflesso assume una composizione spettrale diversa da quella originaria, ed un occhio « normale » vede un colore che si avvicina più o meno a quello delle radiazioni monocromatiche

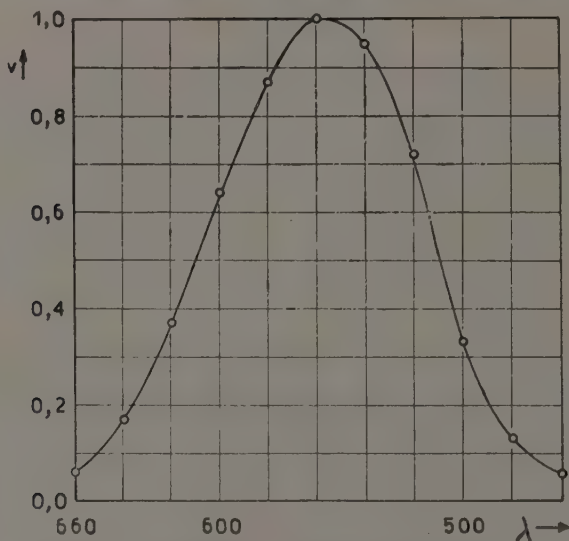


Fig. 1. — Andamento del fattore di visibilità v .

meno attenuate. Perciò il « colore di riflesso » dei minerali può essere sufficientemente definito indicando, per ognuno di essi, la variabilità del potere riflettente in funzione della lunghezza d'onda, nel campo della luce « visibile ». Per avere diagrammi direttamente confrontabili indipendentemente dai valori assoluti dei poteri riflettenti, converrà riportare, anziché i poteri riflettenti, i loro rapporti percentuali R ad uno qualsiasi, ad esempio quello corrispondente alla lunghezza d'onda di 5600 Å.

Nell'osservare i diagrammi di dispersione dei poteri riflettenti e nel valutare, sempre approssimativamente e per un occhio « normale », la più o meno intensa colorazione del minerale, occorre però tener conto della diversa sensibilità dell'occhio nelle varie regioni dello spettro. In figura 1 è riportato da BORDONI [2] l'andamento del coefficiente di visibi-

lità v delle varie luci relativo ad un occhio « medio normale » per le forti luminosità (quali capitano in genere al microscopio).

Se indichiamo con Rm il potere riflettente medio (inteso come media dei poteri riflettenti per le varie lunghezze d'onda), le differenze $\Delta R = R - Rm$ degli altri poteri riflettenti avranno importanza tanto minore quanto più la lunghezza d'onda a cui si riferiscono si allontana da quella di massima visibilità. Converrà pertanto dalle differenze ΔR passare a delle differenze caratteristiche $\Delta C = R \cdot v$. Occorre però che anche nel calcolare il potere riflettente medio Rm si tenga conto della visibilità facendo, anzichè una media semplice dei poteri riflettenti, una media ponderata, dove il « peso » di ogni potere riflettente sia dato dal coefficiente di visibilità della luce a cui si riferisce:

$$Rm = \frac{\sum R \cdot v}{\sum v}$$

Ad esempio nelle misure di dispersione eseguite su un campione di bornite proveniente da Kohlembach (Germania), si è avuto (tabella I):

TABELLA I.

Dispersione dei poteri riflettenti per la bornite di Kohlembach.

λ	6600	6400	6200	6000	5800	5600	5400	5200	5000	4800
v	0,06	0,17	0,38	0,63	0,87	1,00	0,95	0,72	0,33	0,13
R	134	138	124	108	100	100	92	92	89	89

La media ponderata dei poteri riflettenti sarà

$$Rm = \frac{134 \cdot 0,06 + 138 \cdot 0,17 + \dots + 89 \cdot 0,13}{0,06 + 0,17 + \dots + 0,13} = 102$$

cioè il potere riflettente medio è uguale ai $\frac{102}{100}$ del potere riflettente relativo alla lunghezza d'onda di 5600 Å.

In conseguenza le differenze $\Delta R = R - Rm$ saranno uguali a + 32; + 36; ...; - 13 e moltiplicandole per 0,06; 0,17; ...; 0,13 si avranno le differenze caratteristiche ΔC , cioè + 1,92; + 6,12; ...; - 1,69, come è riassunto nella tabella II.

Nell'ultima colonna sotto il simbolo R_c si sono riportati i numeri $100 + \Delta C$, che servono a costituire dei diagrammi analoghi a quelli di dispersione (fig. 2).

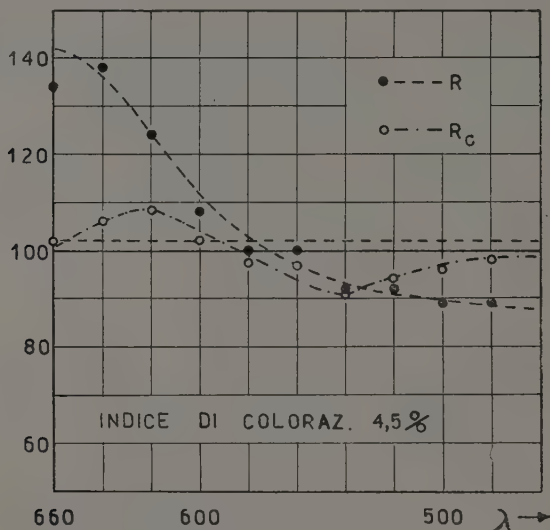


Fig. 2. - Bornite (Kohlembach). - Lucidatura ottima.

TABELLA II.

Differenze caratteristiche per la bornite di Kohlembach.

λ	ΔR	v	ΔC	R_c
6600	+ 32	0,06	+ 1,92	102
6400	+ 36	0,17	+ 6,12	106
6200	+ 22	0,38	+ 8,35	108
6000	+ 6	0,63	+ 4,03	104
5800	— 2	0,87	— 1,74	102
5600	— 2	1,00	— 2,00	98
5400	— 10	0,95	— 9,50	91
5200	— 10	0,72	— 7,20	93
5000	— 13	0,33	— 4,28	96
4800	— 13	0,13	— 1,69	98

Per lo scopo pratico della compilazione e consultazione di tabelle diagnostiche, conviene definire un *Indice di colorazione* I dato dal rapporto tra la somma dei valori assoluti delle differenze caratteristiche ΔC e la somma degli R_o , o, più semplicemente

$$I = \frac{\sum_1^n \text{mod } \Delta C^n}{n R_m}$$

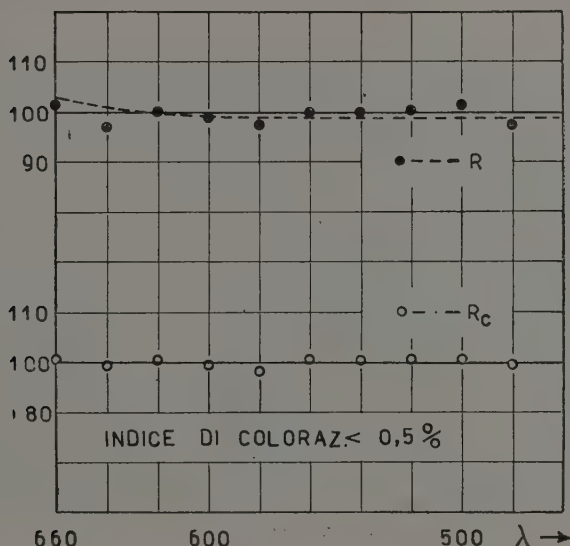


Fig. 3. - Arsenopirite nikelifera (Schladming) - lucidatura buona.

Nel caso sopra ricordato della bornite si ha

$$I = \frac{1,92 + 6,12 + \dots + 4,28 + 1,69}{10 \cdot 102} = 0,016.$$

Praticamente conviene esprimere l'indice di colorazione in per cento del $\sum R_o$ e si ha $I = 4,6 \%$.

Il significato fisico dell'indice di colorazione è ovvio, solo che si pensi che, nel rapporto che lo definisce, al denominatore figura una grandezza proporzionale al flusso totale luminoso riflesso, mentre al numeratore c'è una grandezza proporzionale alla parte di flusso che genera la sensazione di colore.

Nel definire detto indice si è ammesso implicitamente:

a) che la sensibilità dell'occhio umano alle anomalie della composizione spettrale della luce sia inversamente proporzionale alla intensità luminosa totale del fascio di luce (¹);

b) che i diagrammi di dispersione non presentino serie di massimi o di minimi sensibili.

Dall'esame dei valori che l'indice di colorazione assume per molti minerali (riportati nella memoria completa) e dal confronto con le tabelle attualmente usate, si può assumere la divisione seguente:

Minerali bianchi	$I < 1,5 \%$
Minerali poco colorati	$1,5 \% < I < 2,5 \%$
Minerali molto colorati	$2,5 \% < I$

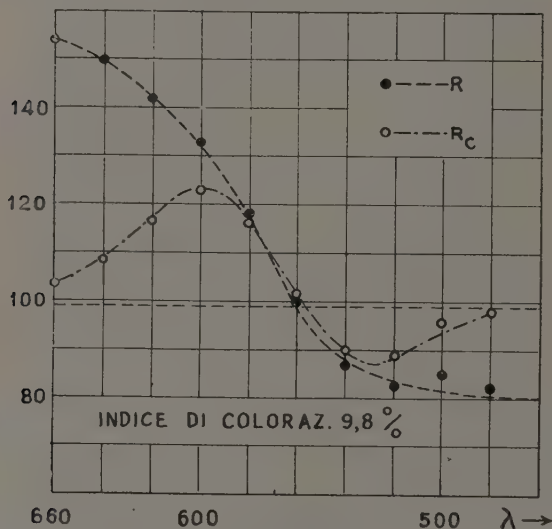


Fig. 4. - Rame nativo. - (Lago superiore - U. S. A.), lucidatura discreta.

A titolo di esempio si riportano i diagrammi relativi a campioni di arsenopirite (fig. 3) e di rame nativo (fig. 4), i cui indici di colorazione sono rispettivamente meno di 0,50 % e 9,8 %.

Come mezzo di misura si è adoperato il microfotometro a fenditura di Berek, accoppiato ad un monocromatore di forte capacità dispersiva,

(¹) Per spiegarci con un esempio, si ammette che l'impressione di colore che prova l'occhio osservando un miscuglio di luci gialla e bleu di luminosità rispettivamente 50 e 70 lux s. b. sia la stessa di quando dette luminosità sono 100 e 140 lux s. b. rispettivamente.

alimentato da lampade a filamento con reostato di regolazione (fig. 5) o da lampade ad arco ad elettrodi di Tungsteno (Punktlicht) per i minerali a più basso potere riflettente. Eseguendo un numero sufficiente di letture (generalmente bastano 4) in corrispondenza di ogni lunghezza d'onda, si arriva con facilità ad una approssimazione tale che l'errore medio nell'indice di colorazione risulta minore del 0,5 %. Si è notato che per avere buoni risultati è necessario che la lucidatura sia sempre molto fresca e che l'apertura del fascio di raggi sia molto stretta. Con il monocromatore usato (Leitz, modello 176) l'apertura più consigliabile è di 10

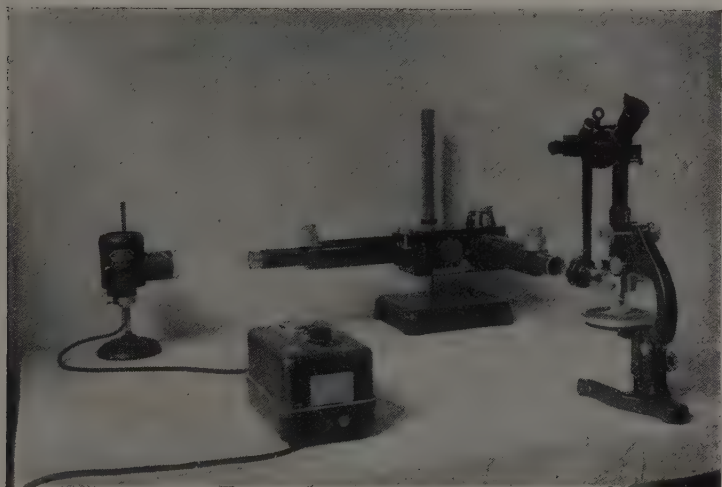


Fig. 5. - Apparecchiatura usata.

divisioni, tanto sulla fenditura di entrata che su quella di uscita del monocromatore.

Dall'esame dei diagrammi rilevati, per i quali si rimanda alla memoria completa, si vede che per i minerali isotropi e per parecchi degli anisotropi i diagrammi sono indipendenti dalla giacitura; per altri, sempre anisotropi, il diagramma di dispersione varia con la giacitura della superficie a cui si riferisce e sulla stessa giacitura è diverso per le due « direzioni principali di riflessione » (definite da BEREK [3] e determinabili mediante lo speciale apparecchio per la determinazione dell'anisotropia in luce riflessa).

Comunque per molti minerali colorati i diagrammi di dispersione sono caratteristici della specie ed anche nelle miscele isomorfe, quando il loro colore sia sensibile e variabile con la composizione, c'è una corrispondenza biunivoca tra composizione e diagrammi di dispersione. Lo stesso

si verifica per alcune leghe metalliche (è stato studiato qualche caso di leghe rame-zinco).

Si nota inoltre, tra i composti diversi di uno stesso metallo, una interessante analogia tra i relativi diagrammi di dispersione. Così, ad esempio, i diagrammi di dispersione riguardanti rame nativo, calcopirite, bornite hanno una certa « aria di famiglia », che si verifica d'altro lato tra quelli relativi alla calcosina, alla cuprite e alla covellina, essendo le caratteristiche di questo secondo gruppo molto diverse da quelle del primo. D'altronde l'influenza della freschezza o meno della lucidatura si ripercuote sensibilmente sull'andamento dei diagrammi di dispersione ed è presumibile che lo studio di questi possa portare un aiuto notevole nello studio dello stato e della natura delle superfici naturali (facce limiti di cristalli, piani di sfaldatura) ed artificiali dei cristalli.

LETTERATURA

- [1] SCHNEIDERHÖHN H., RAMDOHR P., *Lehrbuch der Erzmikroskopie*, voll. I, II e tabelle; Borntraeger, Berlino, 1931-1934.
 - [2] BORDONI U., *Lezioni di Fisica tecnica*. Zanichelli, Bologna, 1936.
 - [3] BEREK M., *Optische Messmethoden im polarisierten Auflicht* in « Fortschr. der Miner. Krist. u. Petr. », B. 22, T. 1, Berlino, 1937.
-

Zoologia. — *Sulla faunula a Foraminiferi della Laguna Veneta.* Nota di ALFREDO SILVESTRI, presentata ⁽¹⁾ da GUSTAVO BRUNELLI, Aggregato nella R. Accademia d'Italia.

Avendo avuto la possibilità di studiare i saggi di spiaggia e di fondo raccolti nella Laguna Veneta, negli anni 1934, 1935, 1937 e 1938, dal prof. GIORGIO SCHREIBER, allora assistente dell'Istituto di Zoologia e Anatomia comparata della R. Università di Padova, per gentile concessione del prof. UMBERTO D'ANCONA direttore dell'Istituto medesimo, ed incoraggiato ad interessarmi di tale studio dal prof. GUSTAVO BRUNELLI direttore del R. Laboratorio centrale di Idrobiologia di Roma, entrambi i quali assai ringrazio, nell'attesa mi sia concesso di pubblicarne in esteso i risultati, stimo possa riuscir utile farne oggi conoscere anticipatamente, ma in modo assai breve, le conclusioni.

I saggi, prelevati da punti diversi ed in varie epoche, erano nel complesso 98; numero per sè stesso rilevante, ma che risulta piccolo in relazione con la molto estesa superficie occupata dalla Laguna, per cui dette conclusioni sono da considerarsi come provvisorie, ossia subordinate all'esito di nuove ricerche.

Dai saggi medesimi ho ricavato, oltre ad avanzi di Molluschi, Briozoi, Spatanghi, Alghe, ecc., Foraminiferi in buon numero di campioni, in cui ho potuto, tra specie e varietà, distinguere 53 forme differenti: poche in confronto con le 269 (meglio accertate) di cui mi risulta la fauna a Foraminiferi delle coste adriatiche settentrionali occidentali. Ma eccone l'elenco in ordine tassonomico:

Spiroloculina nitida D'Orbigny, con le nuove varietà *dilatata*
e *chordata*

Spiroloculina Terquemiana Fornasini

(¹) Nell'Adunanza del 22 novembre 1941-XX.

- Adelosina laevigata* D'Orb.
Adelosina elegans (Williamson)
Adelosina pulchella D'Orb.
Adelosina bicornis (Walker e Jacob)
Adelosina dubia (D'Orb.), var. *angulosa* Wiesner e varietà
anguloso-striata Wiesn.
Triloculina Schreiberiana D'Orb.
Quinqueloculina agglutinans D'Orb.
Quinqueloculina lucida Karrer
Quinqueloculina squamosa (Terquem)
Quinqueloculina venusta Karrer
Quinqueloculina oblonga (Montagu)
Quinqueloculina lamellidens Reuss
Quinqueloculina sp.
Quinqueloculina oculus D'Orb.
Quinqueloculina Akneriana D'Orb.
Quinqueloculina seminulum (Linné)
Quinqueloculina vulgaris D'Orb.
Quinqueloculina ariminensis D'Orb.
Quinqueloculina striata D'Orb.
Quinqueloculina semicostata (Wiesner)
Quinqueloculina bicornis (Walker e Jacob)
Massilina disciformis (Will.)
Orbiculina compressa D'Orb.
Tholosina bulla (Brady)
Rhabdammina cornuta Brady
Reophax nodulosa Brady
Ammobaculites agglutinans (D'Orb.)
Testularia candeiana D'Orb.
Gaudryina pupoides D'Orb.
Trochammina nitida Brady
Trochammina inflata (Montagu)
Fronicularia inaequalis Costa
Polymorphina communis D'Orb.
Polymorphina problema D'Orb.
Polymorphina Soldanii D'Orb.
Polymorphina rotundata (Bornemann)
Operculina ammonoides (Gronovius)
Nonionina Boueana D'Orb.
Nonionina granosa D'Orb.
Polystomella striatopunctata (Fichtel e Moll)
Polystomella crispa (Linné)
Polystomella intermedia n. sp.

Rotalia inflata D'Orb.

Rotalia Beccarii (Linné)

Discorbina lacunae n. sp.

Pulvinulina repanda (Ficht. e Moll)

Pulvinulina lateralis (Terquem), var. *lacunae* n.

Pulvinulina adriatica Forn.

Evidentemente questo complesso costituisce una faunula a Miliolidi, a motivo dei rappresentanti numerosi di questa famiglia.

Delle forme elencate solo le 29 il cui nome è impresso in carattere spazieggiato, risultano, in confronto con quelle già note per l'Adriatico settentrionale occidentale, proprie della Laguna, ma di esse portano l'impronta dell'ambiente lagunare soltanto l'*Orbiculina compressa*, la *Tholosina bulla*, la *Rhabdammina cornuta*, la *Reophax nodulosa* e l'*Ammobaculites agglutinans*; le prime due delle quali sviluppatasi su Alghe.

Tra le MILIOLIDAE, che, come ho già detto, per la loro abbondanza imprimono una particolare caratteristica alla faunula, predominano le *Quinqueloculinae*; vengono poi la famiglia delle ROTALIDAE e l'altra delle NODOSARIDAE, seguite a distanza rilevante dalle rimanenti, che non comprendono se non poche forme ciascuna.

Rispetto al numero degli individui in ogni specie e varietà ed alla loro diffusione, ho osservato che queste sono da disporsi così, in ordine numerico decrescente di rappresentanti: *Rotalia inflata*, *Nonionina granosa*, *Rotalia Beccarii*, *Polystomella crispa*, *Massilina disciformis*, *Triloculina Schreiberiana* e *Quinqueloculina seminulum*. Ma volendo considerare separatamente le forme provenienti dai due diversi tipi di saggi esaminati, e cioè di spiaggia e di fondo, si ha nei primi, in ordine numerico decrescente d'esemplari, il predominio delle specie: *Rotalia Beccarii*, *Polystomella crispa*, *Massilina disciformis*, *Triloculina Schreiberiana* e *Quinqueloculina seminulum*; e nei secondi quello delle specie: *Nonionina granosa* e *Rotalia inflata*, ma non della *Trochammina inflata*; come avrebbe potuto supporre, dato il carattere da essa dimostrato altrove di forma d'estuario, d'acque salmastre e lagunari.

Le specie poi, in qualunque modo, meno diffuse e più scarsamente rappresentate, mi risultano queste: *Tholosina bulla*, *Textularia candiana*, *Fronicularia inaequalis*, *Operculina ammonoides* e *Discorbina lacunae*. La penultima poi mi è sembrata, pel suo particolare aspetto, di provenienza dubbia, nel senso che potrebbe esser stata trasportata accidentalmente nella Laguna.

Nella distribuzione in questa della faunula a Foraminiferi, ho notato una grande irregolarità e varie anomalie, come quella della *Trochammina inflata* presente in paraggi dove la salsedine è elevata. Irregolarità ed anomalie, che porrò poi meglio in evidenza mediante un apposito pro-

spetto. Qui mi limito a dichiarare come esse mi portino a supporre che nella Laguna Veneta, salvo qualche eccezione, si determini un'attiva e continua mescolanza di acque di salsedine diversa, tra una regione e l'altra, dovuta a cause molteplici, con fluitazione ora verso l'interno ed ora verso l'esterno di Foraminiferi, ma anche di altri organismi, con la tendenza a far assumere ad essi i caratteri delle specie marine viventi in acque dalla salsedine elevata. Ciò non toglie però che nei canali lagunari possano considerarsi quali specie caratteristiche, la *Nonionina granulosa* e la *Rotalia inflata*, e nelle spiagge, invece, la *Rotalia Beccarii* e la *Polystomella crispa*.

Biologia. — *Il parassitismo dei « Nycteribiidae (Dipt. Pup.) » come risulta da infestazioni sperimentali di varie specie di Chiroterri* ⁽¹⁾. Nota di ALBERTO STEFANELLI, presentata ⁽²⁾ dall'Accademico FILIPPO SILVESTRI.

Il problema della specificità dei Nictetibidi, Ditteri pupipari parassiti dei Chiroterri, non era da considerarsi risolto come appariva anche dalle più recenti pubblicazioni. Così l'opinione di FALCOZ (1926) ⁽³⁾ che non vi sia per questi Ditteri nessuna preferenza per la specie dell'ospite sembrerebbe comprovata dalle non rare catture di parassiti della stessa specie su Chiroterri di specie diversa, come risultano dalla letteratura precedente e seguente questo autore (KOLENATI (1867); SPEISER (1901); STILES e NOLAN (1931); GIL COLLADO (1932); SCOTT (1936); ecc.). In un recentissimo lavoro PAVAN ⁽⁴⁾ riteneva confermata questa mancanza di specificità basandosi su sue osservazioni e su quelle di BOLDORI (1927-1936) e GHIDINI (1934). Così CORRADETTI (1934) ⁽⁵⁾, in un lavoro sui Nictetibidi della Campagna romana, accetta senz'altro l'opinione di FALCOZ sulla assoluta indifferenza dell'ospite.

Ma osservazioni di altri zoologi hanno portato ad opinioni opposte. Così JEANNEL (1926) ⁽⁶⁾ ha osservato in venti sedi diverse della Francia come alcuni Nictetibidi, quali il *Nycteribia biarticulata*, siano caratteristici di Chiroterri che svernano nelle grotte isolati, e tra questi considera i Rinolofi, mentre il *Penicillidia dufouri*, il *P. conspicua* e il *Nyct. pedicularia* siano parassiti esclusivi di specie con abitudini gregarie, quali il *Myotis myotis* ed il *Miniopterus schreibersi*. Anche le osservazioni di

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata « Battista Grassi » della R. Università di Roma diretto dal prof. G. Cotronei.

⁽²⁾ Nell'Adunanza del 22 novembre 1941-XX.

⁽³⁾ FALCOZ L., 1926. *Faune de France. « Diptères pupipares »*. Lechevalier, Paris.

⁽⁴⁾ PAVAN M., 1941. *Appunti sui « Nycteribiidae (Dipt. Pup.) »*. « Riv. di Parass. », 5, pag. 101.

⁽⁵⁾ CORRADETTI A., 1934. *Sui « Nycteribiidae » della Campagna Romana*. « Riv. di Malar. », 13, pag. 331.

⁽⁶⁾ JEANNEL R., 1926. *Faune cavernicole de la France*. Lechevalier, Paris.

RUFFO (1938) ⁽¹⁾ sarebbero in appoggio a quelle di questo autore. Più interessanti e concrete sono le indagini di SCHULZ (1938) ⁽²⁾ fatte in natura e parte sperimentalmente. Questo autore, se da un lato porta dei contributi alla conclusione di una specificità del *Nycteribia pedicularia*, specie da lui presa in particolare considerazione, dall'altro porta dei dati discordi, e, seppure concluda il suo lavoro con la convinzione di una specificità, i suoi reperti non hanno un valore conclusivo al riguardo.

Considerando i dati della letteratura, anche di ricercatori che non hanno preso in esame particolare il problema, appaiono evidenti delle coincidenze nelle catture di certe specie in relazione all'ospite che fanno pensare ad un grado di specificità più o meno marcato. Per esempio, per quanto riguarda i Nictetibiidi della campagna romana, è sintomatico il fatto che CORRADETTI in un primo tempo non abbia segnalata la presenza del *Celeripes biarticulata* che ha invece recentemente trovato esaminando esemplari di *Rhinolophus ferrum-equinum* ⁽³⁾.

Queste differenti opinioni circa la specificità parassitaria dei Nictetibiidi va ricercata nella mancanza di osservazioni prolungate e metodiche fatte con un particolare criterio inerente al problema e probabilmente, poichè nessun autore ne parla, mentre andrebbe segnalato con la giusta evidenza, per il metodo di cattura non sufficientemente curato di alcuni. Nell'intraprendere queste ricerche ho adottato un metodo di lavoro che potesse dare degli elementi sicuri sulla cattura dei parassiti in rapporto al loro ospite. Ho catturato personalmente i Chiropteri e li ho individualmente rinchiusi al momento della cattura in sacchetti di carta forte così da eliminare ogni possibilità di passaggio accidentale dei parassiti da una forma all'altra prima dello studio del materiale in laboratorio.

Avendo avuta l'occasione di visitare una antica cava di pozzolana, da tempo abbandonata, nei pressi di Monte Sacro in Roma, che è risultata sede abituale di sei specie di Chiropteri e sette specie di Nictetibiidi, mi è sembrata questa la condizione più opportuna per lo studio metodico di questi parassiti. È risultata implicita per questa ricerca la necessità di una rigorosa classificazione degli ospiti e l'osservazione delle loro abitudini nella cava; così parte notevole del lavoro è stata dedicata alla sistematica ed alla ecologia di questi animali. Per quattro anni consecutivi (dal 1938) ho visitata la cava mensilmente e mi sono reso conto, tra le altre

⁽¹⁾ RUFFO S., 1938. *Studio della fauna cavernicola della regione Veronese*. « Boll. Ist. Entom. Agr. (Bologna) », 10, pag. 70.

⁽²⁾ SCHULZ H., 1938. *Ueber Fortpflanzung und Vorkommen von der Fledermausfliegen*. (Fam. « Nycteribiidae-Diptera pupipara »). « Z. Parasitkunde », 10, pag. 297.

⁽³⁾ CORRADETTI A. e LUPASCU G., 1941. *Studio sull'ipopigio maschile dei « Nycteribiidae »*. « Riv. di Parass. », 5, pag. 85.

osservazioni, come, pur avendo ogni specie di Chiroterri abitudini particolari di letargo e pur non avendo generalmente notata una promiscuità di specie (ritenuta possibile da altri autori) ⁽¹⁾, vi sia predilezione per la maggior parte di essi per determinati luoghi della cava, così da venirsi a trovare, sia durante il rifugio diurno che durante il letargo invernale, in relativa vicinanza tra loro. Ho potuto confermare come le varie specie abbiano predilezione per certi appigli a cui vanno ripetutamente ad attaccarsi e dove è facile trovarli anche a distanza di tempo, ma ciò non è assoluto e spesso ho trovate in tempi differenti specie diverse nello stesso luogo. Mi sono così reso conto che le possibilità di infestazione erano da considerarsi simili per tutte le specie abitanti la cava.

I risultati di questa ricerca fatta in natura saranno esposti in un lavoro in corso di preparazione a cui rimando il lettore per la discussione e la letteratura, ma già posso accennare alle conclusioni principali che furono quelle che mi spinsero ad eseguire le esperienze di cui è oggetto la presente nota.

Sono risultate abitatrici abituali della cava le seguenti specie di Chiroterri: *Rhinolophus ferrum-equinum* SCREBER; *Rh. euryale* BLASIUS; *Rh. hipposideros* BECHSTEIN; *Myotis myotis* BECHSTEIN; *M. capaccini* BONAPARTE; *Miniopterus schreibersi* NATTERER. Le sette specie di Nictetibiidi catturate sono le seguenti: *Penicillidia dufouri* WESTWOOD; *P. conspiciqua* SPEISER; *Celeripes biarticulata* SCHINER; *Listropodia schmidli* SCHINER; *L. pedicularia* LATREILLE; *L. blasii* KOLENATI; *Nycteribia vexata* WESTWOOD.

Oltre alle forme adulte sono stati trovati centinaia di pupari fissi sul tufo di *Penicillidia dufouri*, di *Celeripes biarticulata*, di *Listropodia pedicularia* e *Nycteribia vexata* e individui liberamente vaganti sulle pareti delle stesse forme ⁽²⁾.

Il risultato di questo lungo studio è riassunto nella tabella I.

Nella tabella non sono indicati i sessi poichè ho potuto osservare non esservi alcuna relazione tra i sessi e il parassitismo, concordemente a SCHULZ.

Appare chiaramente dalle cifre di questa tabella come le varie specie di Nictetibiidi siano tutt'altro che indifferenti nella scelta dell'ospite. La cattura delle diverse specie di Nictetibiidi risulta fatta in grandissima prevalenza o su determinate specie di Chiroterri o su specie molto affini zoologicamente nell'ambito del genere. Sono rarissime e quindi da ritenersi eccezionali le presenze su Chiroterri o di altra specie o di altro genere,

⁽¹⁾ Solo recentemente (20 dicembre) ho potuto notare un *Myotis capaccini* aggrappato in un unico grappolo con tre *Miniopterus schreibersi*.

⁽²⁾ In alcuni posti, preferiti dai Chiroterri, i pupari di queste diverse specie si osservano frammenti in spazi di pochi centimetri quadrati della parete.

secondo le specie di Nictetibidi. La specificità di questi parassiti è quindi più o meno ristretta secondo le specie. Non posso per ora pronunziarmi per quanto riguarda il *Penicillidia conspicua* e il *Listropodia blasii* per il numero troppo esiguo degli esemplari trovati, ma per le altre specie il risultato è ben chiaro.

TABELLA I.

Ospiti	Numero degli esemplari esaminati	Numero dei Nictetibidi catturati						
		<i>Penicillidia dufouri</i>	<i>Penicillidia conspicua</i>	<i>Celeripes biarticulata</i>	<i>Listropodia schmidli</i>	<i>Listropodia pedicularia</i>	<i>Listropodia blasii</i>	<i>Nyctetibia vexata</i>
<i>Rhinolophus ferrum-equinum</i>	102	—	—	128	4	—	—	1
<i>Rhinolophus euryale</i> . .	260	—	—	231	3	—	4	
<i>Rhinolophus hipposideros</i>	21	—	—	14	—	—	—	
<i>Myotis myotis</i>	64	42	2	—	1	39	—	35
<i>Myotis capaccini</i>	21	—	1	—	2	8		
<i>Miniopterus schreibersi</i> .	43	3	—	—	22	—	—	—

Risulta pertanto evidente la preferenza del *Penicillidia dufouri*, del *Listropodia pedicularia* e del *Nyctetibia vexata* per il *Myotis myotis*, sebbene il *Listropodia pedicularia* sembri meno legato a questa specie per le otto presenze sul *Myotis capaccini*. È da notare però l'affinità zoologica delle due specie di Vespertilionidi. Così appare l'assoluta preferenza del *Celeripes biarticulata* per il genere *Rhinolophus*. È interessante a questo riguardo tener presente l'estrema affinità zoologica delle tre specie di Rinolofidi abitanti la cava e la indifferenza del *Celeripes* per le tre forme, pur presentando un comportamento nella infestazione strettamente limitato al genere. Meno legato appare il *Listropodia schmidli* che, pur presentando una notevole preferenza per il *Miniopterus*, è stato trovato anche in altre specie, sebbene in numero limitatissimo.

Questo comportamento differenziale dei vari Nictetibidi, che in certi casi appare in modo assoluto, non risulta in rapporto alle abitudini gregarie o meno dei Chiroterri, come ha ritenuto JEANNEL (1926). Così ho trovato il *Celeripes* sulle tre specie di Rinolofidi di cui il *Rh. euryale* ha abitudini gregarie e passa il letargo in numerosissime colonie, mentre le altre due forme si trovano nella cava con individui isolati. Così il *Penicillidia*

dufourii, considerata forma tipica dei Chiroterri gregari, si trova ad infestare il *Myotis myotis* che nella cava non è mai in numerose colonie ma per lo più in piccoli gruppi di 2-4 individui. Tale preferenza risulta quindi legata unicamente alla specie dell'ospite; le presenze di alcune specie di Nictetibidi rivelano così, in certi casi in modo sorprendente (il *Celeripes* per i Rinolofidi), l'affinità sistematica dei Chiroterri.

Queste osservazioni, come saranno ampiamente documentate nel lavoro in preparazione, lasciano così chiaramente intravedere, come già avevano fatto sospettare alcuni reperti di altri autori, la specificità parassitaria dei Nictetibidi più o meno circoscritta secondo le specie, ma ho ritenuto necessario per una rigorosa verifica passare al controllo sperimentale. Così quella che poteva essere supposta una coincidenza sarebbe divenuta una certezza. È in base a questo principio che ho pensato di fare le infestazioni sperimentali che ora esporrò.

Con un gruppo di Chiroterri catturati nella predetta cava il 25 ottobre 1941 ho eseguito lo scambio dei Nictetibidi tra due o tre Chiroterri di specie diversa che poi venivano tenuti insieme in una gabbietta. Venivano quindi riesaminati dopo un periodo più o meno lungo, variato da parecchie ore nelle prime esperienze a qualche minuto nelle successive, per vedere se i parassiti tornavano sull'ospite primitivo o no.

Esperienza n. 1.

I scambio. Quattro *Celeripes biarticulata* sono tolti il 25-10-1941 alle ore 17 da un *Rh. ferrum-equinum* e messi su *Myotis myotis*, il giorno 26 alle ore 9 tutti e quattro i *Celeripes* sono nuovamente sul Rinolofo.

II scambio. Gli stessi parassiti sono riportati alle 9,05 sul *Myotis*; alle ore 15,30 sono nuovamente sull'ospite primitivo.

Esperienza n. 2.

Giorno 26-10-1941, ore 19. Un *Penicillidia dufouri* è portata da un *Myotis myotis* su *Rh. ferrum-equinum* e 4 *Celeripes* dal Rinolofo sul *Myotis*. Alle ore 10 del giorno appresso il *Penicillidia* era nuovamente sul *Myotis* e tre *Celeripes* sul Rinolofo. Un *Celeripes* era ancora sul *Myotis*.

Esperienza n. 3.

Giorno 25-10-1941, ore 19,20. Sono messi nella stessa gabbia un *Rhinolophus ferrum-equinum*, un *Myotis myotis* ed un *Miniopterus* dopo aver fatto i seguenti scambi: 1 *Celeripes* da *Rhinolophus* su *Myotis*, 1 *Celeripes* da *Rhinolophus* su *Miniopterus*, 1 *Penicillidia* da *Myotis* su *Rhinolophus*, 1 *Listr. pedicularia* da *Miniopterus* su *Rhinolophus*. Il giorno 26 alle ore 10,1 la situazione era la seguente: 2 *Celeripes* su *Rhinolophus*, 1 *Penicillidia* su *Myotis*, 1 *Listropodia* su *Myotis*.

Esperienza n. 4.

I scambio. Giorno 26-10-1941, ore 11. Due *Celeripes* sono trasportati da *Rhinolophus* su *Miniopterus*; alle ore 17 i due parassiti sono tornati sull'ospite originario.

II scambio. Riportati immediatamente sul *Miniopterus* dopo soli 52 minuti (ore 17,52) sono nuovamente sul Rinolofo.

Esperienza n. 5.

Giorno 26-10-1941, ore 11,10. Due *Penicillidia dufouri* da un *Myotis myotis* sono portate su *Rh. ferrum-equinum*, un *Penicillidia dufouri* trovato su *Miniopterus* è portato sullo stesso ferro di cavallo. Alle ore 15,30 le tre *Penicillidia* sono sul *Myotis*.

Esperienza n. 6.

I scambio. Giorno 27-10-1941, ore 16. Due *Celeripes* sono portati da un *Rh. ferrum-equinum* su *Myotis* e due *Penicillidia* da *Myotis* sul ferro di cavallo. Il giorno 28 alle ore 9 i parassiti si trovano sugli ospiti primitivi.

II scambio. Riportati alle ore 9,05 come nel primo scambio, alle ore 12 i parassiti sono nuovamente sugli ospiti primitivi.

Esperienza n. 7.

Giorno 27-10-1941, ore 16,20. Un *Penicillidia dufouri* è spostato da *Myotis myotis* su *Rh. ferrum-equinum* e tre *Celeripes* sono spostati in modo inverso. Il giorno appresso alle ore 9,10 i *Nicteribidi* sono sugli ospiti primitivi.

Il giorno 6-11-1941 ho potuto catturare altri *Rhinolophus ferrum-equinum* e *Myotis myotis* e così ho potuto eseguire un nuovo gruppo di esperienze con il preciso intendimento, dato l'esito favorevole di quelle del primo gruppo, di osservare più attentamente gli spostamenti dei *Nicteribidi* da una specie all'altra e di fare quanti più scambi possibile, dato che nelle prime esperienze si sono anche verificati degli spostamenti in un tempo piuttosto breve. Per un miglior controllo mi sono limitato a sperimentare con *Nicteribidi* di una sola specie per esperienza.

Esperienza n. 8.

I scambio. Giorno 6-11-1941, ore 19. Un *Penicillidia dufouri* è spostato da *Myotis* su *Rhinolophus*. Il giorno appresso alle ore 10,20 il parassita è nuovamente sul *Myotis*.

II scambio. Giorno 7-11-1941, ore 10,20. Il *Penicillidia* è rimesso sul ferro di cavallo ed è ritrovato sul *Myotis* alle ore 15,05.

III scambio. Alle ore 15,05 il parassita è rimesso sul Rinolofo e gli animali vengono osservati attentamente. Al primo loro contatto, dopo soli 25 minuti, il parassita cambia ospite (ore 15,30).

IV scambio. Alle ore 15,30 dello stesso giorno il *Penicillidia* vien rimesso sul Rinolofo e alle ore 16,55 è ritrovato sul *Myotis*.

V scambio. Rimesso immediatamente il parassita sul Rinolofo alle 17,20 il *Penicillidia* è nuovamente sul *Myotis*.

VI scambio. Rimesso ancora immediatamente sul Rinolofo e provocato un contatto tra i due Chiroterri il *Penicillidia* passa immediatamente sul *Myotis* (ore 17,28).

VII scambio. Il parassita rimesso nuovamente sul Rinolofo (ore 17,30) è ritrovato il giorno appresso alle ore 8,30 sul *Myotis*.

VIII scambio. Per verificare un'altra condizione ho rimesso il *Penicillidia* su un altro Rinolofo ospite (ore 8,45 dell'8-11-1941). L'esperienza viene seguita; alle 9,12 avviene il passaggio sul *Myotis*.

IX scambio. Ricambiato l'ospite dopo soli sei minuti il parassita è sul *Myotis*.

X scambio. Ancora rimesso alle ore 9,20 il *Penicillidia* sul Rinolofo alle 10 è ritrovato sul *Myotis*.

Questa esperienza mi indicava ormai con estrema evidenza la preferenza assoluta del *Penicillidia dufouri* per il *Myotis myotis* rispetto al *Rh. ferrum-equinum*, così da abbandonare questa specie non appena si verificava la possibilità di passaggio.

Esperienza n. 9.

In questa esperienza ho eseguita una serie di scambi tra *Rhinolophus ferrum-equinum* e *Myotis myotis* con *Celeripes biarticulata*, che dalle precedenti osservazioni risultava infestare esclusivamente i Rinolofidi.

I scambio. Il giorno 8-11-1941 alle ore 10 vengono messi due *Celeripes* su *Myotis* tolti da un ferro di cavallo e lasciati i due Chiroterri nella stessa gabbia. Alle 10,50 i due Ditteri sono nuovamente sul Rinolofo.

II scambio. I parassiti vengono rimessi alle ore 11 sul *Myotis*; alle 16,30 vengono ritrovati sul Rinolofo.

III scambio. Spostati immediatamente i *Celeripes* sul *Myotis* alle 16,40, al primo contatto tra i due Chiroterri, un primo *Celeripes* passa sull'ospite primitivo e due minuti dopo anche l'altro parassita passa sul Rinolofo.

IV scambio. Alle ore 16,50 i *Celeripes* vengono messi nuovamente sul *Myotis* e alle 16,55, al primo contatto tra i due Chiroterri, passano celermente ambedue sul Rinolofo.

V scambio. Rimessi subito i *Celeripes* sul *Myotis* dopo solo un minuto ripassano sul Rinolofo.

Anche da questa esperienza risulta evidentissima la preferenza del *Celeripes biarticulata* per il *Rh. ferrum-equinum* rispetto al *Myotis*. Il passaggio sulla specie preferita avviene assai celermente appena se ne presenta l'occasione materiale.

Le esperienze con il *Listropodia pedicularia* sono troppo scarse per essere dimostrative, sebbene, anche collegando questi dati con le osservazioni fatte da SCHULZ (1938), si lasci intravedere una preferenza per il genere *Myotis*. Purtroppo la difficoltà di avere contemporaneamente molte specie di Nictieribidi e di Chiroterteri mi ha impedito di completare per ora le esperienze e portare così per tutte le specie abitanti la cava una conferma sperimentale alle osservazioni fatte in natura.

Altre esperienze sono state condotte per verificare un altro lato del problema. Dalle osservazioni fatte in natura mi risultava che il grado di specificità doveva essere diverso per le varie specie di Nictieribidi. Esso sembra variare dalla condizione di preferenza per una specie o specie affini, ma con possibilità di esistenza anche su altre forme, ad una condizione di specificità molto più ristretta per specie nell'ambito del genere o esclusivamente per specie determinate. Con altri esemplari delle stesse specie usate nelle esperienze ora riportate ho spinto oltre le osservazioni per cercare appunto di valutare il grado di tale specificità, se si trattasse cioè solo di preferenza o se si trattasse di specificità assoluta per una specie o specie zoologicamente assai vicine. Praticamente ho cercato di constatare se vi fossero possibilità di esistenza di questi parassiti anche sulle specie che dalle osservazioni in natura e dagli esperimenti si erano dimostrate *non preferite*. Mi sono innanzi tutto reso conto come sia i *Celeripes* come i *Penicillidia* e i *Listropodia*, messi a contatto anche di un ospite non preferito cercassero egualmente di incunearsi tra i peli, benchè non con la stessa libertà di movimenti che sulla specie preferita e forse questo a causa della struttura differente del pelame. Ma si nutrivano su questi ospiti i parassiti? Allo scopo di risolvere il quesito ho messo dei *Celeripes* su *Myotis* e dei *Penicillidia* su *Rhinolophus* tenendo poi isolati i Chiroterteri tra loro. Alcuni Nictieribidi delle stesse specie li ho tenuti isolati in capsule di vetro, in opportune condizioni di umidità e temperatura, per il controllo della loro possibilità di esistenza a digiuno.

Queste esperienze non sono però per ora riuscite come desideravo perchè sia i *Myotis* che i Rinolofi non sono sopravvissuti in cattività più di tre-quattro giorni mentre i parassiti tenuti in camera umida hanno dimostrato una vitalità maggiore (4 giorni e mezzo per i *Celeripes* e sei giorni per i *Penicillidia*). Così non è stato possibile stabilire se sopravvivono a digiuno o no. Spero di poter in seguito chiarire questo punto con Chiroterteri più resistenti alla cattività o facendo sopravvivere di più, con speciali accorgimenti, le specie studiate. Ricordo come SCHULZ (1938) abbia notata la morte del *Nycteribia pedicularia*, messo sperimenta-

mente su *Plecotus auritus*, dopo 5-6 giorni, mentre la specie ha potuto essere allevata su *Myotis daubentonii*. Ciò lascia supporre che il comportamento debba essere specifico per i vari Nictieribidi in relazione con i vari Chiroterri, per il quale l'affinità zoologica deve avere notevolissima importanza.

Con un gruppo di altre esperienze ho potuto invece risolvere un'altra questione in relazione alla ecologia di questi Ditteri pupipari. JEANNEL (1902) aveva osservati alcuni Chiroterri (di cui non dice il nome) morti da un pezzo e completamente mummificati, in una grotta di Francia, invasi da molti *Penicillidia dufouri*. Questo autore, basandosi sulla opinione di FALCOZ che questi ditteri non potessero provenire dagli stessi Chiroterri quando erano vivi, concluse che questi Nictieribidi dovevano aver raggiunto successivamente i cadaveri dove si erano adattati a vivere nutrendosi dei cadaveri stessi, invocando particolari condizioni di temperatura ed umidità per questa che egli definisce una anomalia biologica. Orbene, le mie esperienze fatte lasciando i parassiti sui cadaveri sia di specie preferita che non preferita, dimostrano che essi non sopravvivono più di quelli tenuti a digiuno in una capsula di vetro. Il cadavere non veniva però abbandonato e i Ditteri venivano generalmente trovati morti nel pelame. Una esperienza interessante e che chiarisce l'osservazione di JEANNEL, mostra come i Nictieribidi vengano attratti anche da Chiroterri morti da tempo, come pure da pezzi di pelliccia e ciò indipendentemente dalla specie, in un primo tempo, per poi passare su un Chiroterro vivo specifico appena se ne presenti l'occasione. L'insediamento di Nictieribidi su cadaveri di Pipistrelli è possibile tenendo conto, come ho potuto osservare anche io stesso, che le immagini appena sgusciate possono sopravvivere a digiuno sino a 9-10 giorni in attesa di un ospite da parassitare. Ciò dimostra altresì che non è solo ad un anemotropismo che rispondono i Nictieribidi, secondo le esperienze di SCHULZ, ma anche ad altri stimoli.

Dai dati riportati in questa nota tenendo conto delle infestazioni di Chiroterri coabitanti una stessa cava e dai dati delle infestazioni sperimentali, si possono ricavare le conclusioni che seguono:

1° Per ogni specie di Nictieribidi da me presa in esame è risultata una netta preferenza o per una determinata specie di Chiroterri, rispetto alle altre considerate, o per specie zoologicamente vicine.

2° Tali preferenze risultano come segue: *Penicillidia dufouri* per il *Myotis myotis*; *Nycteribia vexata* per il *Myotis myotis*; *Listropodia schmidli* per il *Miniopterus schreibersi*; *Listropodia pedicularia* per il *Myotis myotis* e il *Myotis capaccini*; *Celeripes biarticulata* per le tre forme del genere *Rhinolophus*. Queste preferenze risultano indipendenti dalle abitudini gregarie o meno degli ospiti.

3° Ho potuto constatare come qualsiasi Chiroterro, sia vivo che morto, eserciti una attrazione su qualsiasi specie di Nicteribide, ma l'insediamento di una specie su un ospite non preferito è da ritenersi accidentale e temporaneo, poichè l'esperienza dimostra che essi lo abbandonano non appena si presenti l'occasione di infestare la specie preferita.

4° Risulta inoltre che non vi è possibilità per i Nicteribidi di nutrirsi di cadaveri di Chiroterri e viene così destituita di ogni fondamento una ipotesi espressa in questo senso (JEANNEL).

5° Non risulta alcun rapporto tra il sesso dell'ospite e il sesso dei Nicteribidi considerati nella infestazione.

COMUNICAZIONI

Le malattie da virus delle piante.

Comunicazione (1) di LEONELLO PETRI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Volendo intrattenerci un poco delle malattie da virus delle piante conviene prima di tutto vedere quante sono le specie approssimativamente che oggi consideriamo attaccate da queste malattie.

Lo SMITH, che ha scritto nel 1937 un trattato in cui molto minuziosamente descrive tutti i casi sino ad ora conosciuti di virosi delle piante, ne enumera 320, contando in questo numero tutti quei casi nei quali un virus di una data pianta ne infetta delle altre di specie diverse. Così ad esempio il virus 1 della *Beta* attacca 9 crociferae, 2 violaceae, 6 chenopodiaceae, 1 geraniaceae, 1 tropaeolaceae, 9 cucurbitaceae, 3 polygoniaceae, 1 malvaceae, 3 caryophyllaceae, 17 leguminosae, 6 umbellifereae, 1 dipsacaceae, 1 amaranthaceae, 1 nyctaginaceae, 4 compositae, 5 solanaceae, 1 linaceae, 1 borraginaceae, 1 valerianaceae.

In tutto sono 72 specie diverse che sono colpite dallo stesso virus. Anche il virus 1 del *Cucumeris* attacca 100 specie di piante di famiglie diverse. Il virus 1 della *Nicotiana* attacca 36 specie diverse. E così quasi tutti i virus colpiscono tanto specie vicine che di famiglie anche sistematicamente molto distanti.

Le piante di patata soltanto hanno da 1 a 18 virus diversi e di questi possono infettare una sola pianta anche 3 diversi virus.

Molti di questi agenti patogeni sono trasmessi alle piante sane per mezzo d'insetti. Da pochi emitteri-eteropteri, come Capside, Tingidae, da Tisanotteri, da Psyllidi, da Aleyrodidae, da Dolphacidae, da Yasiidae (cicaline).

Pochi da Arachidi, come l'*Eriophyes ribis* (West.) Nal.

Molti virus sono trasmessi da afidi: *Amphorophora rubicola* Oestl., *Anuraphis Padi* L., *Aphis gossypii* Glover, *Aphis ramni* Boyer, *Aphis rumicis* L., *Myzus persicae* Sulz.

(1) Letta nell'Adunanza del 19 dicembre 1941-XX.

Vi sono dei virus che non sono inoculati nelle piante sane da alcun organismo animale o vegetale o che per lo meno non sono stati trovati organismi vettori. Così per esempio il virus dell'arricciamento della vite.

Come si riconoscono queste malattie da altre causate da parassiti animali o vegetali o da cose inorganiche? In generale non basta il semplice esame degli organi colpiti. Per lo più si deve dimostrare che l'altezzazione presa in considerazione si attacca all'organo corrispondente di una pianta sana della stessa specie o varietà per inoculazione di succo della pianta ammalata o per innesto sia di marze sane sul soggetto ammalato o di marze ammalate su soggetto sano. Il percorso del succo infetto avviene tanto in senso discendente che in senso ascendente. Alle volte occorre un intero anno prima di poter affermare che una malattia è prodotta da un vero e proprio virus. Occorrono più anni se si deve poi dimostrare se il virus è veramente nuovo, se ha un vettore di trasmissione e quale e tutte le prerogative che è possibile di trovare di questo agente patogeno.

Le malattie da virus sono sparse da per tutto, anche se c'è diversità di ospiti e di gravità fra le virosi del nord e del sud in uno piuttosto che nell'altro emisfero. Il virus del mosaico del Tabacco sembra essere esteso a tutte le parti del mondo, specialmente sul pomodoro.

A poco a poco le differenze che esistevano fra l'Europa e l'America vanno scomparendo e permangono solo quelle dovute a particolari ospiti.

Le malattie da virus hanno una grande importanza economica perchè in qualche luogo importanti colture vanno soggette a progressivo deterioramento e finiscono per non rendere quasi più nulla. Le famose malattie cosiddette di « degenerazione » delle patate sono prodotte da malattie da virus. Così il pesco negli Stati Uniti d'America è colpito dal virus 1 del *Prunus*, che produce in questa pianta, di cui attacca le radici, la *Phony disease*, per la quale i rami di tutta la pianta diventano più corti e fronzuti del normale, mentre la fruttificazione si fa sempre più piccola e a poco a poco diventa inservibile. Mentre di autunno le piante sane perdono le foglie, quelle ammalate di *Phony* restano fronzute. La vite americana da noi è fortemente colpita dall'arricciamento, mentre in America ne è immune. Per questa malattia restano brevi i tralci con internodi molto ravvicinati e foglie più piccole con dentellatura molto pronunciata. D'altra parte, sia innestate con nostrale, sia franche di piede, le viti colpite dall'arricciamento finiscono col perdere la vitalità dei tralci superiori e riducono sempre più la scarsa vegetazione di polloni basali e finiscono per morire in tutta la loro lunghezza. La malattia si trasmette mediante i tralci stessi che sul principio sono belli e ben sviluppati, ma ben presto mostrano i loro gravi difetti non appena il nuovo vitigno è in sviluppo. È malattia incurabile, come incurabili sono tutte le malattie

da virus e sino ad ora non si conosce alcun trattamento atto a ridurre il deperimento.

L'unico rimedio è quello di distruggere tutte le viti infette e di scegliere con grandi cure le viti sane che devono servire ai nuovi impianti. Una guida sicura per questa scelta è la ricerca nei vasi del legno dei cordoni endocellulari che per la vite rappresentano un carattere sintomatico dell'arricciamento.

Per le virosi delle patate che si devono rinnovare ogni anno mediante tuberi da semina, si cerca di produrre centri di patate da semina liberi da virus, facendo ricerca di tuberi sani, facendone germogliare una parte e constatare così se sieno o non sani.

Un'inoculazione su ospiti differenziali, su tabacco o *Datura*, è necessaria perchè vi sono dei virus che sono irriconoscibili sui rigetti dei tuberi che apparentemente risultano sani. Questi campi di tuberi liberi da virus sono preparati in alta montagna o presso boschi o vicino al litorale, nei luoghi dove sia ostacolato o manchi lo sviluppo di vettori dei virus. Anche le coltivazioni di *Brassica* bisogna evitare perchè le *Brassica* ospitano sempre degli Afidi.

Inoltre, come SCHULTZ ha dimostrato recentemente, nelle località per patate da semina bisogna tener presente che l'insetto vettore del virus varia da una località all'altra e da stagione a stagione nella stessa località.

Le piante attaccate da un virus raramente muoiono per questo agente di malattia; sono spesso attaccate da funghi e da batteri, spesso da cocchi.

Geneticamente può avvenire la segregazione del tipo resistente a una o più virosi di mosaico e si può ritenere che si possa arrivare a produrre varietà resistenti a un virus; ma per ora non si hanno risultati tali da valersene nella pratica. Un caso che avrebbe un valore pratico è quello che ci pervenne da Giava qualche tempo fa e che consisteva nella vaccinazione di tuberi di patata contro un determinato virus, mediante l'inoculazione di un altro virus dello stesso gruppo, ma più debole. L'effetto benefico di questa vaccinazione è trasmissibile per via vegetativa e può diventare praticamente utile in regioni dove predomini un determinato virus. Disgraziatamente la guerra, diventata ora mondiale, ha interrotto ogni utile nostra corrispondenza con quei paesi e quindi lo studio di un simile problema è rimesso a tempi migliori. Le piante legnose, ad alto fusto, sembra che sieno più raramente colpite da virus.

IWANOSKY osservò già che alcune piante si possono ammalare di mosaico per mezzo del terreno, possibilità che KLEBAHN (1926) ha potuto verificare per le piante di *Anemone nemorosa*. Per la vite (arricciamento) e per la *Phomy disease* del pesco la cosa è stata sicuramente dimostrata.

Per poter rispondere con una certa cognizione di causa alla domanda che cosa è un virus, bisogna che io esponga il più rapidamente che sia possibile le ricerche che in questi ultimi anni sono state fatte su diverse proprietà fisiologiche dei virus.

Un virus essendo, come è noto, invisibile, può essere riconosciuto solo a causa dell'effetto visibile da esso prodotto. Di questo il più caratteristico ed ovvio è la capacità di produrre cambiamenti nell'apparenza della pianta. Questa però non è una proprietà universale. Vi sono alcune piante che possono essere infettate da un virus senza averne l'aria. La presenza di un virus in una tale pianta *portatrice* può essere però dimostrata infettando col succo di detta pianta specie intolleranti, le quali allora mostrano i sintomi patologici dovuti a quel virus.

Vi sono degli *Abutilon* che sono resistenti al virus della variegatura ed innestati sopra una pianta variegata fanno passare il virus e fanno ammalare in modo visibile altre razze recettive che si trovano innestate sopra di loro.

Virus diversi possono dare sintomi eguali sullo stesso ospite.

I sintomi che i virus danno nelle piante sono i più diversi: necrosi, decolorazioni, deformazioni delle foglie e variano questi sintomi a seconda dell'età dell'organo attaccato.

Due principali condizioni dell'ambiente sono da tenersi presenti: la luce e la temperatura. Alla luce blu molti sintomi provenienti da virus non si mostrano e sono più lievi. In generale le elevate temperature tendono a ridurre la severità della malattia; però la temperatura *optimum* per il sintomo di una data malattia da virus varia molto a seconda della pianta e delle condizioni in cui si trova.

Il corrugamento e il mosaico delle patate sono soppressi completamente a 20° C., mentre la temperatura in eccesso è necessaria per mascherare i sintomi del mosaico del tabacco. Anche una temperatura bassa, a 7° C., maschera il sintomo del mosaico del tabacco.

Il giallume del pesco può guarire se le piante ammalate si tengono alcun tempo a 34-36°. Lo stesso risultato si ottiene se per 10 primi le piante si tengono a 50°. Nessun effetto ha lo stesso trattamento sul mosaico del pesco.

KUNKEL suggerisce l'idea che la distribuzione geografica del virus del giallume del pesco negli Stati Uniti d'America può essere determinato dalla temperatura, perchè la malattia non è stata trovata negli Stati del Sud dove la temperatura di 35° C., prende lunghi periodi.

Per la *Phony disease* del pesco nei vasi di terra cotta si può distruggere il virus poichè esso è limitato alle radici e queste possono essere esposte ad alte temperature e solo se ne può permettere lo sviluppo nelle radici raffreddate.

L'intensità ridotta della luce è stata trovata capace di ridurre la severità di sintomi di numerose virosi. L'*Abutilon* variegato produce

piante normalmente colorate se è coltivato all'ombra. Anche gli organi giovani sono più severamente colpiti di quelli adulti. Col succo allungato più o meno con acqua si possono causare sintomi più o meno gravi di un dato virus. Circa i risultati che si ottengono con simili mezzi si può dire che si ottengono risultati analoghi a quelli che si ottengono con minori o maggiori diluizioni di batteri. A questo riguardo e cioè per lavori quantitativi servono meglio lesioni dell'amido perchè si prestano meglio di altri sintomi.

Nelle piante sofferenti di malattie da virus sono frequentemente osservabili cambiamenti interni di due specie: modificazioni del contenuto cellulare e modificazioni con produzione di particolari inclusioni intracellulari. Questo secondo tipo è più comune e non c'è dubbio che simili modificazioni sieno il diretto risultato dell'infezione del virus. L'uso della luce ultravioletta e il microscopio ad elevato potere risolvante hanno dimostrato che i corpi d'inclusione (corpi X) sono degli aggregati di corpi elementari e approssimativamente della stessa dimensione delle particelle del virus dopo la filtrazione. Ma questi corpi non sono stati trovati in ogni malattia da virus. La loro produzione infatti dipende non solo dal virus infettante quanto dalla reazione dell'ospite.

Per esempio si possono produrre facilmente inclusioni con virus produttore sintomi del mosaico, ma questo stesso virus non produce inclusioni in ospiti nei quali si producono invece severe necrosi.

La presenza di questi corpi d'inclusione nelle piante è un sintomo sicuro della presenza di un virus, ma la loro assenza non dà alcuna sicurezza che tale malattia manchi.

Non tutti i virus sono trasmissibili per mezzo delle tre maniere in cui in genere la trasmissione avviene. Non vi è un virus che non sia trasmissibile con l'innesto; molti sono trasmissibili con l'inoculazione del succo fatta sperimentalmente; alcuni solo se fatta dall'insetto vettore. La trasmissione per semi bisogna intenderla in due modi: agrariamente e botanicamente. Nel primo caso s'intende la trasmissione per bulbi, tuberi, stoloni, ecc., e tutti quegli organi usati per la propagazione.

Nel secondo caso la trasmissione è meno importante perchè è molto rara. Noi conosciamo solo il caso della *Cucurbita* e della *Lattuga*. Il virus del *ringspot* del tabacco viene trasmesso dai semi della *Petunia*.

La resistenza dei diversi virus al calore, al tempo e alla diluizione è molto varia. Generalmente bastano 90° C e 42° C, per uccidere rispettivamente il virus del mosaico del tabacco e la maculatura selvatica del tabacco. Per il primo si ha la durata *in vitro* per più di un anno e per l'ultimo di 5 ore, mentre il primo resiste alla diluizione di 1/1.000.000; il secondo a quella di 1/100.000.

Piante di tabacco, annalate di mosaico, secche, si sono conservate attive anche dopo 31 anno!

Circa gli effetti degli enzimi e dei prodotti chimici, la pepsina e la tripsina agiscono molto diversamente sui vari virus. Il virus X delle patate può essere completamente inattivato se trattato con una soluzione di 0,02 % di pepsina cristallina per 3 ore con $\text{PH} = 4$ e a 38°C .

Il virus del mosaico del tabacco è molto resistente contro la luce solare e i raggi Röntgen. Viene distrutto molto presto dalla luce ultravioletta che passa attraverso i vapori di mercurio. Resiste molto alla azione dell'acetone e dell'alcool. IWANOSKY l'ha conservato per 10 mesi nell'alcool a 95 % e SMITH in quello a 99 %. KLEBAHN lo trovò molto resistente contro la glicerina e contro i comuni mezzi di disinfezione, come toluolo e cloroformio. L'alta resistenza di questo virus non è eguagliata dagli altri. Questa differenza di resistenza sembra esser data dalle proprietà diverse dei succhi delle piante.

In ogni modo è lecito trovare in questa elevata resistenza dei virus contro i più comuni mezzi contrari alla vita, uno degli argomenti principali contro l'opinione che considera questi agenti di malattia come degli esseri viventi. Per cataforesi i virus sono trasportati al polo positivo.

È nota la proprietà dei virus di attraversare le candele da filtro.

Il mosaico del tabacco, per esempio, passa tutti i gradi delle candele Chamberland—Pasteur; mentre il virus X delle patate passa solamente L_1 , L_2 e L_3 il virus Y passa solo L_3 — L_5 . Questa diversa capacità non dipende tanto dalle dimensioni dei corpi elementari che costituiscono il virus quanto dalla sua concentrazione nel succo infetto e la carica elettrica delle sue particelle.

A questo riguardo si può trovare il punto isoelettrico che è fra $\text{PH} = 3$ e $\text{PH} = 5$, però molti di essi sono insolubili a questo punto isoelettrico.

Il succo espresso da molte piante ha un $\text{PH} = 5$ e 6, una condizione che non favorisce la filtrazione. Per tutti questi inconvenienti le candele di porcellana o di silice sono state sostituite da membrane di collodio. ELFORD ha descritto un metodo per preparare membrane con fori di uniforme dimensione coagulando una miscelanza di etere, acetone, alcool e collodio. Il diametro dei fori oscilla da 10 a 100 μ , da 100 a 500 μ e da 500 a 1000 μ . Il virus X delle patate passa così le membrane con fori di 400 μ a 700 μ .

Virus con periodo d'incubazione nel vettore se ne conoscono alcuni.

È stato trovato da KUNKEL che la *Cicadula scirnotata* Fall., è incapace di infettare l'*Aster* con virus del giallume se questo insetto, già infetto di questo virus, è esposto alla temperatura di 32°C ., per vario tempo, riportato alla temperatura di 24°C ., riprende l'abilità di portare l'infezione nell'*Aster*. Anche un'esposizione di 12 giorni alla temperatura inibitoria di 32°C ., permette di riprender la sua normale attività infettante quando sia riportato alla temperatura a 24°C .

È questo modo di comportarsi che viene interpretato da KUNKEL come una prova della moltiplicazione del virus nel vettore.

Certamente questa spiegazione non può essere esclusa; però non è affatto dimostrato ciò che KUNKEL ed altri affermano.

Così resta ancora oscuro in qual modo venga trasmesso un virus solo dopo un periodo d'incubazione nel vettore.

Oltre alle proprietà ora dette nei virus sono state fatte anche osservazioni sulla loro mutabilità. Vi sono cioè nei diversi tipi di virus delle razze particolari dovute a variazioni e a mutazioni, paragonabili a quanto avviene nelle piante o negli animali. Così, per esempio, il mosaico del tabacco contiene una mescolanza di razze di tale virus e ciò è dimostrato dal fatto che isolando da aree delle foglie infette si ottiene una razza di virus che produce sintomi distinti da quelli del mosaico del tabacco. HOLMES pensa che in molti virus si formino delle razze fisiologiche analogamente a quanto avviene nelle piante e negli animali. SALAMAN studiando il virus delle patate « X » riconosce in questo cinque distinte *radicles* responsabili dei vari sintomi prodotti da queste diverse razze.

È probabile, per non dire certo, che le gene vi sieno interessate, ma per la nostra ignoranza sulla struttura e composizione di queste unità elementari la cosa resta nel campo delle ipotesi.

L'immunità acquisita per molte razze di virus è specifica.

WINGAND suggerì l'idea nel 1928 che piante infette acquistano una immunità contro una data malattia da virus, idea rigorosamente sostenuta da PRIEL nel 1932, 1936 e 1939. WALLACE riferisce di un fenomeno di simile immunità acquisita nella bieta infettata col virus della *cima arricciata* (*curly top*).

Si sono fatte sui virus molte reazioni sierologiche, i cui risultati hanno dimostrato che si tratta, nell'insieme dei virus, di un gruppo ben poco omogeneo.

Le ricerche sierologiche possono servire a separare le singole malattie da virus, in particolare sono da adoperarsi le reazioni di precipitazione.

La possibilità della formazione di un anticorpo umorale manca nella pianta perchè in lei manca un meccanismo appropriato per tale formazione.

Non si rileva nessuna specifica differenza paragonando le dimensioni dei virus con quelle dei batteri. I più grandi dei primi possono esser classificati fra i più piccoli dei secondi e i più piccoli dei primi fra gl'invisibili.

Le dimensioni dei virus vanno da un massimo di 250 m μ per il virus della psittacosi, da circa 30 m μ del virus del mosaico ad un minimo di 10 m μ per il virus della poliomelite e dell'afra epizootica. È lecito ammettere che i fenomeni fondamentali della vita, scissioni, sintesi che nelle cellule vegetali ed animali si svolgono sempre con l'aiuto di complicati

sistemi enzimatici avvengano esattamente come in queste anche in agenti, quali sono i virus, la cui entità elementare è forse rappresentata dall'aggregato di qualche molecola proteica?

Ci sono degli organismi filtrabili che vivono anche su terreni artificiali, la cui classificazione resta ancora dubbia. Per esempio quella forma filtrante isolata da LAIDLAW dalle acque di fogna di circa 150 m μ , che si può considerare come forma di transizione fra i batteri ed i virus filtrabili, ne costituisce un esempio non trascurabile. Si potrebbe dire che, se non è conosciuta, una forma saprofitica dei virus, dovrebbero esistere quasi sicuramente; delle forme di transizione fra questi ed i batteri, le quali dovrebbero avere vita saprofitica e dovrebbero essere capaci di riprodursi su terreni artificiali al pari delle cellule comunemente viventi.

Non sono state dimostrate attività enzimatiche nei virus paragonabili a quelle principali, sulle quali si basa la respirazione, nè glicolisi; solo una fosfatasi è stata dimostrata nel batteriofago. Non si può dire che i virus si moltiplichino per divisione come i microrganismi. Nei virus sarebbe molto difficile che la divisione vincessse la tensione superficiale. Si deve trattare, stando a quanto viene dimostrato dalle ricerche ultime sui virus, di una diretta trasformazione delle proteine delle cellule, di cui il virus è ospite, in proteine proprie del virus, di una sintesi in composti nucleo-proteici più complessi. Siamo dunque arrivati nell'analisi della natura dei virus ad un punto che sembrava ormai superato nell'analisi della natura dei parassiti, a quando cioè si pensava che i microrganismi avessero un'origine autoctona nell'organismo. Ma vediamo ancora quali metodi sono stati applicati allo studio dei virus per tentare di svelarne le ascose proprietà.

Queste ricerche hanno fatto notevoli progressi quando si sono adoperate le ultracentrifughe. In un tipo il rotore è posto in movimento da un getto d'olio sotto altissima pressione, per cui il rotore fa sino a 80.000 giri al minuto. Il progredire della sedimentazione viene osservato indirettamente mediante la fotografia. Alla velocità massima la forza centrifuga è di circa 400.000 volte la forza di gravità terrestre. In altri tipi di ultracentrifughe viene utilizzato il principio di HENRIOT-HUGUENARD, consistente nello sfruttamento della forza rotatoria risultante dall'azione di getti di aria compressa. Si raggiungono 35.000 giri al minuto e 180.000 volte la forza della gravità per un rotore di un raggio di 65 mm. Si possono raggiungere anche 50.000 giri al minuto.

La forza di queste ultracentrifughe è sufficiente a far sedimentare delle sostanze disciolte e delle molecole purchè queste abbiano un volume abbastanza grosso. Determinando la velocità di sedimentazione di una proteina, è facile stabilire la cosiddetta costante di sedimentazione, purchè nel calcolo s'introducano la viscosità del solvente, la densità e la temperatura. Lo stabilire quale sia la costante di sedimentazione equivale a sta-

ilice la grandezza molecolare. È con questi mezzi che si è venuti a stabilire quale sia la natura dei virus.

Si devono ricordare qui i tentativi fatti da FRANCESCO SANFELICE nel 1914 nell'Ateneo di Modena per purificare il virus dall'epitelioma contagioso del piccione. Quei tentativi costituivano un metodo rudimentale e ben lontano dalla perfezione tecnica oggi raggiunta; ma in ogni modo si deve ora ricordare che egli riuscì a riprodurre l'epitelioma con una nuclealbumina, tanto da concludere che il virus di questa malattia era piuttosto un enzima che un agente vivente.

Le ricerche di purificazione fatte da STANLEY nel 1935 sul virus del mosaico del tabacco portarono questo scienziato a concludere che questo virus è identificabile con una proteina. La sostanza proteica è stata potuta cristallizzare con una soluzione di ammonio acidificata con acido acetico o con una soluzione di solfato di ammonio e solfato di magnesio. Sono stati ottenuti così degli aghi cristallini di sostanza proteica che si presenta potentemente patogena, anche se la cristallizzazione è ripetuta 10 o 15 volte, cioè tanto da offrire ogni sicurezza sulla purezza chimica della sostanza.

Anche se inoculata nella pianta sana alla diluizione di 10^9 la virulenza è conservata e anzi è più elevata di quella del succo delle foglie infette di tabacco. La proteina in questione ha un peso molecolare altissimo, cioè quello di 17.000.000. Ammettendo che le sue molecole siano sferiche il calcolo fisserebbe la loro dimensione in 30-34 m μ , cifra che concorda con quella trovata negli esperimenti di filtrazione attraverso membrane di collodio.

L'eccezionale importanza di questa scoperta è rafforzata dal fatto che la purificazione della proteina è stata ottenuta anche con mezzi fisici da soli cioè con la soia centrifugazione (STANLEY e WYCKOF). Non vi è alcun dubbio che il virus del mosaico del tabacco sia costituito da una proteina a peso molecolare molto elevato. Essa modifica il metabolismo delle cellule in modo tale da far produrre alla cellula stessa nuova proteina identica e attiva come quella iniziale.

È certamente per condizioni patologiche particolari che le cellule infette sono spinte ad elaborare una simile proteina *patologica*, che a sua volta inoculata in cellule sane orienta quest'ultime verso quell'anomalia che porta a nuova produzione di virus-proteina.

Dopo la scoperta di STANLEY si è iniziato con grande furore un certo numero di ricerche per trovare di stabilire la natura di altri virus.

Il virus delle patate « X », il virus del *busbey stunt* del pomodoro, la necrosi del tabacco, un virus della Cucurbita, sono stati sottoposti a ricerche simili da BAWDEN e da PIRIE. Essi hanno ottenuto questi virus allo stato di purezza con vari procedimenti chimici, consistenti in una precipitazione del materiale attivo con solfato di ammonio, con alcool

e successiva purificazione del precipitato, e quindi sono state ottenute allo stato di elevata purezza delle nucleo-proteine che hanno riprodotto, inoculate in piante sane, le rispettive malattie sino alla concentrazione di 10^{10} .

Sembra che la parte dell'acido nucleico in tutti i virus purificati sia la parte essenziale e dello stesso tipo, ma ciò però non è stato dimostrato in modo conclusivo e non tutti gli autori sono di questa opinione.

Le nucleoproteine isolate sono aggregati, secondo BAWDEN e PIRIE, sotto forma di cristalli liquidi che vanno incontro durante la preparazione a processi di aggregazione irreversibile, che si presentano in forma allungata a fibra.

I risultati ottenuti con virus animali sono del tutto analoghi. Sono da citare qui i lavori di BEARD e WYCKOFF sul virus del coniglio.

A conclusione della nostra brevissima e rapidissima incursione nel campo istologico, chimico e fisico dei virus, agenti di processi infettivi disparati e lontani fra loro, quali son quelli studiati nelle piante e negli animali, può dirsi che essi sono ben lungi dal presentare i caratteri degli agenti patogeni dotati della vitalità comunemente intesa; essi sono forse delle proteine o nucleoproteine di peso molecolare elevatissimo, instabili nel loro stato di aggregazione. I fenomeni del loro accrescimento sono spiegabili col fatto che le proteine proprie del virus producono nelle cellule stesse che le ospitano le condizioni patologiche necessarie alla produzione di nuova proteina simile a quella del virus, in modo che questo una volta inoculato nei tessuti di una pianta permane attivo sino che dura la vitalità della pianta.

Malgrado queste ricerche abbiano portato a risultati molto risolutivi, rimane assolutamente insoluto il problema di conoscere se i virus sieno delle unità viventi o inanimate. Noi infatti non sappiamo ciò che basta per poter fissare con rigore scientifico i limiti del concetto di vita, e per ora almeno conviene solo riconoscere il grande e particolare interesse per le scienze biologiche che le indagini sui virus hanno per tutti i biologi, contribuendo a definire i limiti fra la materia vivente e quella inanimata.

BIBLIOGRAFIA

- K. M. SMITH, *A textbook of Plant Virus diseases*. Philadelphia, 1937.
F. C. BAWDEN, *Plant Viruses and Virus diseases*. Leiden, 1939.
G. SEIFFERT, *Virus und Viruserkrankheiten*. Dresden, 1938.
G. FAVILLI, *La natura dei virus filtrabili ed il concetto di materia vivente*. « Bollett. dell'Ist. Sieroter. Milanese », vol. XVII, anno 1938, fasc. V, pag. 273.
-

Matematica. — *Una metrica per lo spazio delle funzioni misurabili* ⁽¹⁾. Nota di LUIGI AMERIO, presentata ⁽²⁾ dall'Aggregato MAURO PICONE.

In questa Nota è indicata una metrica per lo spazio Q delle funzioni misurabili definite in un medesimo insieme misurabile, di misura finita o infinita. In essa si fa uso di una definizione di distanza collegata alla nozione di convergenza in misura secondo F. RIESZ ⁽³⁾.

Gli spazi astratti più frequentemente studiati nelle applicazioni ⁽⁴⁾, come lo spazio Hilbertiano ⁽⁵⁾, lo spazio delle funzioni continue in un medesimo insieme chiuso è limitato ⁽⁶⁾, lo spazio delle funzioni integrabili L_k , con $k \geq 1$, in un medesimo insieme misurabile e di misura finita ⁽⁷⁾, sono, come è noto, spazi *metrici*, di CAUCHY (o *completi* secondo BANACH) e *separabili*.

Si assumono perciò tali proprietà per definire uno spazio astratto T il quale comprenderà anche, come dimostreremo, con la definizione di distanza qui indicata, lo spazio Q .

1. Per maggior chiarezza enunciamo per esteso le condizioni cui soddisfa lo spazio T .

a) Lo spazio T è metrico nel senso di Hausdorff, cioè è definita per ogni coppia di suoi punti P, Q una distanza $\varphi(P, Q)$ soddisfacente ai tre assiomi

$$\text{I)} \quad \varphi(P, P) = 0$$

$$\text{II)} \quad \varphi(P, Q) = \varphi(Q, P) > 0 \quad P \neq Q$$

$$\text{III)} \quad \varphi(P, R) \leq \varphi(P, Q) + \varphi(Q, R).$$

⁽¹⁾ Lavoro eseguito presso il Laboratorio di Analisi Superiore della Regia Università di Roma.

⁽²⁾ Nell'Adunanza del 19 dicembre 1941-XX.

⁽³⁾ F. RIESZ, *Sur les suites de fonctions mesurables*. «C. R. de l'Acad. de Sc.», Paris, 1909.

⁽⁴⁾ V. ad es. G. ASCOLI, *Sugli spazi lineari metrici e le loro varietà lineari*. «Ann. di Mat.», serie IV, vol. X, 1932, pagg. 33-81, 201-232.

⁽⁵⁾ V. ⁽⁴⁾, pag. 63.

⁽⁶⁾ V. ⁽⁴⁾, pag. 75.

⁽⁷⁾ V. ⁽⁴⁾, pagg. 69-73.

b) Lo spazio T è uno spazio di Cauchy (o completo secondo Banach), perchè è verificato in T il criterio di Cauchy; cioè, se

$$P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$$

è una successione di punti di T tali che prefissato ad arbitrio $\varepsilon > 0$ si possa determinare un indice k in modo che per $n \geq m \geq k$ risulti

$$\varphi(P_m, P_n) < \varepsilon,$$

esiste in T un punto \bar{P} (che risulta anche unico, in virtù della condizione a)) per il quale si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(P_n, \bar{P}) = 0.$$

c) Lo spazio T è separabile, cioè esiste in T un insieme numerabile di punti

$$A_1, A_2, \dots, A_n, \dots,$$

detto l'insieme base, il quale è ovunque denso in T .

2. Sia Q lo spazio delle funzioni misurabili definite in un medesimo insieme misurabile K avente misura finita o infinita e appartenente a uno spazio euclideo a n dimensioni e dimostriamo che anche lo spazio Q , con la definizione di distanza che daremo, soddisfa alle condizioni a), b), c) del n. 1.

Indicheremo, in quanto segue, con $z(x_1, \dots, x_n)$ un generico punto dell'insieme K . Prefissata poi una funzione $F(z)$ definita in K , positiva e tale che esista finito l'integrale

$$E(K) = \int_K F(z) dx_1 \dots dx_n$$

diremo $E(K)$ il peso dell'insieme K . Se J è un insieme contenuto in K il suo peso sarà dato dall'integrale

$$E(J) = \int_J F(z) dx_1 \dots dx_n.$$

Se $f_1(z), f_2(z)$ sono due funzioni misurabili definite in K , corrispondenti ai punti P_1, P_2 dello spazio Q , definiremo la loro distanza $\varphi(P_1, P_2)$ nel modo seguente.

Preso $p \geq 0$, sia μ_p il peso dell'insieme dei punti z di K nei quali risulta

$$|f_1(z) - f_2(z)| \geq p.$$

Si ha

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \mu_p = 0$$

perchè, indicando con e_n il peso dell'insieme in cui è

$$n \leq |f_1(z) - f_2(z)| < n + 1, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

risulta

$$E(K) = \sum_0^\infty e_n$$

e inoltre, se n_p è il massimo intero $\leq p$,

$$\sum_{n_p}^\infty e_n \geq \mu_p.$$

La differenza

$$p - \mu_p,$$

che è funzione crescente di p nel tratto $0 + \infty$, sarà perciò > 0 per p abbastanza grande. Prendiamo come distanza $\varphi(P_1, P_2)$ tra i due punti P_1, P_2 dello spazio Q l'estremo inferiore dei valori di p per i quali risulti

$$p - \mu_p > 0.$$

Osserviamo che μ_p è funzione non crescente di p ; perciò se, per una coppia di funzioni, μ_p è anche funzione continua, la corrispondente distanza $\varphi(P_1, P_2)$ è la radice dell'equazione

$$p = \mu_p, \quad p \geq 0.$$

Nel caso generale si può dire che $\varphi(P_1, P_2)$ è il più piccolo dei numeri non negativi η tali che, preso comunque $p > \eta$, risulti

$$|f_1(z) - f_2(z)| < p$$

escluso un insieme di peso $\mu_p < p$. Anzi, siccome la funzione μ_p è non crescente, si può dire che $\varphi(P_1, P_2)$ è il più piccolo dei numeri non negativi λ tali che, preso comunque $p > \lambda$, risulti

$$|f_1(z) - f_2(z)| < p$$

escluso al più un insieme di peso $\leq \lambda$.

Dalla definizione ora posta segue poi che condizione necessaria e sufficiente perchè sia $\varphi(P_1, P_2) = 0$ è che sia $f_1(z) = f_2(z)$ esclusi al più i punti di un insieme di misura nulla.

Che la condizione sia sufficiente è ovvio. Dimostriamo che la condizione è necessaria. Infatti, essendo μ_p funzione non crescente di p ed essendo per ipotesi $\varphi(P_1, P_2) = 0$, deve essere $\mu_p = 0$ per $p > 0$. In particolare, per $p = \frac{1}{n}$, con n intero positivo, risulta $\mu_{\frac{1}{n}} = 0$.

Sia J l'insieme dei punti in cui è $f_1(z) = f_2(z)$, J_n l'insieme dei punti di J nei quali risulta

$$\frac{1}{n} \leq F(z) < \frac{1}{n-1} \quad (n=1, 2, \dots).$$

Si ha

$$0 \leq \frac{m(J_n)}{n} \leq E(J_n) \leq \sum_1^\infty \frac{\mu_1}{n} = 0$$

e quindi

$$E(J) = \sum_1^\infty E(J_n) = 0$$

$$m(J) = \sum_1^\infty m(J_n) = 0$$

che dimostra la tesi.

α) Vale nello spazio Q , con la definizione di distanza ora posta, la disuguaglianza triangolare.

Infatti siano $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z)$ tre funzioni misurabili definite nell'insieme K e poniamo $\rho = \varphi(P_1, P_2)$, $\sigma = \varphi(P_2, P_3)$.

Preso $\varepsilon > 0$ ad arbitrio sarà allora

$$|f_1(z) - f_2(z)| < \rho + \varepsilon$$

$$|f_2(z) - f_3(z)| < \sigma + \varepsilon$$

esclusi al più i punti di un insieme ω di peso $< \rho + \sigma + 2\varepsilon$.

Se z non è un punto di ω si ha perciò

$$|f_1(z) - f_3(z)| \leq |f_1(z) - f_2(z)| + |f_2(z) - f_3(z)| < \rho + \sigma + 2\varepsilon$$

e quindi il peso dell'insieme in cui risulta

$$|f_1(z) - f_3(z)| \geq \rho + \sigma + 2\varepsilon$$

è $< \rho + \sigma + 2\varepsilon$.

Ne segue

$$\varphi(P_1, P_3) \leq \rho + \sigma + 2\varepsilon$$

e, per l'arbitrarietà di ε ,

$$\varphi(P_1, P_3) \leq \rho + \sigma$$

che esprime la disuguaglianza triangolare.

Se poi fosse $\rho + \sigma \geq E(K)$, siccome è necessariamente, per la definizione posta, $\varphi(f_1, f_3) \leq E(K)$, anche in tal caso la tesi è provata.

β) È soddisfatta nello spazio Q la condizione b). Sia infatti

[5]

$$h_1(z), h_2(z), \dots, h_n(z), \dots$$

una successione di funzioni misurabili, definite in K , corrispondenti ai punti

$$H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$$

dello spazio T e supponiamo che, prefissato $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, si possa determinare un indice m_0 in modo che per $n \geq m \geq m_0$ risulti

$$\varphi(H_m, H_n) < \varepsilon.$$

Sia $h_{r_1}(z)$ la prima funzione della successione [5] tale che, per $n \geq r_1$, risulti

$$\varphi(H_{r_1}, H_n) < \frac{1}{2};$$

$h_{r_2}(z)$ la prima funzione della stessa successione per la quale è $r_2 > r_1$ e inoltre, per $n \geq r_2$,

$$\varphi(H_{r_2}, H_n) < \frac{1}{2^2}$$

e così via. Posto, per semplicità, $f_n(z) = h_{r_n}(z)$, $P_n = H_{r_n}$, dalla successione [5] si è in tal modo estratta la successione

$$[6] \quad f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z), \dots$$

per la quale converge la serie delle distanze

$$\sum_1^{\infty} \varphi(P_n, P_{n+1}).$$

Dimostriamo che la successione [6] converge quasi dappertutto a una funzione (necessariamente misurabile) $g(z)$ per la quale risulta

$$[7] \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(H_n, G) = 0$$

dove G è il punto rappresentativo di $g(z)$ in Q .

Infatti, prefissato $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, si determini in corrispondenza di ogni intero positivo m il più piccolo intero positivo N_m in modo che risulti

$$[8] \quad \sum_{N_m}^{\infty} \varphi(P_n, P_{n+1}) < \frac{\varepsilon}{2^m}.$$

Preso poi $r \geq N_m$, valgono le disuguaglianze

$$[9] \quad \begin{cases} |f_r(z) - f_{r+1}(z)| < \varphi(P_r, P_{r+1}) + \frac{\varepsilon}{2^{m+1}} \\ |f_{r+1}(z) - f_{r+2}(z)| < \varphi(P_{r+1}, P_{r+2}) + \frac{\varepsilon}{2^{m+2}} \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

escluso al più, per quanto si è detto nel n. 2 e per la [8], un insieme $C_{m,\varepsilon}$ di peso non superiore a

$$\sum_{N_m}^{\infty} \varphi(P_n, P_{n+1}) < \frac{\varepsilon}{2^m}.$$

Si ricava perciò dalle [8] e [9], per $N_m \leq r \leq s$ e per z non appartenente a $C_{m,\varepsilon}$,

$$[10] \quad |f_r(z) - f_s(z)| < \frac{\varepsilon}{2^m} + \frac{\varepsilon}{2^{m+1}} + \dots = \frac{\varepsilon}{2^{m-1}}.$$

Facendo variare m da 1 a ∞ si consideri l'insieme

$$C_\varepsilon = \sum_m^{\infty} C_{m,\varepsilon}$$

di peso $< \varepsilon$. Se z_0 è un punto di K non appartenente a C_ε , la successione [6] converge in z_0 .

Infatti, preso $\delta > 0$ ad arbitrio, si consideri un insieme $C_{m_\delta,\varepsilon}$ tale che risulti

$$\frac{\varepsilon}{2^{m_\delta}} < \frac{\delta}{2}.$$

Siccome z_0 non è contenuto in $C_{m_\delta,\varepsilon}$, sarà in z_0 , supposto $N_{m_\delta} \leq r \leq s$, per la [10],

$$|f_r(z_0) - f_s(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2^{m_\delta-1}} < \delta$$

cioè si ha la convergenza della successione [6] nel punto z_0 (anzi tale convergenza è uniforme nell'insieme $K - C_\varepsilon$).

Dall'arbitrarietà di ε segue allora la convergenza in tutti i punti di K escluso al più un insieme di peso nullo. Di qui si deduce che tale insieme ha necessariamente misura nulla.

Per dimostrare la [7], prefissato $\eta > 0$ ad arbitrio e supposto nelle [8], [9], [10] $\varepsilon = 1$, si prenda l'intero positivo q in modo che risulti

$$\frac{1}{2^q} < \frac{\eta}{2}$$

e l'intero positivo S in modo che sia

$$\sum_{S}^{\infty} \varphi(P_n, P_{n+1}) < \frac{1}{2^q}.$$

Si ricava allora dalla [10], per $n \geq S$, ricordando che la successione [6] converge quasi ovunque a una funzione $g(z)$,

$$|f_n(z) - g(z)| \leq \frac{1}{2^{q-1}} < \eta$$

esclusi al più i punti di un insieme $K_{n,\eta}$ di peso $< \frac{1}{2^q} < \eta$.

Ne segue

$$\varphi(P_n, G) \leq \eta.$$

Considerando poi la successione [5] si determini l'indice $k \cong s$ in modo che per $n \cong m \cong k$ risulti

$$\varphi(H_m, H_n) \leq \eta.$$

In tal modo la successione

$$f_k(z), f_{k+1}(z), \dots$$

è compresa nella successione

$$h_k(z), h_{k+1}(z), \dots$$

e si ricava, per $n \cong k$,

$$\varphi(H_n, G) \leq \varphi(H_n, P_k) + \varphi(P_k, G) \leq 2\eta$$

che dimostra la tesi.

γ) Come insieme base nello spazio Q sceglieremo (analogamente a quanto si suole fare nello spazio delle funzioni continue in un medesimo insieme chiuso e limitato) l'insieme di tutti i polinomi $g(z)$ a coefficienti razionali i quali, come è ben noto, possono disporsi in una successione.

Prefissato ad arbitrio $\varepsilon > 0$, si può costruire, in corrispondenza di una $f(z)$ misurabile definita in K , un insieme chiuso e limitato Δ_ε , contenuto in K , in modo che risulti

$$[11] \quad E(K - \Delta_\varepsilon) < \varepsilon$$

e che la $f(z)$ sia continua in tutti i punti di Δ_ε , quando si prescinda dai valori che assume nei punti di $K - \Delta_\varepsilon$. Si prenda poi un polinomio $g(z)$ a coefficienti razionali tale che sia, nei punti di Δ_ε ,

$$|f(z) - g(z)| < \varepsilon.$$

Dalla [11] segue allora che l'insieme dei punti di K nei quali è

$$|f(z) - g(z)| \geq \varepsilon$$

ha peso $< \varepsilon$ e quindi la tesi è provata.

Matematica. — *Sulle superficie di area finita secondo Lebesgue* ⁽¹⁾. Nota di LAMBERTO CESARI presentata ⁽²⁾ da LEONIDA TONELLI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Sia

$$S: \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in \bar{A} \equiv (0, 1, 0, 1),$$

una superficie continua e sia $L(S)$ la sua area secondo LEBESGUE. Vari Autori (RADÓ, McSHANE, MORREY) hanno considerato, oltre alla nozione di area $L(S)$, una nuova nozione di area che da tutti è indicata con il simbolo $G(S)$. È noto che per ogni superficie S si ha $G(S) \leq L(S)$. C.B. MORREY ⁽³⁾, estendendo precedenti ricerche di McSAHNE, ha introdotto una speciale classe di superficie in forma parametrica (superficie di classe L) e ha dimostrato che, per ogni superficie di classe L , si ha

$$G(S) = L(S) < +\infty.$$

C. B. MORREY ha poi studiato la topologia delle superficie più generali e, facendo uso di nozioni assai complesse di topologia, ha caratterizzato la struttura delle superficie continue in forma parametrica. Per le superficie che hanno area finita secondo LEBESGUE, ha dato una notevole proprietà di rappresentazione che verrà richiamata in seguito. Io ho rilevato che nelle ricerche di C.B. MORREY è implicitamente contenuta la seguente proposizione alquanto più generale di quella da lui dimostrata:

Per ogni superficie continua di area finita secondo Lebesgue si ha

$$G(S) = L(S) < +\infty.$$

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

⁽²⁾ Nell'Adunanza del 19 dicembre 1941-XX.

⁽³⁾ C. B. MORREY, I. *A class of representations of manifolds*, « Amer. Journ. of Math. », vol. LV (1933), pagg. 683-707; II. Id., vol. LVI (1934), pagg. 275-293; III. *The topology of (path) surfaces*, vol. LVII (1935), pagg. 17-50; IV. *An analytic characterization of surfaces of finite Lebesgue area*, Id., pagg. 692-702; V. Id., vol. LVIII (1936), pagg. 313-322.

Scopo della presente Nota è di mostrare come, dalle ricerche di C. B. MORREY, possa dedursi la proposizione ora enunciata ⁽⁴⁾. Nel paragrafo 1 ricorderò la nozione di area $G(S)$, nei paragrafi 2, 3, 4 richiamerò i risultati di C. B. MORREY, che interessano, nel paragrafo 5 dimostrerò il teorema enunciato.

§ 1. — L'AREA $G(S)$.

1. Sia r una qualsiasi regione di Jordan contenuta nel quadrato $A \equiv (0, 1, 0, 1)$ del piano (u, v) e sia r^* la frontiera di r ⁽⁵⁾. r^* è una curva continua semplice e chiusa sulla quale assumeremo come positivo il verso antiorario. L'immagine di r^* sulla superficie S è la curva continua e chiusa

$$C: \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in r^*.$$

Siano C_1, C_2, C_3 le proiezioni della curva C sui piani coordinati (x, y) , (x, z) , (y, z) e siano

$$O(x, y; C_1), \quad O(x, z; C_2), \quad O(y, z; C_3)$$

i relativi indici di KRONECKER.

Sia K un cubo dello spazio (x, y, z) a spigoli paralleli agli assi contenente interamente la superficie S e siano K_1, K_2, K_3 i tre quadrati nei quali K si proietta ortogonalmente sui piani coordinati. L'indice di KRONECKER $O(Q; C_t)$ è identicamente nullo fuori di $K_t, t = 1, 2, 3$. Poniamo

$$g_t(r) = \iint_{K_t} |O(Q; C_t)| dQ, \quad t = 1, 2, 3,$$

$$g(r) = \{g_1^2(r) + g_2^2(r) + g_3^2(r)\}^{1/2}.$$

Sia $\{r_i, i = 1, 2, \dots, m\}$ una qualsiasi suddivisione di A in regioni di Jordan. Poniamo

$$G(S) = \text{extr. sup.} \sum_{i=1}^m g(r_i)$$

per tutte le possibili suddivisioni $\{r_i\}$ di A in regioni di Jordan.

È noto che se S e S' sono due superficie continue e la loro distanza secondo FRÉCHET è nulla, $\|S, S'\| = 0$, allora $G(S) = G(S')$, in altre parole

⁽⁴⁾ Di tale proposizione io darò, in un lavoro di prossima pubblicazione, una dimostrazione diretta, indipendente dalle complicate nozioni di topologia adoperate da C. B. MORREY e da me utilizzate soltanto nel presente lavoro.

⁽⁵⁾ Qui e nel seguito indicherò con \bar{I} e I^* rispettivamente la chiusura e la frontiera di un insieme I .

$G(S)$ dipende dalla superficie S e non dalla sua rappresentazione. Inoltre per ogni superficie S si ha $0 \leq G(S) \leq L(S)$.

§ 2. - LE SUPERFICIE E LE TRASFORMAZIONI DI CLASSE L .

1. Sia S una superficie (trasformazione) continua. Consideriamo la seguente rappresentazione della superficie o trasformazione S nel quadrato chiuso $\bar{A} \equiv (0, 1, 0, 1)$ del piano (u, v) :

$$[1] \quad S: \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in \bar{A}.$$

Per ogni $0 < h < 1/2$ definiamo nel quadrato $\bar{A}_h \equiv (h, 1-h; h, 1-h)$ la seguente funzione

$$x_h(u, v) = \frac{1}{h^2} \int_u^{u+h} \int_v^{v+h} x(u + \alpha, v + \beta) d\alpha d\beta$$

che si dirà *media integrale* di $x(u, v)$. Analoghe definizioni abbiano le funzioni $y_h(u, v)$, $z_h(u, v)$.

Definizione 1 ⁽⁶⁾. Diremo che la rappresentazione [1] della superficie o trasformazione S è di classe L se

a): $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ sono assolutamente continue secondo TONELLI in \bar{A} ;

$$b): \quad \lim_{h \rightarrow 0} \iint_{\bar{A}_h} \left| \frac{\partial(x_h, y_h)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv = 0$$

e analoghe relazioni valgono scambiando tra loro le funzioni x, y, z .

Se queste condizioni sono soddisfatte diremo talvolta, per brevità, che la superficie o la trasformazione S è di classe L .

Sono in particolare superficie di classe L le superficie per le quali vale a) e b'): $|x_u|^p, |y_v|^q$ sono integrabili L , ove p e q sono opportuni numeri tali che $p, q \geq 1, 1/p + 1/q \leq 1$ e analoghe relazioni valgono scambiando tra loro x, y, z e u, v . Più in particolare sono superficie di classe L quelle per le quali vale a) e b''): $x_u^2, y_v^2, z_v^2, x_v^2, y_u^2, z_u^2$ sono integrabili L .

Finalmente sono superficie di classe L le superficie in forma ordinaria $S: x = u, y = v, z = z(u, v)$ per le quali $z(u, v)$ è assolutamente continua secondo TONELLI in \bar{A} .

(⁶) C. B. MORREY, loc. cit., in (²), I, pag. 701.

TEOREMA 1. (7) Sia

$$\Phi: \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad (u, v) \in A \equiv (0, 1, 0, 1),$$

una trasformazione piana di classe L . Sia (a, b, c, d) un rettangolo di \bar{A} .

Se $x(u, v), y(u, v)$ sono assolutamente continue, come funzioni di una sola variabile, per $u = a, u = b, v = c, v = d$; se per $\bar{v} = c$ e $\bar{v} = d$ si

$$\text{ha } \lim_{h \rightarrow \pm 0} \frac{1}{h} \int_{\bar{v}}^{\bar{v}+h} V_u(v) dv = V_u(\bar{v}) \text{ e per } \bar{u} = a \text{ e } \bar{u} = b \text{ si ha } \lim_{h \rightarrow \pm 0} \int_{\bar{u}}^{\bar{u}+h} V_v(u) du = V_v(\bar{u}),$$

dove $V_u(\bar{v}), c \leq \bar{v} \leq d$, è la variazione totale di $x(u, \bar{v})$ considerata come funzione della sola u in $a \leq u \leq b$ e $V_v(\bar{u}), a \leq \bar{u} \leq b$, è la variazione totale di $x(\bar{u}, v)$ considerata come funzione della sola v in $c \leq v \leq d$ e analoghe relazioni valgono per la funzione $y(u, v)$, allora

$$[2] \quad \int_a^b \int_c^d \frac{\partial}{\partial (u, v)} (x, y) du dv = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} O(x, y; C) dx dy,$$

dove C è la curva continua chiusa rettificabile immagine della periferia del rettangolo (a, b, c, d) .

TEOREMA 2 (8). Se la rappresentazione [1] della superficie S è di classe L si ha

$$[3] \quad G(S) = L(S) = \iint_A \sqrt{EG - F^2} du dv,$$

ove

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \quad G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2, \quad F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v.$$

Definizione 2. — Diremo che la rappresentazione [1] della superficie S è quasi conforme se

a) $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ sono assolutamente continue secondo

TONELLI in \bar{A} ;

b) $x_u^2, x_v^2, \dots, z_v^2$ sono integrabili L ;

c) $E = G, F = 0$ quasi ovunque in A .

(7) C. B. MORREY, loc. cit., in (3), I, pag. 702. Si veda per una generalizzazione di questo teorema T. RADÓ, *A remark on the area of surfaces*, « Amer. Journ. of Math. », vol. LVIII (1936), pagg. 598-606.

(8) C. B. MORREY, loc. cit., in (3), I, pag. 703.

§ 3. — TRASFORMAZIONI MONOTONE E SUPERFICIE NON DEGENERI.

1. Sia

$$[4] \quad S: \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in \bar{r},$$

una superficie (trasformazione) continua e indichiamo pure con S l'insieme chiuso dei punti da essa occupati nello spazio (x, y, z) .

Introduciamo le seguenti definizioni:

Definizione 2 ⁽⁹⁾. — Diremo che la superficie (trasformazione) $[4]$ è *monotona* se, per ogni punto Q di S , l'insieme (chiuso) dei punti di \bar{r} la cui immagine cade in Q è un continuo.

Una superficie (trasformazione) monotona è tale indipendentemente dalla sua rappresentazione.

Definizione 3. La rappresentazione $[1]$ della superficie (trasformazione) S si dice *non degenera* ⁽¹⁰⁾ se tutti i continui g della collezione G dei continui massimali di \bar{r} sui quali le tre funzioni $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ sono costanti sono semplici punti. Una superficie (trasformazione) S si dice *non degenera* ⁽¹¹⁾ se S ammette una rappresentazione non degenera in una regione di Jordan.

C. B. MORREY ha dimostrato il seguente

TEOREMA 1 ⁽¹²⁾. Ogni superficie non degenera S ammette una rappresentazione non degenera sul cerchio unità. Ogni superficie non degenera di area finita secondo LEBESGUE ammette una rappresentazione quasi conforme e non degenera sul cerchio unità.

§ 4. — SUPERFICIE DEGENERI.

Definizione 1 ⁽¹³⁾. — Un punto P si dice *punto taglio* di un insieme connesso S se $S - P$ non è connesso.

Se A, B, T sono sottoinsiemi propri di un insieme connesso M allora si dice che T separa A da B in M se $M - T$ è la somma di due insiemi di punti mutualmente esclusivi e contenenti A e B rispettivamente.

⁽⁹⁾ C. B. MORREY, loc. cit., in ⁽²⁾, III, pag. 26.

⁽¹⁰⁾ C. B. MORREY, loc. cit., in ⁽²⁾, III, pag. 47.

⁽¹¹⁾ C. B. MORREY, loc. cit. in ⁽²⁾, III, pag. 48.

⁽¹²⁾ C. B. MORREY, loc. cit. in ⁽²⁾, IV, pag. 701. In un lavoro di prossima pubblicazione, io darò, di questo teorema, una dimostrazione diretta, indipendente dalle nozioni di topologia adoperate da C. B. MORREY.

⁽¹³⁾ R. L. MOORE, *Foundation of point set theory*. « Amer. Math. Soc., Colloquium publications », vol. XIII (1932).

Un punto P di un continuo \bar{K} si dice un *punto fine* di \bar{K} se, per ogni sottocontinuo c di \bar{K} contenente P , P non è punto di accumulazione di nessun sottoinsieme connesso di $\bar{K} - c$.

Definizione 2 ⁽¹⁴⁾. — Un continuo \bar{K} si dice connesso in piccolo in un punto P se P appartiene a \bar{K} e se ad ogni numero positivo $\varepsilon > 0$ si può fare corrispondere un numero $\delta > 0$ tale che ogni punto dell'intorno circolare di raggio δ di P appartiene ad un sottocontinuo di \bar{K} contenente P e tutto contenuto nel cerchio di centro P e raggio ε . Se un continuo \bar{K} è connesso in piccolo in ogni suo punto diremo che \bar{K} è *connesso in piccolo*.

TEOREMA 1 ⁽¹⁵⁾ (di HAHN e MAZURKIEWICZ). — Condizione necessaria e sufficiente perchè un insieme M sia l'insieme dei punti occupati da una curva continua è che M sia un continuo limitato e connesso in piccolo ossia chiuso, limitato, connesso e connesso in piccolo.

Definizione 3. — Diremo nel seguito « curva continua » ⁽¹⁶⁾ ogni insieme di punti che ha le proprietà viste nel teorema 1. La doppia accezione delle parole curva continua non può dar luogo ad inconvenienti.

TEOREMA 2 ⁽¹⁷⁾. — Se \bar{M} è una curva continua e P_1 e P_2 sono due suoi punti, esiste un arco semplice congiungente P_1 e P_2 tutto costituito di punti di \bar{M} .

Definizione 4 ⁽¹⁸⁾. — Un punto P si dice accessibile dall'insieme di punti A se per ogni punto X di A esiste una curva semplice (aperta) tutta costituita di punti di A ad eccezione di P , congiungente X con P .

TEOREMA 3 ⁽¹⁹⁾. — Se \bar{M} è una curva continua del piano π , se α è uno qualunque degli insiemi aperti semplicemente connessi di $\pi - \bar{M}$, ogni punto della frontiera di α è accessibile da α .

TEOREMA 4 ⁽²⁰⁾. — Se un continuo è la somma di un numero finito di curve continue, è esso stesso una curva continua.

Definizione 5 ⁽²¹⁾. — Una curva continua \bar{M} si dice *ciclicamente connessa* se ogni coppia di punti P_1 e P_2 di \bar{M} appartengono ad una curva continua semplice e chiusa tutta costituita di punti di \bar{M} .

⁽¹⁴⁾ B. v. KERÉKJÁRTÓ, *Vorlesungen über Topologie*, I. Berlin, Springer 1923.

⁽¹⁵⁾ H. HAHN, *Ueber die allgemeinste ebene Punktmenge, die stetiges Bild einer Strecke ist*. « Jahresber. d. Deutsch. Math. Verein. », Bd. 23 (1904), pagg. 318–322; S. MAZURKIEWICZ, *Sur les lignes de Jordan*. « Fund. Math. », Tom. I (1920), pagg. 166–209; cfr. B. v. KERÉKJÁRTÓ, loc. cit., in ⁽¹⁴⁾, pag. 96.

⁽¹⁶⁾ Cfr. R. L. MOORE, loc. cit., in ⁽¹³⁾ e C. B. MORREY, loc. cit., in ⁽³⁾.

⁽¹⁷⁾ Cfr. B. v. KERÉKJÁRTÓ, loc. cit., in ⁽¹⁴⁾, pag. 103.

⁽¹⁸⁾ R. L. MOORE, loc. cit., in ⁽¹³⁾, pag. 89.

⁽¹⁹⁾ R. L. MOORE, loc. cit., in ⁽¹³⁾, pag. 229.

⁽²⁰⁾ R. L. MOORE, loc. cit., in ⁽¹³⁾, pag. 112.

⁽²¹⁾ G. T. WHYBURN, *Concerning the structure of a continuous curve*. « Am. Journ. of Math. », vol. L (1928), pagg. 167–194.

Un sottoinsieme \bar{C} di una curva continua \bar{M} si dice una *curva ciclica massimale* di \bar{M} se \bar{C} è una curva continua ciclicamente connessa e se \bar{C} non è sottoinsieme proprio di altro sottoinsieme di \bar{M} avente la stessa proprietà.

Definizione 6 ⁽²²⁾. — Un sottoinsieme E di una curva continua M si dice un *elemento ciclico* di \bar{M} se a) E è una curva ciclica massimale di \bar{M} , oppure b) E è un *punto taglio* di \bar{M} , oppure c) E è un *punto fine* di \bar{M} . Nel caso a) si dice che E è un *elemento ciclico non degenerato* di \bar{M} .

TEOREMA 5 ⁽²³⁾. — Ogni curva continua \bar{M} è la somma dei suoi elementi ciclici. Due elementi ciclici di \bar{M} o non hanno punti in comune o altrimenti ne hanno uno solo e questo è un elemento ciclico di tipo b) (punto taglio di \bar{M}).

Definizione 7 ⁽²⁴⁾. — Un sottoinsieme X di una curva continua M si dice una *semplice catena ciclica* di \bar{M} tra due elementi ciclici E_1 ed E_2 se X è connesso, se contiene E_1 ed E_2 , se è la somma di una collezione di elementi ciclici di \bar{M} , se infine non contiene nessun sottoinsieme proprio avente le stesse proprietà.

TEOREMA 6 ⁽²⁵⁾. — Se M è una curva continua e \bar{C} una semplice catena ciclica di \bar{M} , allora l'insieme $\bar{M} - \bar{C}$ è la somma di un numero finito o una infinità numerabile di componenti M_n e si ha: 1° M_n è una curva continua; 2° $\bar{M}_n \cdot \bar{C} = \bar{M}_n - M_n$ = un punto singolo; 3° $\bar{M}_m \cdot \bar{M}_n$, $m \neq n$, è vuoto oppure è un punto singolo di \bar{C} ; 4° ogni arco congiungente un punto di \bar{M}_n con un punto di $\bar{M} - M_n$ contiene il punto $\bar{M}_n - M_n$; 5° per ogni $\varepsilon > 0$ soltanto un numero finito di M_n ha diametro $\geq \varepsilon$.

TEOREMA 7 ⁽²⁶⁾. Ogni curva continua \bar{M} può essere rappresentata come somma di un insieme M e di un insieme completamente disconnesso M' di punti di accumulazione di M che sono tutti punti fine di \bar{M} . L'insieme M si può rappresentare nella forma $M = C_1 + C_2 + \dots$, dove 1° ogni C_n è una semplice catena ciclica di \bar{M} ; 2° per ogni n , $M_n = C_1 + \dots + C_n$ è una curva continua e $C_{n-1} \cdot M_n$ è un singolo punto taglio di \bar{M} che è punto fine di C_{n-1} ma non è punto fine di \bar{C}_i ; 3° per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un numero $N(\varepsilon)$ tale che per $n > N(\varepsilon)$ il diametro di ciascun C_n e di ogni componente di $\bar{M} - \bar{M}_{n-1}$ è $< \varepsilon$.

⁽²²⁾ G. T. WHYBURN, loc. cit., in ⁽²¹⁾.

⁽²³⁾ G. T. WHYBURN, loc. cit., in ⁽²¹⁾ e *Cyclically connected continuous curves*, « Proc. of the Nat. Acad. of Sc. », vol. XIII (1927), pagg. 31-38.

⁽²⁴⁾ G. T. WHYBURN, loc. cit., in ⁽²⁷⁾. Cfr. inoltre *Some properties of continuous curves*, « Bull. of the Am. Math. Soc. », vol. XXXIII (1927), pagg. 305-308.

⁽²⁵⁾ C. KURATOWSKI e G. T. WHYBURN, *Sur les éléments cycliques, etc.* « Fund. Math. », Tom. XVI (1930), pagg. 305-331.

⁽²⁶⁾ C. KURATOWSKI e G. T. WHYBURN, loc. cit., in ⁽²⁵⁾. Cfr. inoltre C. B. MORREY, loc. cit., in ⁽³⁾, III, pagg. 22-23.

Definizione 8. — Una curva continua si dice un *cactoide* ⁽²⁷⁾ se i suoi elementi ciclici non degenerati sono superficie continue semplici e chiuse. Una curva continua piana si dice un *insieme base* ⁽²⁸⁾ se essa non separa il piano.

Definizione 9 ⁽²⁹⁾. — Sia AB un segmento del piano e sia I un insieme chiuso di punti di AB . Ad ogni intervallo contiguo ab di I sostituiamo il rombo $acbd$ di cui una delle diagonali è ab e il cui angolo $\hat{a} = \hat{b} \leq \pi/2$ è assegnato e il medesimo per tutti gli intervalli contigui ab di I . Diciamo $\hat{a} = \hat{b}$ *angolo al vertice* e a e b punti *estremi* del rombo $acbd$. Il segmento AB si dice *asse*. L'insieme di tutti i punti di I e di tutti i punti interni e sulla periferia dei rombi $acbd$ è una curva continua costituente una semplice catena ciclica. Essa si dice una *semplice catena ciclica di tipo B*.

Sostituiamo ad ogni intervallo contiguo ab di I su AB il doppio cono che si ottiene facendo ruotare il rombo $acbd$ attorno alla diagonale ab . Diremo *angolo al vertice* del doppio cono l'angolo al vertice del rombo $acbd$, diremo *punti estremi* del doppio cono i punti a e b . L'insieme di tutti i punti di I e della superficie di tutti i doppi cono ora costruiti è una curva continua costituente una semplice catena ciclica. Essa si dice una *semplice catena ciclica di tipo A*.

Definizione 10 ⁽³⁰⁾. — Si dice *cactoide canonico* una curva continua \bar{M} che possa rappresentarsi secondo il teorema 7 ove le \bar{C}_n sono semplici catene cicliche di tipo A. Si dice *insieme base canonico* se \bar{M} appartiene ad un piano e se le \bar{C}_n sono semplici catene cicliche di tipo B.

TEOREMA 8. ⁽³¹⁾. — Ogni insieme base è topologicamente equivalente ad un insieme base canonico; ogni cactoide ad un cactoide canonico.

Definizione 11 ⁽³²⁾. — Si dice *emicactoide* \bar{H} una curva continua dello spazio che è la somma di un insieme base canonico \bar{B} giacente su un piano π e di un numero finito o di una infinità numerabile di cactoidi canonici \bar{K}_m , $m = 1, 2, \dots$, che hanno un solo punto in comune con \bar{B} e che non hanno ne con \bar{B} , ne con π , ne tra loro altri punti in comune.

TEOREMA 9 ⁽³³⁾. — Ogni emicactoide \bar{H} ammette la scomposizione

$$[5] \quad \bar{H} = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{D}_n + H',$$

⁽²⁷⁾ R. L. MOORE, loc. cit., in ⁽⁸⁾, pag. 151. L'attuale lievemente diversa definizione è equivalente a quella di R. L. MOORE.

⁽²⁸⁾ C. B. MORREY, loc. cit., in ⁽⁸⁾, III, pag. 27.

⁽²⁹⁾ C. B. MORREY, loc. cit., in ⁽⁸⁾, III, pag. 28.

⁽³⁰⁾ C. B. MORREY, loc. cit., in ⁽⁸⁾, III, pag. 29.

⁽³¹⁾ C. B. MORREY, loc. cit., in ⁽⁸⁾, III, pag. 30.

⁽³²⁾ C. B. MORREY, loc. cit., in ⁽⁸⁾, III, pag. 29.

⁽³³⁾ C. B. MORREY, loc. cit., in ⁽⁸⁾, III e inoltre IV, pagg. 318-319.

ove

1° D_n sono semplici catene cicliche di tipo A o B ;

2° posto, per ogni n , $\bar{H}_n = \bar{D}_1 + \bar{D}_2 + \dots + \bar{D}_n$, $D_{n+1} \cdot \bar{H}$ è un singolo punto taglio di \bar{H} e un punto fine di \bar{D}_{n-1} e $\bar{H} - \bar{H}_n$ è costituito di un numero finito o di una infinità numerabile di componenti che sono tutti emicactoidi;

3° per ogni $n = n_0$, se $\bar{D}_{n_0} \cdot \bar{H}_{n_0-1}$ è un punto di \bar{D}_{n_1} , $n_1 < n_0$, $\bar{D}_{n_1} \cdot \bar{H}_{n_1-1}$ è un punto di \bar{D}_{n_2} , $n_2 < n_1$, ..., $\bar{D}_{n_r} \cdot \bar{H}_{n_r-1}$ è un punto di \bar{D}_1 e se \bar{D}_{n_t} è la prima tra le catene semplici cicliche $\bar{D}_{n_0}, \bar{D}_{n_1}, \dots, \bar{D}_{n_r}, \bar{D}_1$ di tipo B allora tutte le catene $\bar{D}_{n_t}, \bar{D}_{n_t+1}, \dots, \bar{D}_{n_r}, \bar{D}_1$ sono di tipo B ;

4° H' è un insieme completamente disconnesso.

Altre proprietà della scomposizione [5] si ottengono combinando i teoremi 6 e 7.

Gli elementi ciclici non degeneri di \bar{H} sono gli elementi ciclici non degeneri dei \bar{D}_n e quindi sono un numero finito o una infinità numerabile di rombi e doppi coni.

TEOREMA 10 ⁽³⁴⁾. — Sia $\bar{H} = \bar{B} + \sum_{m=1}^{(\infty)} \bar{K}_m$ un emicactoide dello spazio $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ ove \bar{B} è il relativo insieme base e \bar{K}_m , $m = 1, 2, \dots$, i relativi cactoidi; siano

$$[6] \quad x = X(P), \quad y = Y(P), \quad z = Z(P), \quad P \equiv (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in \bar{H},$$

funzioni continue su \bar{H} non costanti su nessun continuo proprio di \bar{H} ; sia \bar{r} una regione di Jordan del piano (u, v) . Allora esiste una superficie continua

$$[7] \quad S: \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in \bar{r},$$

e una trasformazione monotona T di \bar{r} in \bar{H}

$$[8] \quad T: \quad \bar{u} = \bar{u}(u, v), \quad \bar{v} = \bar{v}(u, v), \quad \bar{w} = \bar{w}(u, v), \quad (u, v) \in \bar{r},$$

tale che

a) se G è la collezione dei continui massimali e mutualmente esclusivi g di \bar{r} sui quali le funzioni x, y, z sono (tutte e tre) costanti, allora a tutti i punti (u, v) di uno stesso continuo g di G , T fa corrispondere un unico punto $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ di \bar{H} e, a punti appartenenti a continui g distinti, T fa corrispondere punti distinti di \bar{H} ;

⁽³⁴⁾ C. B. MORREY, loc. cit., in ⁽²⁾, III, pagg. 40-48, § 4 e IV, teorema 4, pag. 321.

b) per ogni $(u, v) \in \bar{r}$ si ha

$$\begin{aligned} X(\bar{u}(u, v), \bar{v}(u, v), \bar{w}(u, v)) &= x(u, v), \\ Y(\bar{u}(u, v), \bar{v}(u, v), \bar{w}(u, v)) &= y(u, v), \quad (u, v) \in \bar{r}; \\ Z(\bar{u}(u, v), \bar{v}(u, v), \bar{w}(u, v)) &= z(u, v), \end{aligned}$$

c) ai punti di r^* , T fa corrispondere punti di B^* e viceversa ogni punto di B^* è immagine dei punti di un continuo g di G che contiene un punto di r^* ;

d) i punti di B sono l'immagine rispetto a T dei punti di una sotto-collezione G_0 di G che ha le seguenti proprietà:

d1) G_0 è semicontinua superiormente;

d2) se g_0 è un continuo di G_0 nessun continuo g di G_0 distinto da g_0 appartiene ad uno dei componenti limitati dell'insieme aperto complementare di g_0 ;

e) se \bar{A}_k , $k = 1, 2, \dots$, sono gli elementi ciclici non degeneri di \bar{H} e se S_k , $k = 1, 2, \dots$, sono le superficie continue definite dalle [6] su \bar{A}_k , si ha

$$L(S) = \sum_{k=1}^{(\infty)} L(S_k).$$

Definizione 12 ⁽³⁵⁾. — Nelle condizioni del teorema 10 diremo che le [6] danno una rappresentazione non degenerare della superficie S sull'emicattoide \bar{H} .

TEOREMA 11 ⁽³⁶⁾. — Ogni superficie continua S ammette una rappresentazione non degenerare sopra un emicattoide \bar{H} .

Definizione 13 ⁽³⁷⁾. — Se Γ è un doppio cono dello spazio (u, v, w) diremo che la rappresentazione

$$S: \quad x = X(P), \quad y = Y(P), \quad z = Z(P), \quad P \equiv (\bar{u}, \bar{v}, w) \in \Gamma,$$

della superficie S è *quasi conforme sul doppio cono* Γ , se ogni porzione semplicemente connessa γ di Γ ammette una rappresentazione conforme T sul cerchio unità \mathbb{G} del piano (u, v)

$$T: \quad \bar{u} = \bar{u}(u, v), \quad \bar{v} = \bar{v}(u, v), \quad w = w(u, v), \quad (u, v) \in \mathbb{G},$$

tale che, posto

$$x(u, v) = X(\bar{u}(u, v), \bar{v}(u, v), \bar{w}(u, v)), \dots, (u, v) \in \mathbb{G},$$

⁽³⁵⁾ C. B. MORREY, loc. cit., in ⁽³⁾, III, pagg. 40-48, § 4.

⁽³⁶⁾ C. B. MORREY, loc. cit. in ⁽³⁵⁾.

⁽³⁷⁾ C. B. MORREY, loc. cit., in ⁽³⁾, V, pag. 319.

la rappresentazione della porzione della superficie S_γ corrispondente a γ

$$S_\gamma: \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in \mathbb{G},$$

è quasi conforme.

TEOREMA 12 ⁽³⁸⁾. — Ogni superficie continua S di area finita secondo Lebesgue ammette una rappresentazione non degenerare sopra un emicacetoide \bar{H} che risulta quasi conforme sugli elementi ciclici non degeneri (rombi e doppi coni) di \bar{H} .

Nel seguito ci occorrerà infine il seguente

Lemma. — Se q è un quadrato aperto e $K_s, s = 1, 2, \dots, m$, $t_s, s = 1, 2, \dots, m$, sono $2m$ continui tali che

$$a) \quad K_s \subset q, \quad s = 1, 2, \dots, m, \quad t_s \subset \bar{q}, \quad s = 1, 2, \dots, m;$$

$$b) \quad K_s K'_s = 0, \quad s \neq s', \quad s, s' = 1, 2, \dots, m;$$

$$c) \quad t_s \cdot \sum_{s=1}^m K_s = t_s K_s, \quad s = 1, 2, \dots, m;$$

d) t_s congiunge un punto della frontiera q^* di q con un punto di K_s , $s = 1, 2, \dots, m$:

allora esistono m poligoni semplici π_s di A a due a due senza punti interni in comune e tali che, per ogni s ,

$$K_s \subset \pi_s, \quad s = 1, 2, \dots, m.$$

§ 5.

1. Dimostreremo nei numeri 2-7 il seguente

TEOREMA 1. — Se S è una superficie continua e $L(S) < +\infty$, allora

$$G(S) = L(S).$$

2. Sia S una superficie non degenerare e $L(S) < +\infty$. Allora (Teorema 1, § 3) esiste una rappresentazione della superficie S sul cerchio unità quasi conforme e non degenerare

$$S = S_1: \quad x = X(u, v), \quad y = Y(u, v), \quad z = Z(u, v), \quad (u, v) \in \mathbb{G} \equiv (u^2 + v^2 \leq 1),$$

cioè tale che

a) $X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)$ sono assolutamente continue e X_u, X_v, \dots, Z_v sono integrabili L^2 in \mathbb{G} ;

⁽³⁸⁾ C. B. MORREY, loc. cit., in ⁽³⁾, V, pag. 321. Questo teorema generalizza alle superficie qualunque il teorema 1, § 3.

b) $E = G, F = 0$ quasi ovunque in \mathfrak{C} .

Dunque $S_i = S$ è di classe L e quindi (Teorema 2, § 2)

$$G(S_i) = L(S_i).$$

Ma $L(S) = L(S_i), G(S) = G(S_i)$ e quindi

$$G(S) = L(S).$$

3. Sia

$$[9] \quad S: \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in A,$$

una superficie degenerare di area finita secondo LEBESGUE. Allora esiste (Teorema 12, § 4) un emicactoide \bar{H} dello spazio (u, v, w) sul quale S ammette una rappresentazione non degenerare

$$[10] \quad S = S_i: \quad x = X(P), \quad y = Y(P), \quad z = Z(P), \quad P \in \bar{H},$$

quasi conforme sugli elementi ciclici non degeneri di \bar{H} . Sappiamo inoltre che $L(S)$ è uguale alla somma delle aree secondo Lebesgue $L(S_i)$ delle superficie $S_i, i = 1, 2, \dots$, corrispondenti agli elementi ciclici non degeneri (rombi e doppi coni) di \bar{H}

$$L(S) = \sum_{i=1}^{(\infty)} L(S_i),$$

ove abbiamo scritto (∞) per indicare che la sommatoria a secondo membro è una somma oppure una serie secondochè gli elementi ciclici non degeneri di \bar{H} sono in numero finito o infinito.

4. Diciamo G l'insieme dei continui massimali g (eventualmente semplici punti) di \bar{A} sui quali le funzioni $x(u, v), y(u, v); z(u, v)$ sono (tutte e tre) costanti. L'insieme G è semicontinuo superiormente e due continui di G non hanno punti in comune. Ricordiamo qui che la rappresentazione [10] di S su \bar{H} è non degenerare e perciò non esistono su \bar{H} continui costituiti di più di un punto su cui le funzioni $X(P), Y(P), Z(P)$ sono (tutte e tre) costanti. Esiste inoltre una corrispondenza biunivoca e continua T tra i continui g di G e i punti di \bar{H} tale che se un continuo g di G su \bar{A} e un punto P di \bar{H} si corrispondono in T allora le funzioni [9] fanno corrispondere a g il medesimo punto su S che le funzioni [10] fanno corrispondere a P .

Sia $\bar{H} = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{D}_n + H'$ (§ 4, Teorema 9) e siano D_n semplici catene cicliche di tipo A e B . Diciamo S_n le sottosuperficie di S definite dalle [10] su \bar{D}_n . Si ha

$$L(S) = \sum_{n=1}^{(\infty)} L(S_n).$$

5. Sia $\varepsilon > 0$ un numero arbitrario e sia \bar{n} quel primo intero tale che

$$\sum_{n=1}^{\bar{n}} L(S_n) \geq L(S) - \varepsilon.$$

L'insieme

$$\bar{h} = \sum_{n=1}^{\bar{n}} D_n$$

è un emicactoide \bar{h} contenuto in \bar{H} .

Siano A_{n1}, A_{n2}, \dots gli elementi ciclici non degeneri contenuti in \bar{D}_n e S_{n1}, S_{n2}, \dots le relative superficie. Gli A_{ni} sono rombi o doppi coni secondochè \bar{D}_n è di tipo A o B .

Si ha

$$L(S_n) = \sum_{i=1}^{(\infty)} L(S_{ni}).$$

Siano i_n interi tali che

$$\sum_{i=1}^{i_n} L(S_{ni}) > L(S_n) - \frac{\varepsilon}{n}, \quad n = 1, 2, \dots, \bar{n}.$$

6. Supponiamo per fissare le idee che A_{ni} , ($i = 1, 2, \dots, i_n$, $n = 1, 2, \dots, \bar{n}$), sia un rombo. Siano Q_1 e Q_2 gli estremi di esso, più precisamente siano Q_1 e Q_2 i punti che A_{ni} ha in comune con $\overline{D_n - A_{ni}}$; siano P_1, P_2, \dots, P_v i punti (eventuali) interni ad A_{ni} in cui $\bar{D}_{n+1} + \dots + \bar{D}_{\bar{n}}$ tocca A_{ni} . Possiamo supporre che A_{ni} appartenga al piano (u, v) . Sia perciò S_{ni} la superficie

$$S_{ni}: \quad x = X(u, v), \quad y = Y(u, v), \quad z = Z(u, v), \quad (u, v) \in A_{ni}.$$

Ricordiamo qui che, essendo la rappresentazione [10] della superficie S quasi conforme sugli elementi ciclici non degeneri di H , le funzioni $X(u, v)$, $Y(u, v)$, $Z(u, v)$ soddisfano alle seguenti condizioni:

a) $X(u, v)$, $Y(u, v)$, $Z(u, v)$ sono assolutamente continue secondo TONELLI in A_{ni} ;

b) X_u, X_v, \dots, Z_v sono integrabili L^2 in A_{ni} ;

c) $E = G, F = 0$ quasi ovunque in A_{ni} .

Sia r_{ij} una suddivisione di A_{ni} in regioni di Jordan ottenuta mediante rette parallele all'asse u e all'asse v , soddisfacenti alle condizioni del teorema 1 del § 2. Inoltre la distanza tra due consecutive rette di divisione sia $\leq 1/2^k$. Diciamo $r_1, r_2, \dots, r_{N_{ni}}$ quelle sole di tali re-

gioni (rettangoli) nelle quali non cadono (neppure sul contorno) punti P_1, P_2, \dots, P_v e punti della frontiera di \bar{A}_{ni} . Si ha

$$\sum_{j=1}^{N_{ni}} g(r_j) = \sum_{j=1}^{N_{ni}} \left\{ \left[\iint_{K_1} |O(x, y; C_j)| dx dy \right]^2 + \dots \right\}^{1/2},$$

ove abbiamo indicato per semplicità con C_j la proiezione sul piano (x, y) della curva immagine su S_{ni} di r_j^* . Si ha successivamente

$$\sum_{j=1}^{N_{ni}} g(r_j) \cong \sum_{j=1}^{N_{ni}} \left\{ \left[\iint_{K_1} O(x, y; C_j) dx dy \right]^2 + \dots \right\}^{1/2}$$

e, per il teorema citato,

$$\sum_{j=1}^{N_{ni}} g(r_j) \cong \sum_{j=1}^{N_{ni}} \left\{ \left[\iint_{r_i} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv \right]^2 + \dots \right\}^{1/2}.$$

Ma l'ultimo membro per $s \rightarrow \infty$ approssima l'integrale

$$G(S_{ni}) = L(S_{ni}) = \iint_{\bar{A}_{ni}} \left\{ \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right)^2 + \dots \right\}^{1/2} du dv = \iint_{\bar{A}_{ni}} \sqrt{EG - F^2} du dv$$

e quindi esiste un s e perciò un particolare gruppo di regioni $r_1, r_2, \dots, r_{N_{ni}}$ di \bar{A}_{ni} tali che

$$G(S_{ni}) \cong \sum_{j=1}^{N_{ni}} g(r_j) \cong G(S_{ni}) - \frac{\varepsilon}{i_n \cdot \bar{n}}.$$

Sostituiamo ora i rettangoli r_i con altri rettangoli r'_i interni ai rettangoli r_j e a lati paralleli così vicini a quelli di r_i che si abbia, per ogni $j = 1, 2, \dots, N_{ni}$,

$$g(r'_i) \cong g(r_i) - \frac{\varepsilon}{N_{ni} \cdot i_n \cdot \bar{n}}.$$

Si operi in modo analogo se \bar{A}_{ni} anziché un rombo è un doppio cono. Siano

$$r'_{nij}, \quad j = 1, 2, \dots, N_{ni}, \quad i = 1, 2, \dots, i_n, \quad n = 1, 2, \dots, \bar{n},$$

le regioni di JORDAN così trovate e siano r'_{nij} le loro frontiere.

7. Consideriamo ora di nuovo la regione \bar{A} . Siano L_{nij} e B_{nij} gli insiemi dei punti (u, v) di \bar{A} appartenenti rispettivamente ai componenti

g di G che corrispondono per la T ai punti di r_{nij}^* e r_{nij} . Gli insiemi \mathcal{L}_{nij} sono continui che separano \bar{A} e non hanno punti in comune con A^* . I punti di B_{nij} sono separati dai punti di A^* dai punti di $\bar{\mathcal{L}}_{nij}$. Infine la frontiera B_{nij}^* di B_{nij} è contenuta nel relativo insieme \mathcal{L}_{nij} .

Sia $\delta > 0$ un numero minore della minima mutua distanza tra gli insiemi \mathcal{L}_{nij} e minore della distanza tra gli insiemi $\bar{\mathcal{L}}_{nij}$ e A^* .

Dividiamo il piano (u, v) , mediante rette parallele agli assi u e v ed equidistanti, in tanti quadrati p_{rs} . Sia $1/2^p < \delta/3$ la loro comune distanza, p intero. Sia $\Sigma_{nij; p}$ il poligono *semplice* costituito di un numero minimo di quadrati p_{rs} che contiene nel suo interno $\bar{\mathcal{L}}_{nij}$ e quindi anche B_{nij} . Ogni punto di $\Sigma_{nij; p}^*$ gode della proprietà di appartenere ad un quadrato q_{rs} contenente almeno un punto di $\Sigma_{nij; p}$. I poligoni $\Sigma_{nij; p}$ inoltre, se p è sufficientemente grande, sono l'uno esterno all'altro ⁽³⁹⁾.

$\Sigma_{nij; p}^*$ è una curva di JORDAN alla quale corrisponde in \bar{H} per la T una curva $\gamma_{nij; p}^*$. Si ha

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|\gamma_{nij; p}^*, r_{nij}^*\| = 0$$

e quindi esiste un intero p tale che per ogni j, i, n si ha

$$g(\Sigma_{nij; p}) \geq g(r_{nij}^*) - \frac{\varepsilon}{N_{ni} \cdot i \cdot n}.$$

Dividiamo infine \bar{A} in regioni di JORDAN R_i in modo che le regioni $\Sigma_{nij; p}$ siano anche regioni R_i .

(39) Dimostriamo che ciascuno degli insiemi \mathcal{L}_{nij} si può congiungere con la frontiera A^* di A mediante un continuo t_{nij} che non ha punti in comune con nessuno dei rimanenti insiemi $\bar{\mathcal{L}}_{nij}$. In forza del Lemma enunciato alla fine del § 4, ne seguirà allora che esistono in A certi poligoni semplici π_{nij} , a due a due senza punti interni in comune, in numero uguale a quello degli insiemi $\bar{\mathcal{L}}_{nij}$, ciascuno dei quali contiene nel suo interno il corrispondente insieme $\bar{\mathcal{L}}_{nij}$. Indicata con $\delta' > 0$ la minima delle distanze $\delta(\bar{\mathcal{L}}_{nij}, \pi_{nij}^*)$, per ogni p tale che $1/2^p < \delta'/2$ i poligoni $\Sigma_{nij; p}$ risulteranno completamente interni al relativo poligono π_{nij} .

Osserviamo anzitutto che il rettangolo r_{nij}^* appartiene all'elemento ciclico non degenero A_{ni} .

1° Caso: Sia A_{ni} un rombo. Allora A_{ni} appartiene all'insieme base \bar{B} di H . Sia l una poligonale semplice congiungente un punto di r_{nij}^* con la frontiera A_{ni}^*

Si ha

$$\begin{aligned} G(S) &\supseteq \sum g(R_i) \supseteq \sum_{n,i,j} g(\Sigma_{nij}) \supseteq \sum_{n,i,j} g(r'_{nij}) - \varepsilon \supseteq \sum_{n,i,j} g(r_{nij}) - 2\varepsilon \supseteq \\ &\supseteq \sum_{n,i} G(S_{ni}) - 3\varepsilon = \sum_{n,i} L(S_{ni}) - 3\varepsilon \supseteq \sum_n L(S_n) - 4\varepsilon \supseteq L(S) - 5\varepsilon. \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di ε segue $G(S) \supseteq L(S)$. Ma sappiamo che è $G(S) \leq L(S)$ e quindi

$$G(S) = L(S).$$

Il teorema 1° è con ciò dimostrato.

di \bar{A}_{ni} non avente punti in comune con nessuno dei rimanenti rettangoli \bar{r}'_{nij} appartenenti ad A^*_{in} , ciò che è possibile perchè i rettangoli \bar{r}'_{nij} sono tutti esterni l'uno all'altro e non hanno punti in comune con A^*_{ni} . Sia t_{nij} il continuo costituito di tutti i punti di \bar{A} la cui immagine per la T cade in l . Manifestamente t_{nij} congiunge A^* con $\bar{\varepsilon}_{nij}$ e non ha punti in comune con i rimanenti insiemi $\bar{\varepsilon}_{nij}$.

2° Caso: Sia \bar{A}_{ni} un doppio cono. Allora \bar{A}_{ni} appartiene alla semplice catena ciclica \bar{D}_n di tipo A . Consideriamo le semplici catene cicliche D_1, D_2, \dots, D_n . D_1 è certo di tipo B . Per fissare le idee supponiamo D_2, D_3, \dots, D_n di tipo A . Sia M_1 il punto in cui D_n tocca $D_1 + D_2 + \dots + D_{n-1}$. Q_1 appartenga a D_{n_1} , $n_1 < n$. Sia M_2 il punto in cui D_{n_1} tocca $D_1 + D_2 + \dots + D_{n-1}$. Q_2 appartenga a D_{n_2} , $n_2 < n_1$; ...; sia M_m il punto, appartenente a D_1 in cui $D_{n_{m-1}}$ tocca $D_1 + D_2 + \dots + D_{n_{m-1}-1}$. Sia Q_1 quello dei punti estremi del doppio cono \bar{A}_{ni} che separa \bar{A}_{ni} da M_1 e congiungiamo r^*_{nij} con Q_1 mediante una linea semplice tutta costituita di punti del doppio cono \bar{A}_{ni} e non avente punti in comune con nessuna delle rimanenti regioni di Jordan r'_{nij} appartenenti ad \bar{A}_{ni} . Congiungiamo Q_1 a M_1 mediante una linea semplice tutta costituita di punti di D_n e non avente punti in comune con alcuna delle regioni di Jordan r'_{nij} appartenenti ai doppi coni \bar{A}_{ni} di D_n , ciò che è possibile perchè M_1 , che è uno dei punti P_i , considerati nel n. 6, è esterno a tutte le regioni di Jordan r'_{nij} . Congiungiamo in modo analogo M_1 a M_2 , M_2 a M_3 , ..., M_{m-1} a M_m e infine M_m con un punto della frontiera D_1^* di D_1 . Sia l la linea semplice così costruita. Il continuo t_{nij} costituito da tutti i punti di \bar{A} la cui immagine per la T cade in l congiunge A^* con $\bar{\varepsilon}_{nij}$ e non ha punti in comune con nessuno dei rimanenti insiemi $\bar{\varepsilon}_{nij}$.

Mecchanica (Idraulica). — *Efflusso sotto paratoie piane e a settore. Risultati teorici e sperimentali.* Nota di BRUNO GENTILINI, presentata ⁽¹⁾ da UMBERTO CISOTTI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Il processo di efflusso dalla luce soggiacente a una paratoia piana inclinata (fig. 1 a) disposta in un canale rettangolare con fondo orizzontale, ha formato oggetto di scarse determinazioni sperimentali. Fino a pochi anni or sono le nostre conoscenze si riducevano ai risultati di alcune sommarie determinazioni di HORTON ⁽²⁾ coordinati sulla base di una espressione di incerta attendibilità stabilita nel 1926 da KOCH e CARSTANJEN ⁽³⁾ per il coefficiente di contrazione della vena. Solo nel 1937, ad

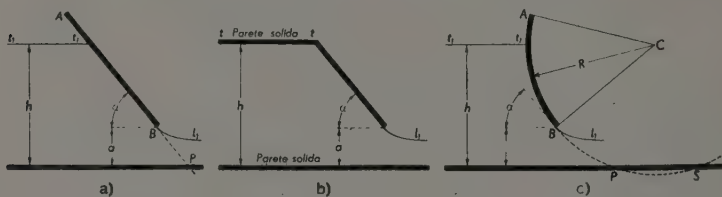


Fig. 1.

opera di FAWER ⁽⁴⁾, il processo stesso ha formato oggetto di una prima sistematica serie di determinazioni sperimentali. La ricerca è stata compiuta con luci di ampiezza assai modesta (2 o 3 cm), ma presenta un interesse particolare, perchè i dati raccolti sono stati riferiti alla soluzione fornita fin dal 1907 da CISOTTI ⁽⁵⁾ per l'efflusso piano dal recipiente a pareti poligonali di figura 1 b. L'elaborazione dei dati ha dimostrato un

⁽¹⁾ Nell'Adunanza del 19 dicembre 1941-XX.

⁽²⁾ HORTON, *Discharge coefficients for tainter gates*. « Eng. N. Record », 4 gennaio 1934.

⁽³⁾ KOCH-CARSTANJEN, *Bewegung des Wassers...* Berlino, 1926.

⁽⁴⁾ FAWER, *Étude de quelques écoulements permanents à filets courbes*. Losanna, 1937.

⁽⁵⁾ CISOTTI, *Vene fluenti*. « Rend. Circ. Mat. di Palermo », tomo XXV (1908).

accordo soddisfacente fra i coefficienti di efflusso deducibili dalla soluzione teorica e quelli rilevati sperimentalmente.

Atteso l'interesse di questa constatazione, abbiamo creduto opportuno riprendere ed ampliare il confronto suddetto. La soluzione di Cisotti si presenta, infatti, atta a rappresentare il processo di efflusso in parola, come si riconosce osservando che il pelo libero $t_1 t_1$ della corrente di alimentazione della luce non si discosta in misura apprezzabile dall'orizzontale (andamento della traccia $t-t$ della parete del recipiente di fig. 1 b) e che la velocità sul profilo l_1 della vena effluente è sensibilmente costante.

Sotto questo aspetto, anzi, la soluzione stessa sembra applicabile, nei riguardi della stima della portata effluente, anche alla luce soggiacente alla paratoia a settore (fig. 1 c) qualora si tengano presenti note considerazioni di LEVI CIVITA⁽⁶⁾ e CISOTTI⁽⁷⁾ circa l'influenza che sul valore del coefficiente di contrazione ha la forma del recipiente nelle immediate prossimità dell'orificio.

Merita osservare in proposito che l'Horton⁽²⁾ paragonando alcuni sommari risultati sperimentali relativi rispettivamente alla luce di figura 1 a soggiacente alla paratoia piana ed alla luce di figura 1 c soggiacente alla paratoia a settore, ha riscontrate differenze assai modeste (dell'ordine di qualche per cento) fra le portate effluenti, a pari valori di h , a ed α , dalle due luci in parola.

Abbiamo avuto di recente occasione di riprendere in esame nel Laboratorio di Idraulica del R. Politecnico di Milano il processo di efflusso libero sotto paratoie piane ed a settore. Le constatazioni raccolte valgono a riconsocere le uniformità fra i due tipi di efflusso e l'attitudine della soluzione teorica a rappresentarli.

Abbiamo rilevato anche alcune distribuzioni della pressione sia sul paramento della paratoia piana che su quello della paratoia a settore. Questi risultati hanno consentito di estendere anche nei riguardi della distribuzione della pressione il confronto fra teoria (Cisotti) ed esperienza, già iniziato da FAWER con riferimento ai coefficienti di efflusso.

Inoltre essi valgono a saggiare l'attendibilità di due procedimenti suggeriti da KULKA⁽⁸⁾ per il calcolo delle distribuzioni suddette. Si tratta di procedimenti piuttosto arbitrari ma frequentemente citati nella letteratura tecnica. Essi presuppongono che le traiettorie che convergono verso la luce soggiacente alla paratoia piana possano essere sostituite con quelle relative ad un pozzo disposto (v. fig. 1 a) nella traccia P dell'in-

(⁶) LEVI CIVITA, *Sulla contrazione delle vene liquide*. «Atti R. Ist. Veneto Scienze Lett. e Arti», 1905.

(⁷) CISOTTI, *Sulla contrazione delle vene liquide*. «Atti R. Ist. Ven. Scienze Lett. e Arti», 1915.

(⁸) KULKA, *Der Eisenwasserbau*. I. Ernst, Berlino, 1928.

contro del paramento bagnato col fondo del canale, cioè con rette passanti per P e che lo stato di moto a monte della luce soggiacente a una paratoia a settore possa invece essere assimilato a una parte di quello che sarebbe determinato da un pozzo e da una sorgente di eguale portata disposti nei punti di incontro della circonferenza cui appartiene il settore con la traccia del fondo del canale (punti P ed S di fig. 1 *c*).

La presente nota espone particolarmente il confronto fra i risultati teorici e le constatazioni sperimentali. Circa altri rilievi di carattere più spiccatamente tecnico rimandiamo a una nostra recente pubblicazione ⁽⁹⁾.

Desideriamo, infine, esprimere al prof. CISOTTI, che oltre a presentare questa nota ci ha anche dato utili consigli durante una sua gradita visita alle esperienze in corso, i nostri vivi ringraziamenti.

Nella elaborazione del materiale sperimentale raccolto in merito alla portata effluente dalle due luci in questione, abbiamo fatto riferimento al coefficiente di efflusso definitivo dall'espressione:

$$\mu = q/la\sqrt{2gh}$$

essendo (v. figg. 1 *a* e 1 *c*)

q la portata effluente,

l la larghezza del canale (e della luce),

a l'apertura della luce (altezza del bordo della paratoia sul fondo del canale),

h il tirante (altezza sul fondo del canale) della corrente di alimentazione,

g l'accelerazione di gravità.

A definire la luce soggiacente alla paratoia a settore di raggio R abbiamo assunto (v. fig. 1 *c*) insieme con la larghezza l e l'altezza a , l'inclinazione α che il piano tangente al suo labbro forma con l'orizzontale. Gli stessi tre valori l , α ed a , bastano a definire la luce di figura 1 *a* soggiacente alla paratoia piana inclinata dell'angolo α , cioè la luce alla quale si perverrebbe partendo da quella di figura 1 *c* aumentando oltre ogni limite il raggio R del settore.

Indichiamo con C il coefficiente di contrazione fornito da Cisotti e osserviamo che la somma $Ca + q^2,2gl^2C^2a^2 = H_v$ rappresenta l'energia specifica (rispetto al fondo del canale) delle particelle liquide che attraversano la sezione contratta della vena. Se l'efflusso non è accompagnato da perdite di carico — come si suppone — questa energia deve essere eguale a quella $H_m = h + q^2,2gl^2h^2$ che le particelle possiedono a monte della

⁽⁹⁾ GENTILINI, *Efflusso delle luci soggiacenti alle paratoie piane inclinate e a settore*. « L'Energia Elettrica », giugno 1941.

luce. Dall'ammessa uguaglianza $H_v = H_m$ si ricava la seguente espressione teorica per il coefficiente di efflusso:

$$\mu = C \left(\frac{1}{1 + \frac{Ca}{h}} \right)^{1/2}.$$

La soluzione teorica di CISOTTI fornisce C in funzione di h/a e di α . Il coefficiente di efflusso μ risulta quindi funzione di h/a e di α . Agli stessi parametri si è fatto riferimento nella elaborazione dei rilievi sperimentali. Questi vennero compiuti operando con due paratoie — una piana e l'altra a settore di raggio $R = 50$ cm — in legno laccato e larghe cm. 16,1. Esse vennero successivamente disposte in uno stesso canale a pareti di vetro con fondo orizzontale pure in legno laccato. Le inclinazioni α furono le seguenti: 15° , 30° , 45° , 60° , 75° e 90° .

Le aperture a diverse, da circa 3 a circa 9 cm.

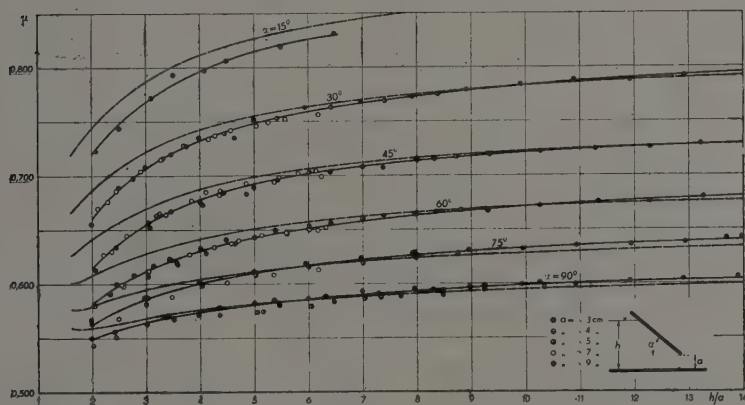


Fig. 2.

La figura 2 riguarda le luci soggiacenti alla paratoia piana inclinata. In essa i valori sperimentali di μ (circa 200) sono rappresentati in funzione di h/a e di α . Insieme con le curve interpolari dei risultati sperimentali (una per ciascuna delle inclinazioni α), sono tracciate anche (linee a tratti) le curve cui dà luogo la precedente espressione teorica di μ . Si riconosce un accordo assai soddisfacente fra le due serie di valori.

I coefficienti di efflusso sperimentali coincidono perfettamente per $\frac{h}{a} = 6 \div 9$ con i corrispondenti coefficienti teorici (Cisotti) e sono invece leggermente inferiori per i valori di h/a minori di $6 \div 9$: il distacco si rende più sensibile col diminuire sia dell'inclinazione α sia del rapporto h/a . In ogni modo, però, lo scostamento massimo è dell'ordine del 5 %.

Per valori di h/a maggiori di $6 \div 9$ le curve sperimentali seguono molto da vicino quelle teoriche con tendenza a superarle leggermente: qui lo scostamento massimo, nel campo coperto dalle prove, non supera l'1 %.

Questo particolare andamento delle curve interpolari dei valori sperimentali rispetto a quelli teorici può essere spiegato se si fa caso che l'efflusso è effettivamente accompagnato da perdite di carico e si pone mente all'andamento dei filetti liquidi che convergono verso la luce. Questi, infatti, anzichè fluire sul paramento della paratoia, come accadrebbe per un liquido perfetto, convergono verso la luce secondo un'inclinazione minore di quella α del paramento. In conseguenza di ciò, se fossero nulle le perdite di carico, i coefficienti di efflusso sperimentali dovrebbero essere maggiori di quelli teorici. Ma le perdite di carico fanno diminuire il coefficiente di efflusso e la diminuzione risulta tanto più sensibile quanto minore è il rapporto h/a perchè esse hanno, percentualmente, un valore tanto più alto quanto minore è lo stesso rapporto.

Si comprende quindi che per carichi piccoli rispetto alla apertura della luce la diminuzione del coefficiente di efflusso dovuta alle perdite di carico superi l'incremento connesso con la minore inclinazione dei filetti e che, invece, per valori grandi del rapporto h/a questo incremento bilanci e anche superi l'azione deprimente delle perdite di carico sul coefficiente di efflusso.

Merita in proposito anche osservare che le situazioni caratterizzate da valori del tirante h piccoli rispetto all'apertura della luce, per le quali, come si è visto, è maggiore lo scostamento fra i coefficienti teorici e sperimentali, sono situazioni che soddisfano di meno delle altre alle ipotesi ammesse nella trattazione teorica: in particolare a quella che comporta velocità costante sul pelo libero della vena.

La figura 3 riguarda le luci soggiacenti alla paratoia a settore. In essa i valori sperimentali di μ (oltre 160) sono rappresentati in funzione di h/a e di α .

Si riconosce anzitutto che le prove compiute non mettono in rilievo alcuna apprezzabile influenza del parametro R/a sul valore di μ . Difatti ad ogni coppia di valori h/a ed α corrisponde un valore unico di μ per qualunque valore di R/a (variabile, nelle nostre prove, da circa 6 a circa 16).

L'esperienza conferma, cioè, le considerazioni teoriche di LEVI CIVITA e CISOTTI a norma delle quali il coefficiente di contrazione, e quindi quello di efflusso, di un orificio praticato nella parete di un recipiente è determinato (oltre che dal carico) principalmente dalla forma del recipiente in *prossimità* dell'orificio.

Nella figura 3, unitamente alle curve interpolari dei risultati sperimentali (una per ciascuna delle inclinazioni α) sono tracciate anche (linee a tratti) le curve cui dà luogo la soluzione di CISOTTI, cioè le curve teoriche relative ad un valore grandissimo del rapporto R/a .

L'esame delle due serie di curve - teoriche e sperimentali - dimostra che i coefficienti di efflusso sperimentali sono leggermente inferiori ai coefficienti teorici in tutto il campo di valori h/a coperto dalle prove: il distacco si rende più sensibile col diminuire sia dell'inclinazione α che del rapporto h/a . Lo scostamento massimo è dell'ordine del 5 % (per $h/a = \infty 2,5$) e si riduce rapidamente al crescere di h/a : per $h/a = \infty 5$ esso già non raggiunge il 3 %.

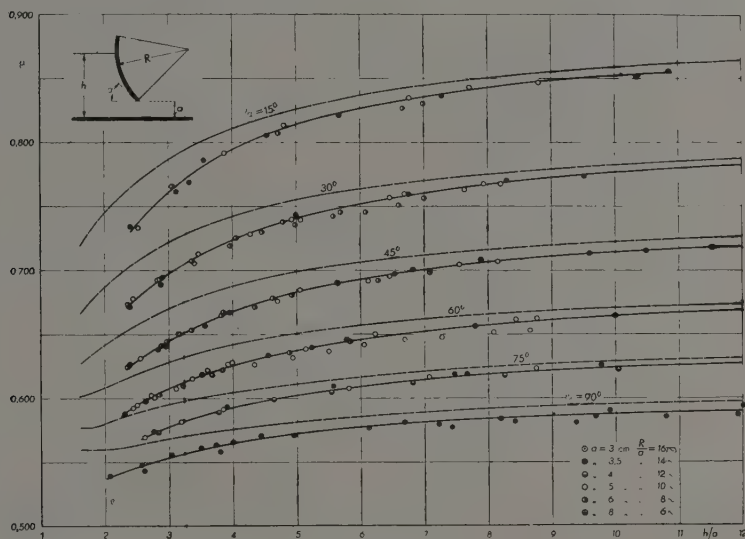


Fig. 32.

L'esame contemporaneo di questo grafico e di quello di figura 2 relativo alla luce soggiacente alla paratoia piana, mette in rilievo una leggera differenza nell'andamento delle due serie di curve sperimentali. Difatti mentre quelle relative alla paratoia a settore soggiacciono sempre alle corrispondenti teoriche, le curve interpolari dei coefficienti di efflusso raccolti con la paratoia piana stanno invece, come già si notò, al disotto di quelle teoriche soltanto per valori di h/a minori di $6 \div 9$ e le sovrastano, sebbene in misura assai ridotta, per $h/a > 6 \div 9$.

La ragione di questo differente andamento può essere facilmente compresa se si fa caso che la paratoia a settore non obbliga i filetti liquidi che convergono verso la luce ad assumere un'inclinazione minore di quella del piano tangente al bordo della luce come succederebbe se il detto piano fosse materializzato col paramento della paratoia piana. Viene con ciò a mancare, nell'efflusso sotto la paratoia a settore, la condizione che vale a far crescere il coefficiente di efflusso sperimentale rispetto

al valore teorico e resta soltanto l'azione delle perdite di carico che dà luogo ad una diminuzione del detto coefficiente rispetto al corrispondente teorico.

Merita osservare ad ogni modo che il coefficiente di efflusso della luce soggiacente a una paratoia piana inclinata dell'angolo α e relativo ad un certo valore del rapporto h/a , supera di non oltre il 2 % il coefficiente che spetta, per lo stesso valore di h/a , alla luce soggiacente alla paratoia a settore disposta in modo che il piano tangente al suo labbro formi con l'orizzontale lo stesso angolo α ⁽¹⁰⁾.

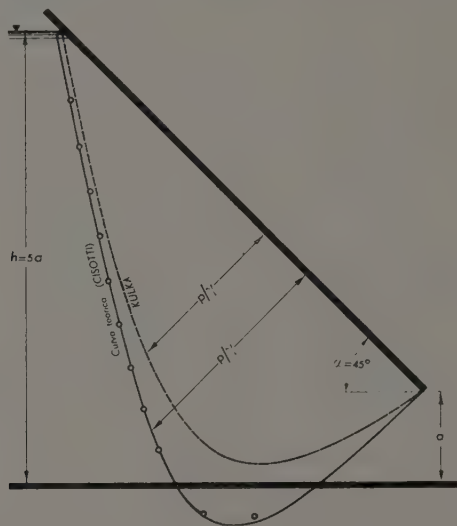


Fig. 4.

Dall'insieme degli elementi ora esposti risulta manifesta la corrispondenza fra le deduzioni teoriche e le constatazioni sperimentali. Essa si completa nella considerazione della distribuzione della pressione rilevata sul paramentro della paratoia piana.

Nella figura 4 sono rappresentate (con i cerchietti) le pressioni sperimentali (in colonna di liquido) rilevate per la luce di apertura $a = 1$ soggiacente alla paratoia inclinata di 45° posta a funzionare con un

⁽¹⁰⁾ Giova notare che, a norma delle esperienze compiute, la conclusione vale fino a che $R/a > 6$; è probabile che essa continui a valere anche per valori minori dell'anzidetto rapporto, ma la precisazione del valore minimo di R/a al disotto del quale la conclusione stessa non sussiste più, dovrebbe formare oggetto di apposita ricerca.

tirante $h = 5$ insieme col diagramma fornito dalle formule di Cisotti (linea intera). Nella stessa figura è rappresentato il diagramma cui darebbe luogo l'accennato procedimento di Kulka.

Appare chiaramente dalla figura che la curva teorica segue con esattezza che non esitiamo a dire completa, i risultati sperimentali: solo l'ultimo punto, verso il bordo della luce, si scosta leggermente, ma lo scostamento resta nei limiti del 5 % ed è spiegabile come conseguenza degli attriti trascurati nella soluzione teorica.

A conclusioni ben diverse, come era da attendersi, dà luogo il confronto con la curva di KULKA. Infatti la pressione sperimentale è in tutti i punti della paratoia assai superiore a quella fornita dal metodo KULKA ed il distacco è particolarmente notevole in vicinanza del labbro della luce.

A constatazioni analoghe conduce il confronto fra le distribuzioni rilevate sperimentalmente sul paramento della paratoia a settore e quelle calcolate con l'accennato procedimento del Kulka.

Geologia. — *Distinzioni metaniche.* Nota ⁽¹⁾ di FEDERICO SACCO, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

La distinzione tra Metano di pianura e Metano di montagna, si può, anzi si deve fare da chiunque voglia occuparsi seriamente, sia dal punto di vista scientifico sia da quello pratico, delle ricerche di questo elemento, ultimo venuto, ma non il meno importante nella serie dei carburanti che, dapprima come solido carbone, poi come liquido petrolio ed oggi come gassoso metano, rappresentano efficacissimi tributi di energia per lo sviluppo dell'Umanità. Tanto più per noi italiani che, scarseggiando dei due primi, troveremo nel Metano il carburante veramente autarchico; tant'è che in 4-5 anni la sua produzione da poco meno di un milione di metri cubi fu potuta spingere a quasi quattro milioni di metri cubi all'anno, con promessa di ancor migliore sviluppo avvenire.

Del resto detta distinzione fra i due Metani fu già fatta originariamente da quando il VOLTA nel 1776 scoprendo tale gas lo denominò « aria infiammabile nativa delle paludi », mentre lo SPALLANZANI poco dopo (1784) lo indicava, per l'Appennino, come « gas di montagna ».

Eppure a tale distinzione, che ben interpretata potrebbe evitare tante perdite di tempo, tanti sperperi di forze e di danaro e tante illusioni, non si dà generalmente la dovuta importanza, nè dall'industriale che si contenta di trovare il Metano, senza occuparsi d'altro, nè dallo studioso che evita possibilmente un argomento che lo porterebbe alla spinosa questione dell'origine; origine che dalla grande maggioranza è ormai affermata o accettata come organica, mentre si vanno sempre più accumulando dati che ne indicano, per gran parte, l'origine inorganica; ciò specialmente per gli Idrocarburi liquidi (come il Petrolio) di cui i Metani sono l'emanazione gassosa.

Non è qui il caso di ripetere quanto ho già chiaramente esposto più volte, da mezzo secolo ed anche recentemente ⁽²⁾, sull'origine degli Idrocarburi liquidi, perchè è inutile parlare a chi non vuol sentire. Ma pel

⁽¹⁾ Presentata nell'Adunanza del 19 dicembre 1941-XX.

⁽²⁾ F. SACCO, *Considerazioni sull'origine del Petrolio*. (« Atti R. Acc. Sc. Torino », vol. 72, 1937); *Sulla origine inorganica del Petrolio*. (« Riv. Ital. del Petrolio », n. 53, settembre 1937).

Metano naturale la cosa è diversa dovendosene ammettere due ben diverse origini, che quindi rappresentano due diversi tipi, come ho già svolto in due recenti Note ⁽¹⁾.

Vediamo quindi brevemente questi due tipi di Metano che chimicamente è un Idruro di Metile o Protocarburo di Idrogeno, CH₄.

Il Metano del *piano* o *superficiale* o *Gas delle paludi* o *di torbiera* si svolge, come indicano le sue denominazioni, nelle regioni pianeggianti paludose, dove appunto vissero, morirono e si accumularono svariati organismi, specialmente vegetali, i cui resti, spesso poi sepolti (il fenomeno verificandosi anche successivamente più volte) da depositi sabbioso-argillosi, fluvio-lacustri o estuarici, subirono un processo di decomposizione, putrefazione o marcescenza, cioè la fermentazione detta metanica, perchè da essa si svolgono appunto i gas metanici.

Qualcosa di analogo, ma in molto minor scala, verificasi talora per putrefazione di cadaveri, donde il nome di *fiamme* o *fuochi fatui dei cimiteri*.

Ad ogni modo trattasi sempre di Metano di origine organica, come del resto si ottiene anche artificialmente (come *Metano biologico* o *tecnico* o *industriale*), con vari processi, dai rifiuti delle città, ma di cui non è il caso di trattare in questa Nota che riguarda solo i prodotti naturali.

Quanto sopra riguarda i depositi più o meno superficiali; ma se discendiamo nei depositi fluvio-lacustri o estuarici, più o meno profondi, riempiuti i bacini ora più o meno pianeggianti, vi troviamo spesso interstratificati depositi di antiche torbiere lacustri o di estuario, formatesi nell'epoca quaternaria (pliocenica) da cui spesso svolgonsi gas metanici; qualcosa di simile verificasi ma più di rado in depositi lignitici, specialmente pliocenici od anche miopliocenici e persino talora eocenici, in cui i depositi vegetali passarono già, per metamorfismo, allo stato lignitico.

Ancor più limitatamente verificansi emanazioni metaniche da depositi carboniosi (Ligniti compatte, Litantrace, Antracite) dei terreni antichi, in cui il metamorfismo potè accentuarsi molto di più; nel qual caso le emanazioni metaniche, combinandosi con altri gas, formano il famoso *grisou* detonante, donde il nome di *gas delle miniere*.

Quanto a *ricerca* del Metano di pianura, essa può essere indicata alla superficie da emanazioni locali, dalla natura e talora anche dalla tinta più o meno bruna del terreno, piuttosto depresso, da speciali vegetazioni; ma sono sempre le trivellazioni, questi preziosi cannocchiali geologici, come io li denomino, che precisano la presenza di gas metanici. Trivellazioni che spesso furono eseguite per ricerca d'acqua potabile, per cui è

⁽¹⁾ F. SACCO, *Considerazioni sopra le origini e le ricerche del Metano*. (« Atti R. Acc. Sc. Torino », vol. 76, 1941); *Origine e Ricerche del Metano*. (« IV Convegno Nazionale del Metano », Bologna, 1941).

bene tener dietro a tali perforazioni, di cui feci uno studio utile a consuntarsi ⁽¹⁾ per la valle padana. Ma ad ogni modo trattasi di trivellazioni relativamente poco costose sia perchè sono in terreni poco resistenti e in regioni pianeggianti, quindi comode, sia perchè non occorre spingerle a grandi profondità, per lo più tra 30 e 100 metri, quantunque siansi incontrati orizzonti metaniferi anche a 200-300 e più metri.

Tali orizzonti gazogeni corrispondono per lo più a strati sabbiosi, porosi (quindi spesso anche acquiferi verso il basso), coperti da strati più o meno argillosi, poco permeabili, in modo da formare cappello di protezione e di imprigionamento ai gas svolgentisi dai depositi vegetali fermentanti o fermentati.

Anche gli studi geofisici possono servire in queste ricerche. Per la grande Valle padana è noto che le regioni più indicate per tali ricerche sono quelle più depresse del Veneto, il Delta padano (l. s.), il Polesine, ecc. Altre pianure, come la pisana, la grossetana, ecc., diedero prodotti analoghi, ma in complesso meno abbondanti e più facilmente esauribili, come è facilmente spiegabile.

Riguardo alla *costituzione chimica* di questi gas, ciò che è assai importante di conoscere sotto vari punti di vista, essa presenta in generale i seguenti caratteri:

1° Metano nella proporzione di circa il 70 %-80 %, raramente sino al 90 %; mentre nel gas di montagna esso è spesso nella proporzione di 90 %-95 % sino al 99 %.

2° Assenza di Idrocarburi superiori al Metano; mentre che nei gas di montagna sonvi sovente tracce di tali Idrocarburi saturi, paraffinici (come Etano, Propano, Butano, ecc.).

3° Presenza di piccole, per lo più, quantità di Idrogeno solforato; elemento che, se abbondante, può anche derivare da formazioni gesso-solfifere; mentre che esso manca nei gas di montagna.

4° Presenza di sostanze ammoniacali, specialmente di Azoto, con percentuali sovente minime, ma talora anche 5 %-10 % e talora sin oltre il 30 %; mentre che tali sostanze mancano o sono rappresentate soltanto da minime quantità di Azoto nei gas di monte.

5° Presenza di anidride carbonica con percentuali che vanno da 1 % a 7 %-8 %, talora persino al 19 %, mentre nei gas di monte essa manca od è solo rappresentata da tracce minime.

6° Assenza di Iodio e di Bromo che generalmente appaiono, anche solo in traccia, nei gas di montagna.

(1) F. SACCO, *Geoidrologia dei Pozzi profondi della Valle padana*. (« Ann. R. Acc. Agric. », Torino, vol. LIV-LV, 1912) e (« Uff. idrogr. del Po », Parma, 1924, 1933).

Però tali dati presentano spesso varianti dovute specialmente alla natura chimica dei terreni attraversati dai gas prima di essere captati.

Notisi poi che questi gas sono generalmente collegati a depositi sedimentari torbiferi o lignitiferi, per lo più quaternari o pliocenici, mentre i metani di montagna si trovano in terreni di qualunque età, di rado nei quaternari, talora in colleganza con rocce e minerali endogeni.

Riguardo al carattere della *pressione* presentata dai gas di pianura essa è generalmente assai poca, raramente di 8-10 atmosfere quando proviene da 200-300 metri di profondità, generalmente assai minore.

Dal punto di vista del *rendimento*, si può notare:

1° Il potere calorifico è, in media, di circa 7.500-8.000, assai raramente di 9.000 calorie, mentre nei gas di monte tale potere calorifico si aggira generalmente sulle 9.000-10.000, giungendo talora persino a 12.000 calorie, in rapporto alla più ricca percentuale di Metano e di Idrocarburi superiori.

2° Il rendimento è generalmente limitato a pochi anni, spesso a meno di un decennio, ciò che obbliga a moltiplicare le trivellazioni in estensione fino al riconoscimento che la zona metanifera è quasi esaurita, anche dopo aver approfondito la trivellazione per riconoscerne lo sviluppo verticale che può presentarsi con ripetuti orizzonti. Mentre i giacimenti di gas di monte possono essere fruttiferi per secoli, tanto più se si ricercano in estensione ed in profondità anche grandissime.

3° Di tale carattere, di un relativamente facile esaurimento dei gas del piano, deve naturalmente tenere molto conto nelle inerenti spese di captazione, compressione, conduttura, ecc., che possono essere più o meno presto quasi inutilizzate, mentre ciò avviene assai più raramente per i gas di monte.

* * *

Il *Metano di monte*, detto anche *gas del petrolio*, *profondo*, *tellurico*, *endogeno*, ecc., anzitutto è, a mio parere, un gas di *origine inorganico*, per processi chimici, di natura tellurica, verificatisi in condizioni di profondità, temperatura, pressione, ecc., più o meno notevoli, specialmente nel passato, fors'anche rappresentando il residuo di fenomeni cosmici; mentre l'origine organica, quantunque provata (come anche quella inorganica) da esperienze di laboratorio, deve essere in natura assai più rara. Tale idea sull'origine del Metano di monte, si basa sui seguenti fatti principali:

a) presenza del Metano in manifestazioni esclusivamente endogene (Vulcani, Fumarole, Soffioni, ecc.), in rocce vulcaniche (Lave, Basalti, Tufi, ecc.), in Meteoriti ed in Pianeti ancora gassosi;

b) presenza frequente in formazioni sedimentarie di tipo abissale (come sono per esempio le Argille scagliose dell'Appennino) collegate con minerali metalliferi di carattere endogeno e con rocce endogene di tipo abissale, come sono le Serpentine, le Diabasi, le Eufotidi, ecc.;

c) presenza in terreni di qualunque età, anche senza resti organici, vegetali od animali, fossili, mentre viceversa molto sovente manca in terreni riccamente fossiliferi;

d) con tracce di Bromo, Iodio ed Idrocarburi superiori, che sono di origine specialmente endogena. I dati esposti nella tabella di pag. 381, sembrano abbastanza parlanti su tale riguardo;

e) accumuli talora enormi, tanto che (come nella famosa regione di Baku) se ne fa l'estrazione intensissima da molti decenni senza esaurirli, ciò che sembra indicare piuttosto un carattere cosmico che non semplicemente sedimentario;

f) più che non in vere «rocce madri», i metani, come i petroli, si trovano piuttosto in rocce variamente porose, spesso protette da depositi poco permeabili, cioè in condizioni fisiche, litologiche e tettoniche tali da permettere l'assorbimento e la ritenuta di gas metanici (come di petroli) salienti dalle profondità;

g) presenza di questi Idrocarburi anche nelle più grandi profondità (4.000-5.000 metri) a cui giunsero finora le trivellazioni, senza rapporto coll'età, anche antichissima, dei terreni che li contengono;

h) connessione generale colle regioni sismico-vulcaniche della Terra, cioè colle regioni più dislocate e più fratturate, dove quindi fu più facile l'ascesa degli idrocarburi tellurici dalla profondità di origine;

k) qualche colleganza coi maggiori periodi diastrofici (come, per esempio, l'erciniano e l'alpino) che, per i fenomeni di enormi pressioni, di numerose fratturazioni e faglie grandi e piccole, ecc., che li accompagnarono, promossero, favorirono e facilitarono l'ascensione degli Idrocarburi profondi sino ad essere in gran parte assorbiti e ritenuti dai terreni, prevalentemente sedimentari, più o meno porosi, che ne rimasero così più o meno impregnati, simulando quasi «rocce madri», come sono spesso ritenuti.

Riguardo alla *ricerca* ed azioni annesse pel Metano di monte si possono fare le seguenti considerazioni.

1° Esso si presenta in regioni collinose o montuose, più o meno accidentate, spesso a costituzione più o meno argillosa e quindi un po' franabili (come sull'Appennino) e perciò in condizioni topografiche, stradal e litologiche alquanto difficili.

2° Per la *ubicazione* delle regioni più probabilmente metanifere è sempre consigliabile di seguire la *regola delle antichinali*, per quanto sovente tali Idrocarburi (come i Petroli) possano spesso anche trovarsi ad impregnare le gambe delle antichinali.

Per l'Appennino settentrionale è opportuno consultare le Carte geologiche (ora tutte pubblicate al 100.000) e quelle tettoniche, interpretando però quelle interessanti di Camerana e Galdi annesse alla Memoria sopra *I giacimenti petroliferi dell'Emilia* (*Mem. descr. Carta geol. Italia*, vol. XIV, 1911) nel senso che le formazioni arenacee (*Macigno*) eoceniche, credo che stiano sopra e non sotto alle Argille scagliose, cretacee; un'altra Carta geotettonica è annessa al volume di F. SACCO, *L'Appennino settentrionale e centrale* (1904).

Con dette e consimili Carte geologiche e tettoniche si possono seguire gli allineamenti argilloscistosi ofiolitiferi, in complesso anticlinalici, regolari o rovesciati, che rappresentano le zone più metanifere o almeno più facili per raggiungere le formazioni metanifere (ed a maggior profondità quelle petroleifere) nella formazione delle Argille scagliose, nonché nei terreni eocenici e miocenici che vi si appoggiano.

Per il resto dell'Appennino può consultarsi la Cartina annessa alla mia Nota sopra *La facies del Cretaceo nell'Appennino*. (« Atti R. Acc. Sc. Torino », vol. 66, 1930), dove sono delineate dette zone, di cui una giunge fin presso Roma (*Caput olei*).

In ogni caso le ricerche degli Idrocarburi devono sempre basarsi su cognizioni, minute più che possibile, di Geologia, di Tettonica, di Litologia, di Geofisica, di Chimica, ecc.

Se le « Argille scagliose » possono considerarsi le attuali « rocce madri » degli Idrocarburi, questi, più che non nelle argille, sono specialmente accumulati nelle zone arenacee o calcaree più porose inglobate nella formazione argillosa, come anche talora nei terreni, pure marnoso-calcarei o marnoso-arenacei più giovani, che si appoggiano a detta formazione argilloscistosa.

3° Naturalmente rappresentano ottimi indizi le *emanazioni* idrocarburiche naturali, sia libere (come quelle famose di Pietramala, Barigazzo, Porretta, ecc.; i cosiddetti fuochi fatui, le fontane ardenti, ecc.), sia quelle più o meno profonde segnalate da Salse, Bulicami, Barboi, Vulcanelli e simili, tanto frequenti nell'Appennino ed in Sicilia; giacché, per quanto possano anche talune originarsi per fenomeni di locali marcescenze di vegetali, rappresentano invece generalmente l'affioramento di gas metanici provenienti dalle profondità attraverso i terreni miocenici e pliocenici, protettivi e quindi inferiormente metaniferi, come nella regione marginale dell'Appennino Emiliano; dove gli scisti ofiolitiferi sono più argillosi, più protetti dai manti miocenici e pliocenici e quindi si presentano quasi ovunque impregnati di idrocarburi in via di esalazione, ma ancora in gran parte conservati; specialmente in basso. Per cui penso, e indicai da oltre un ventennio, che il problema degli Idrocarburi in Italia è specialmente un problema di profondità, oltre che di copertura e protezione naturale; sempre tenendo presente che trattasi

di impregnazioni più o meno copiose, non di veri serbatoi. Invece nella regione interna dell'Appennino settentrionale gli scisti ofiolitiferi sono piuttosto compatti (*galestri*), più duri; inoltre le enormi pressioni verificatesi nei diastrofismi che fecero emergere l'Appennino assiale, dovettero spremere gli Idrocarburi che intanto andavano sprigionandosi, per milioni di anni, verso la superficie, sperdendosi così nell'atmosfera, in modo da risulterne il loro quasi esaurimento.

4° Per la *captazione* dei gas metanici, dopo i metodi un po' primitivi dei pozzi profondi pochi metri e coperti con campana ad imbuto rovesciato, ciò che ha il vantaggio del poco costo e della moltiplicazione facile per le ricerche dei punti più metaniferi, è naturalmente più efficace la trivellazione che, pur essendo assai più costosa, permette la ricerca in profondità anche oltre 1.000, 2.000 metri col vantaggio frequente di incontrare metani anche superiori, etanici, ecc., con maggior potere calorifico, e talora permettendo anche di raggiungere orizzonti petroliferi, come si è verificato a Pietramala verso gli 800 metri di profondità.

5° Quanto al *rendimento* della produzione metanica è importante notare che esso è assai grande, prolungandosi per decenni e per secoli, anzi per millenni, poichè si conoscono nell'Asia emanazioni già utilizzate dai Cinesi parecchie migliaia d'anni fa: sono ricordate da Plinio altre analoghe nell'Appennino settentrionale, già quindi attive due millenni fa e che da secoli si utilizzano per riscaldamento, illuminazione, ecc.; ciò che può spiegarsi sia per continua, quanto lenta ascensione degli Idrocarburi dalle profondità, sia per il fatto che trattandosi di impregnazioni in formazioni vastissime e potentissime e di emanazioni limitate con ascesa lentissima, deve essere il loro esaurimento tanto lontano da non essere facile prevederlo, almeno in linea generale; qualità certamente assai apprezzabile dal punto di vista della utilizzazione industriale.

6° Circa la *profondità* a cui debbono spingersi le trivellazioni non mi stancherò di ripetere che essa rappresenta una questione essenziale, bensì difficile e costosa ma che ha ancora con sè la speranza dell'avvenire, poichè le formazioni argilloscistose metanifere (e petrolifere) dell'Appennino sono potentissime, nè finora vennero attraversate sino alla base dalle trivellazioni; se gli Idrocarburi non vi si presentano in serbatoi ma in impregnazioni, se queste sono notevoli e la spugna di assorbimento è potente, il risultato può essere importante per quanto un po' costoso. Nè pare improbabile che tali impregnazioni siano talora più ricche e più liquide in profondità dove furono più protette, che non in alto, dove da milioni d'anni si sprigionano nell'atmosfera, tanto più per le enormi pressioni, pigiature, ecc., subite durante i parossismi orogenetici.

A proposito della profondità è interessante ricordare che la presenza sovraccennata degli *Idrocarburi superiori* al Metano ci può fornire qualche idea su tale questione, come risulta dalla seguente tabella tratta dalla

interessante Nota dell'ing. S. Levi intitolata: *Idrocarburi superiori al Metano come indicatori di profondità dei giacimenti di origine delle manifestazioni gassose*. (Rivista « Il Metano », III, giugno-luglio, 1941).

NOME E FORMOLA CHIMICA	Pressione cri- tica in atmo- sfece	Temperatura critica in C°	Profondità della fase liquida in base alla tempe- ratura critica, in metri	Profondità della fase liquida in base alla pres- sione critica, in metri
Metano CH ₄	51,1	59,9		
Etano C ₂ H ₆	46,3	35 (32)	201,30	1115
Propano C ₃ H ₈	46	97	200,00	3201
Butano C ₄ H ₁₀	36,2	153 (150)	157,30	5049
Pentano C ₅ H ₁₂	33,8	197,2	146,95	6507
Esano C ₆ H ₁₄	30,7	234,5	133,47	7738
Eptano C ₇ H ₁₆	27,4	266,8	119,13	8804
Ottano C ₈ H ₁₈	26	296,4	113,00	9781
	Grado geotermico = 33 M/1° C.		Densità media delle rocce = 2,3	

Trattasi naturalmente di dati piuttosto teorici, tante essendo le cause (litologiche, tettoniche, idriche, chimiche, ecc.) che possono farli variare, ma possono almeno servire come indicazione di massima.

Anche la *temperatura* potrebbe servire di qualche indicazione sulla profondità di origine degli Idrocarburi, tenendo conto del grado geotermico dei terreni attraversati; ma in proposito si hanno solo pochi dati ed anche alquanto incerti in causa della relativa lentezza di salienza degli Idrocarburi, che perdono così nell'ascesa parte della loro temperatura originaria. Furono già segnalate temperature di una trentina di gradi a meno di 1.000 metri di profondità, per esempio 38° C a — 800 a Pietramala; ma, ripeto, ricerche termiche sui Metani di profondità sono ancora da farsi; ma coi nuovi metodi recentemente escogitati è sperabile che presto si avranno dati in proposito.

Riguardo alla *costituzione chimica* dei Metani molte sono le analisi fatte, specialmente dai proff. LEVI e PADOVANI e recentemente dall'A. G. I. P.; i caratteri principali sono i seguenti:

1° Mancanza di idrogeno solforato. Notisi che le emanazioni o sorgenti solforose, che alcuni tendono a segnalare come indizi di eventuali Idrocarburi, sovente ne sono affatto indipendenti, essendo invece per lo più collegate coi depositi gesso-salini-solfiferi del Mio-pliocene;

2° Mancanza di Sali ammoniacali, salvo eventuali tracce di Ammoniaca;

3° Minime percentuali di anidride carbonica;

4° Abbondanza di Metano, spesso dall'85 % al 98 %;

5° Frequenza di Idrocarburi superiori al Metano (Etano, Propano, Butano, ecc.), specialmente di Etano, con percentuale anche del 10 %-15 %, raramente sino al 30 %-40 %; derivano probabilmente da poco lontani giacimenti petroliferi sotterranei, coi loro termini più volatili, costituendo quasi gas umidi (*wet gas*), per quanto prevalgano i gas secchi (*dry gas*), cioè con solo Metano. Dati che sono anche interessanti rispetto alla profondità originaria di questi gas superiori, secondo la tabella sovraindicata;

6° Frequenti tracce di bromo e di iodio;

7° Potere calorifico tra 9.000 e 10.000 calorie, talora persino di 11.000-12.000 calorie, in rapporto alla minore o maggiore ricchezza in Idrocarburi. Ad ogni modo in generale il valore del Metano tellurico è superiore a quello del Metano delle torbiere.

Naturalmente nell'esame di queste costituzioni chimiche si osservano spesso anomalie, anche assai forti, dipendenti specialmente dalla natura dei terreni diversi (specialmente terziari o quaternari un po' acquiferi) che i gas sono obbligati ad attraversare o ad impregnare venendone così più o meno alterati nella loro composizione chimica originaria; spesso trattasi di differenze locali che cambiano anche in regioni vicine.

A proposito dei terreni coi quali gli Idrocarburi sono collegati, almeno in origine, è da notare che questi terreni sono spesso vulcanici (basalti, lave diverse, tufi, ecc.), oppure di natura abissale (come le *Argille scagliose*) o abissolitica (come le cosiddette *Pietre verdi* in genere), quindi di carattere variamente endogeno, salvo che trattasi di terreni, per lo più sedimentari, di qualunque età, variamente porosi, in cui gli idrocarburi sono giunti per emigrazione nella loro ascensione dalle profondità originarie; mentre invece i gas di pianura sono soltanto collegati con terreni sedimentari non molto antichi, prevalentemente quaternari.

Quanto alla *pressione* presentata dai gas idrocarburi specialmente in quelli fuoriuscenti liberamente dalle trivellazioni con impeto, essa varia assai, ciò che dipende in parte dalla loro fuoriuscita più o meno libera, ma in gran parte dalla profondità loro di origine o, meglio, di attuale partenza; ciò che teoricamente è in relazione con quanto indica la sovraaccennata tabella per gli Idrocarburi superiori.

In generale tale pressione (che per i gas di torbiera è di poche atmosfere) per i gas tellurici oscilla fra 30 e 70 atmosfere, come per esempio mostrarono la trivellazione di Bellena (Fontevivo presso Parma) spinta a —800 metri e quella di Podenzano (prov. di Piacenza) tra i —500 ed i —600 metri. Ma si ebbero anche pressioni di un centinaio di atmosfere,

come per esempio a Novi di Modena, dove si giunse a 1400–1700 m. di profondità. Ciò che farebbe pensare anche ad una utilizzazione in parte meccanica, come nei soffioni toscani; d'altra parte spesso si constatano pressioni molto inferiori, causate da minori profondità d'origine oppure da difficoltà di attraversamento dei terreni, quali potrebbero essere fenomeni tettonici, litologici, idrici, termici, ecc.

* * *

Fin qui si è trattato, per quanto schematicamente, dei due casi principali ben distinti, cioè del Metano di torbiera e di quello tellurico; ma in certe, anche vaste, regioni (come ne è esempio la pianura padana tra le falde appenniniche emiliano-romagnole e l'asse del Po ad un dipresso) le varie formazioni montane vanno ad immergersi sotto l'antistante regione pianeggiante; nel nostro caso è l'Appennino marginale, che va diventando sottopadano e quindi le formazioni appenniniche, mesozoico-cenozoiche, vanno a sottoporsi a quelle quaternarie e terziarie della vicina pianura.

Ecco quindi che in tali regioni il relativo Metano di monte diventa apparentemente di piano, conservando però le sue qualità di gas tellurico, come ho già delineato nella Nota sopra *Il corrugamento Appenninico marginale e subpadano* (« Atti R. Acc. Sc. Torino », vol. LXV, 1930) e *Considerazioni sopra l'origine e la ricerca del Metano in Italia* (« Atti R. Acc. Sc. Torino », vol. LXXVI, 1941). Tale regione, direi a doppia costituzione geologica, si estende, nella pianura padana, dal Casalese al Pavese, Cremonese, Modenese, Centese, ecc., con un'ampiezza di una trentina di chilometri circa; ne sono noti esponenti le famose trivellazioni, di Fontevivo (Parma) di cui il profondo sondaggio eruttò dapprima circa un milione di metri cubi di Metano al giorno, e quelle di Podenzano (Parma) che hanno un rendimento di circa 4.000 metri cubi al giorno dello stesso gas.

In questo caso la ricerca del Metano, complessivamente più difficile ed incerta pel manto neozoico che nasconde i terreni metaniferi più o meno profondi, presenta notevoli diversità, secondo lo spessore, la natura, la tettonica, ecc., dei terreni di copertura, dapprima alluviali e fluvio-lacustri del Quaternario, poi, più in basso, quelli marini terziari che ricoprono a loro volta i terreni più o meno antichi, come quelli delle « Argille scagliose », le cosiddette « Rocce madri » degli Idrocarburi liquidi e gassosi.

Ora in questa serie sedimentaria sottopadana gli Idrocarburi possono trovarsi nelle formazioni quaternarie (caso piuttosto raro) oppure, più frequentemente, nelle formazioni terziarie variamente porose che hanno

assorbito e ritenuto gli Idrocarburi, saliti per emigrazione dal basso, impregnandosene, tanto più quando detti strati porosi sono coperti, protetti ed immagazzinati da depositi poco permeabili, come per esempio le argille del Piacenziano che ne impediscono le libere emanazioni verso l'alto. Trovasi così Metano tellurico o di monte sotto la pianura padana. Oppure bisogna attraversare la serie sedimentaria del Terziario per giungere alla formazione delle « Argille scagliose » idrocarburifere. Risulta ad ogni modo la convenienza di un rilevamento geofisico generale della pianura padana, specialmente meridionale, per riconoscere le nascoste dorsali, più o meno anticlinaliche, per evitare le trivellazioni troppo lunghe e costose nelle regioni sinclinaliche o analogamente depresse e quindi occupate da potenti depositi più o meno sterili.

Del resto fatti analoghi, ma senza il manto neogenico che li maschera, si possono osservare direttamente nel vicino Appennino, dove vediamo, sia il caso degli affioramenti più o meno vasti delle « Argille scagliose » metanifere (come ho segnato sulle Carte geologiche), sia i manti terziari (irregolarmente disposti per vari fenomeni tettonici) un po' impregnati di gas metano.

Così puranche nell'attraversamento delle gallerie ferroviarie transappenniniche (Firenze-Bologna) e di quelle per canali (Val Trebbia, Aveto, ecc.) spesso il *Macigno* eocenico risultò alquanto metanifero. Così pure nella regione Romagnola, lungo un'ampia zona che si sviluppa dall'alta Val Santerno a Palazzolo, a Marradi, Portico, S. Sofia, Bagno di Romagna, ecc. Quivi la serie marnosa-arenaria del Miocene va ad appoggiarsi e spesso anche a ricoprire la serie analoga (*Macigno* l. s.) dell'Eocene tettonicamente assai disturbato, fratturato, ecc.; quindi là vediamo frequenti emanazioni naturali di gas metanici, qua e là già utilizzati e che si possono, con opportune trivellazioni, riscontrare anche abbastanza abbondanti in profondità più o meno grandi. Casi un po' analoghi possono verificarsi nella potente formazione marnoso-arenarea, specialmente miopliocenica, delle Marche, dove però non debbono confondersi i fenomeni in esame con quelli, piuttosto solforosi, collegati alla potentissima formazione gessoso solfifera.

Un caso tuttaffatto speciale può verificarsi nella pianura padana là dove i depositi quaternari o pliocenici, torbiferi o lignitiferi e quindi eventualmente metaniferi (per origine organica) vanno a sovrapporsi a terreni più antichi eventualmente impregnati di metano (di origine tellurica).

Ciò verificasi probabilmente in una larga zona, mediano-orientale, della pianura padana, dove infatti trivellazioni un po' profonde hanno rivelato metani con caratteri un po' misti. In questi casi bisogna procedere con speciale cura di analisi geologica e chimica per riconoscere il fenomeno onde ricavarne le conseguenze pratiche.

Questo caso interessante, ma che lascia incertezza nella separazione delle due formazioni metanifere sottopadane, aumenta l'utilità, per non dire la necessità (a parte il grande interesse scientifico) che Enti statali o parastatali facciano una serie accurata di profonde trivellazioni, precedute ed accompagnate da studi geofisici per delineare le anticlinali gravimetriche lungo due o tre allineamenti dalle falde appenniniche verso le Alpi, onde riconoscere la serie sedimentaria e le sue risorse idriche, torbosolignitiche ed idrocarburiche e poter così utilizzare razionalmente questo patrimonio naturale senza troppo spreco di forze, tempo e denaro come ora si compie in modo alquanto disordinato.

Nè sarebbe improbabile che da tali ricerche razionali risultasse la convenienza, per zone forse limitate, di utilizzare le due formazioni sovrapposte, con Metano organico la superiore e con Metano tellurico l'inferiore.

Le considerazioni esposte nelle pagine precedenti riguardano specialmente la pianura padana e l'Appennino settentrionale, ma ripetonsi un po' analoghe, ma più rare, nell'Appennino centrale e meridionale, ed in Sicilia; dove, per esempio presso Bronte, si trovarono gas idrocarburi anche con oltre il 30 % di Idrocarburi superiori al metano, e con potere calorifico di oltre 10.700 calorie, ciò che preannuncia il Petrolio.; ma di questa Isola si occupa con molta oculatezza il prof. R. FABIANI che riconobbe pure l'origine profonda degli Idrocarburi, per cui non insisto.

Fra le conseguenze che sono in relazione colla distinzione dei sovraccennati diversi casi dei giacimenti metaniferi, vi è anche quella che riguarda i permessi di ricerca e specialmente le istanze per concessione di giacimenti di gas idrocarburi; tali istanze giungono, in questi ultimi anni, sempre più numerose al Ministero delle Corporazioni, venendo esaminate dagli Uffici competenti, come i Distretti minerari, poi la Direzione generale delle Miniere ed infine il Consiglio superiore delle Miniere.

Ma anche in questi casi le domande vengono generalmente esposte con un unico criterio senza tenere speciale conto nè delle varie condizioni geologiche nè del trattarsi di Metano delle torbiere o di Metano tellurico.

È perciò che nell'ultima seduta del Consiglio superiore delle Miniere (26 novembre 1941) essendosi appunto esposte alcune istanze di concessione dei cosiddetti giacimenti metaniferi di diverso tipo, ho creduto opportuno (come geologo) richiamare l'attenzione dei colleghi, in gran parte tecnici o giuristi, sulla distinzione esistente fra i metani e la loro diversa giacitura e le differenze pratiche che ne derivano circa la loro importanza, la loro captazione, la durata del loro rendimento, ecc. e quindi riguardo alla modalità e durata delle concessioni, nascendone una interessante discussione, utile per rischiare la complessa questione.

A questo proposito fu anche adombrata la questione degli eventuali rapporti fra le Società o Aziende che ricercano il Metano e quelle che ri-

cercano il Petrolio; ma appare evidente che quando il Concessionario di una miniera, diciamo così di Metano di monte tellurico incontra con le sue trivellazioni sempre più profonde, in linea di grande massima verso un migliaio di metri, gli Idrocarburi superiori, più o meno vaporosi, passanti infine al petrolio, avendo egli solo la concessione per estrazioni di gas, dovrà sospendere la trivellazione venendo sostituita, colle modalità e gli accordi che verranno stabiliti dalla Legislazione mineraria, da una Società od Azienda petrolifera, probabilmente parastatale.

Anzi sotto tale punto di vista i ricercatori del Metano tellurico, spingendo a sempre maggiore profondità le loro trivellazioni, diventeranno spesso i pionieri delle Società petrolifere; se pure non si verificherà, come pare logico, che una stessa Società ottenga concessione per giacimenti metaniferi e petroliferi.

Paleontologia. — *Nuovo reperto a conferma della miocenicità di un deposito costiero al Nord di Massaua* ⁽¹⁾. Nota di EUGENIA MONTANARO GALLITELLI, presentata ⁽²⁾ dall'Accademico RAMIRO FABIANI.

Con la presente Nota intendo chiudere la serie di ricerche sui materiali di un deposito marino fossilifero affiorante al Nord di Massaua, al margine del Mar Rosso, sul deserto del Sahel eritreo.

In passato, mi occupai della corallofauna ⁽³⁾; recentemente, di Foraminiferi ⁽⁴⁾. Questa volta si tratta di Molluschi, o meglio di un mollusco, rappresentato da una valva destra di Pettinide.

Proviene dai Colli di Ebud (raccoltore ing. C. I. MIGLIORINI, Missione A.G.I.P. 1935-36), ed è l'unico campione di mollusco che sia stato possibile rintracciare nel materiale raccolto in quella regione. Adagiata sul calcare a *Operculina* del quale ho già avuto occasione di parlare, la valva è integralmente conservata, se si eccettui la regione umbonale. La sua faccia interna non è visibile, perchè intimamente incorporata nel calcare.

A differenza dei Foraminiferi, la cui esistenza in questo deposito non era mai stata notata, la forma in parola era stata veduta dallo STEFANINI, il quale vi accennò in una relazione inedita ⁽⁵⁾, citando solo l'esistenza « di impronta di *Chlamys* sp. ». E poichè mi sembrò a un primo esame che

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Geologia della R. Università di Modena.

⁽²⁾ Nell'Adunanza del 19 dicembre 1941-XX.

⁽³⁾ MONTANARO GALLITELLI E., *Sull'età di certi calcari madreporici della fossa eritrea*. « Atti III Congr. di Studi Coloniali ». Firenze, 1937.

Id. Id., *Ricerche sull'età di alcuni depositi insulari e marginali del Mar Rosso*. « Palaeont. It. », vol. XXXIX, pag. 229 e sgg. Pisa, 1939.

⁽⁴⁾ MONTANARO GALLITELLI E., *Ulteriori ricerche sull'età di un deposito eritreo al margine del Mar Rosso*. « Rend. R. Acc. d'Italia », ser. VII, vol. II, fasc. 8, pag. 649. Roma, 1941.

Id. Id., *Foraminiferi, posizione stratigrafica e facies del calcare a Operculina del Sahel eritreo*. « Palaeont. It. », vol. XL, pagg. 67-75, 2 tav. Pisa, 1941.

⁽⁵⁾ Cfr. MONTANARO GALLITELLI, *Ricerche sull'età ecc.*, pag. 216, e Id. Id., *Ulteriori ricerche ecc.*, pag. 649.

la forma si avvicinasse alla miocenica *C. gloriamaris* (Dub.), e poichè lo stato del fossile pareva permetterne un esame esauriente, pensai che fosse prezzo dell'opera arrivare alla determinazione specifica.

Ecco i caratteri della forma. Valva destra, di statura media (altezza mm. 37, larghezza - approssimata per una smangiatura al margine - mm. 35), inequilaterale, pochissimo rigonfia. Angolo apicale, formato da bordi umbonali perfettamente rettilinei, di 85° circa; orecchietta anteriore dilatata in ala, troncata ad angolo acuto all'estremità. Verso il bordo umbonale l'orecchietta termina nel solco bissale, poco incavato e formante una stretta area triangolare. Essendo la conchiglia incorporata nella roccia, non è possibile controllare sotto il solco bissale la presenza e il numero dei denti pettinidiali. L'orecchietta è ornata di costicine, e di una finissima rabescatura sul solco bissale stesso.

Orecchietta posteriore troncata, ma con ogni evidenza assai minore dell'anteriore.

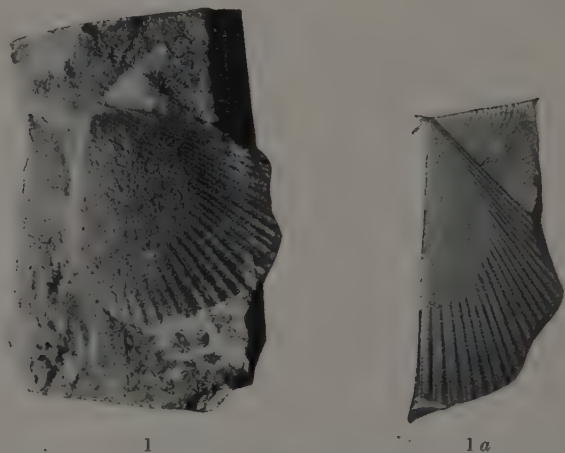


Fig. 1, 1a. - *Chlamys tauperstriata* Sacco. Grand. nat. Colli di Ebud (Sahel eritreo); 1a, particolare poco ingrandito.

Sulla superficie della valva irradiano dall'umbone circa 35 coste arrotondate e depresse, il cui spessore aumenta relativamente poco verso il margine palleale; verso l'ultima parte del loro percorso si intercalano costicine avventizie più o meno rilevate. Tanto le coste quanto le costicine hanno superficie poco meno che glabra: solo giocando con la luce è possibile vedere una leggerissima squamulatura, specialmente verso il lato anteriore della valva. Mancano notevoli strie di accrescimento.

La forma è stata confrontata con le *Chlamys* comuni nelle panchine pleistoceniche e nei depositi attuali del Mar Rosso e dell'Oceano Indiano,

ma non ha nulla a che fare nè con la notissima *C. Lessepsi*, nè con *C. senatoria*, *C. isthmica*, ecc. Inutile che io ne faccia qui un pleonastico esame comparativo; e d'altronde è più che persuasivo un semplice confronto iconografico.

Mi sembrò invece subito a un primo esame molto prossima a quel gruppo di pettinidi che vanno raccolti sotto i nomi di *C. multistriata* (Poli), *C. gloriamaris* (Dub.), *C. substriata* d'Orb. (pars) e *C. tauroperstriata* Sacco.

Con *C. gloriamaris* ha indubbiamente molte affinità, quali dimensioni, superficie poco squamulata delle coste, loro sviluppo; tanto che alla prima occhiata credetti appunto di avere a che fare con questa specie. A un attento esame tuttavia, la nostra forma mostra un numero assai maggiore di coste (35 invece, di 24 circa) e un rilievo assai minore di esse, nonchè un angolo apicale più aperto.

È invece identica a *C. tauroperstriata* dell'Elveziano dei Colli torinesi, in perfetto accordo con la descrizione che della specie danno COSSMANN e PEYROT ⁽¹⁾ su esemplari burdigaliani del bacino di Bordeaux. Essi ascrivono alla specie di SACCO individui già determinati in collezione come *Pecten substriatus* d'Orb. Nome, questo, che secondo gli Autori deve cadere in sinonimia, essendo la correzione *substriatus* applicabile solo alla specie fossile del Crag, che secondo la maggior parte degli Autori non è altro che *C. multistriata* (Poli). Così anche il *P. substriatus* del Bacino di Vienna (Grund), figurato da HÖRNES nella sua classica opera a tavola 64, non è altro che *C. tauroperstriata*.

Caratteristiche della specie sono dunque ⁽²⁾: 1° angolo apicale di circa 80°-90°, assai maggiore sempre che in *C. multistriata* (Poli); 2° coste numerose (35-40) ma sempre depresse, ad ornamentazione ridottissima sempre, se non assente addirittura; 3° strie di accrescimento rudimentali o assenti; 4° angolo apicale formato da linee perfettamente rette. Questo ultimo carattere, come notano COSSMANN e PEYROT, è uno dei più tipici della specie, e assieme agli altri la distacca completamente da *C. multistriata*, a bordi apicali curvati in fuori, oltre che a coste più fortemente squamulate ecc.

È interessante quanto osserva Sacco ⁽³⁾ a proposito della variabilità nel tempo da parte di queste forme, parallelamente alla variabilità di altre, quali il gruppo-*scabrella*: «... nella forma in esame... oltre alla depressione delle coste, ciò che costituirebbe quasi direi un carattere miocenico,

⁽¹⁾ COSSMANN M. e PEYROT A., *Conchol. néog. de l'Aquitaine*, t. II, pag. 315 e sgg., tav. XVI, figg. 30-31.

⁽²⁾ Limitatamente, per quanto ho detto sopra, alle caratteristiche esterne.

⁽³⁾ SACCO F., *I Molluschi terziari del Piemonte e della Liguria*. P. 24, pag. 8, tav. I, figg. 25-28. Torino, 1897.

notansi pure dimensioni assai maggiori, tendenza a semplificazione nella ornamentazione costale », ecc.

Il nostro esemplare eritreo si direbbe che rappresenti proprio lo stadio tipico mediomiocenico della forma. I tipi che più strettamente gli si avvicinano, infatti, per forma generale, apertura dell'angolo apicale e ornamentazione ridotta, sono le cosiddette varietà *simplicula*, *persimplicula*, *rotundula*, istituite da Sacco attorno alla sua specie *tauperstriata* e visibili nella sua opera citata, alle figure 25, 26, 27 e 28 della tavola I. Dico « cosiddette » varietà, poichè sono perfettamente d'accordo con COSSMANN e PEYROT nel ritenerle semplici oscillazioni del tipo « che non caratterizzano nè un giacimento nè soprattutto un livello, poichè si riscontrano tutte insieme alla forma tipo nell'Elveziano dei Colli di Torino ».

Vediamo ora la distr'buzione cronologica e geografica. La forma più antica è citata da COSSMANN e PEYROT ⁽¹⁾ per l'Aquitano aquitanico, dove sarebbe rappresentata da individui piuttosto piccoli, a coste più ridotte di numero e più semplici che nella varietà tipica. La specie trovasi poi ricordata da varie località del Burdigaliano del bacino di Bordeaux. E pure presente dal Bacino di Vienna (HÖRNES, sub *P. substriatus*) e illustrata dall'Hörnès con due ottimi disegni. Soprattutto frequente sembra nell'Elveziano dei Colli di Torino, a Baldissero, Albugnano, dove è rappresentata da tutta una serie di individui varianti. La forma è infine ricordata (Fuchs) per il Miocene egiziano, fino dal 1883, sotto il nome decaduto di *P. substriatus*.

Alla luce di questa e delle precedenti ricerche resta dunque stabilita inequivocabilmente la presenza di Miocene marino sulla sponda occidentale del Mar Rosso, alla latitudine di circa 15° 50'. L'orizzonte sembra mediomiocenico. E ad esso potrei assegnare senz'altro, sulla rigida base comparativa, il depostio eritreo, essendo gli elementi paleontologici tutti favorevoli, nessuno contrario. Tuttavia credo che, come ho già osservato in passato, sia prematura una conclusione in questo senso.

La facies è tipicamente epicontinentale. Sono formazioni madreporiche a *Orbicella Reussiana*, *O. Reussiana* var. *minor*, *O. Derancei*, associate a calcari zeppi di litotamni (*Lithothamnium* e *Lithophyllum*) e di Foraminiferi (*Operculina complanata* var. *Heterostegina*, *Textularia gibbosa*, *Gypsina globulus* ecc.). A questi calcari sono talora associate dolomie; e il PORRO osservò, sottostante ai calcari, un orizzonte gessifero.

Che la facies paleontologica sia di tipo mediterraneo, appare dai lavori precedenti e, per quest'ultima ricerca, dalla distribuzione della specie. E. a questo proposito, ho già avuto occasione di considerare in

(1) COSSMANN e PEYROT, op. cit., pag. 317.

passato l'esistenza di probabili rapporti fra l'orizzonte eritreo al Nord di Massaua e quello del Miocene petrolifero egiziano.

Lo studio del materiale mi ha portato a dimostrare una sintomatica affinità – e in certi punti identità – delle due facies litologica e paleontologica dei due depositi. Essa può così riassumersi: tanto a Suez quanto nel Sahel abbiamo: 1° un orizzonte gessifero sottoposto ai calcari, 2° presenza di calcari compatti e di dolomia. E per la fauna si notano 3° calcari madreporici a *Orbicella Defrancei* in ambedue i depositi, 4° calcari zeppi di *Operculina complanata* var. *Heterostegina* nel Sahel, di *Heterostegina* a Suez (FUCHS, 1883). Della possibilità che queste due ultime forme si identifichino, dato che ambedue erano considerate in passato come *Heterostegine*, ho già fatto cenno altrove ⁽¹⁾.

Nel caso del mollusco qui esaminato, è naturale che il nome *Chlamys tauroperstriata* SACCO (1897) non figuri nelle liste dei bivalvi di Gebel Geneffe dati dal FUCHS (1883) ⁽²⁾. Vedo però che in un elenco di forme che il FUCHS riporta dal FISCHER è citato un *Pecten* sp. cf. *multistriatus* BROCCHI. Ora, abbiamo visto come esistano effettivamente certi punti di somiglianza fra questa specie e la nostra: l'esitazione dell'A. nell'attribuzione lascia pensare, tanto più che il deposito egiziano è ormai senza discussione miocenico, mentre *C. multistriata*, indubbiamente derivata dalla *tauroperstriata*, è limitata ai depositi pliocenici ed attuali.

Ma quello che è certo, è che il FUCHS riconosce la presenza della specie di SACCO, sotto il nome di *P. substriatus*, nei calcari dell'Oasi ai Siwa, così terminando l'esame dei due depositi egiziani: « Emerge da questa descrizione che i depositi miocenici del G. Geneffe mostrano carattere del tutto simile a quello dell'Oasi di Siua. È anche qui essenzialmente un calcare di Leitha ricco di petrefatti, che riposa su argille gessifere » ⁽³⁾.

Anche l'attuale reperto, dunque, rientra nell'ordine normale delle cose, venendo ad aggiungersi ai dati probativi per una sincronizzazione dei due depositi.

⁽¹⁾ MONTANARO GALLITELLI, *Foraminiferi* ecc., pagg. 69-70.

⁽²⁾ FUCHS TH., *Beiträge zur Kenntniss der Miocänfauna Aegyptens und der libyschen Wüste*. « Palaeographica », XXX, pag. 22. Cassel, 1883.

⁽³⁾ Op. cit., pag. 24.

Mineralogia. — *Vesuviana ed altri minerali del passo della Gava presso Voltri.* Nota ⁽¹⁾ di ALBERTO PELLOUX, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Un nuovo giacimento di vesuviana e granato venne scoperto alcuni anni or sono, dai fratelli Leandro e Lelio DE MAGISTRIS, solerti raccoglitori di minerali, nel Gruppo ofiolitico di Voltri e da me visitato, poco dopo, in loro compagnia.

Il giacimento trovasi a Nord Est del passo della Gava, nella regione Coda della Gava ⁽²⁾ e dista circa un'ora di cammino a monte di quello assai noto, di Casa Stellin che fu descritto dal REPOSSI ⁽³⁾. È costituito da grossi blocchi alcuni dei quali hanno volume superiore al metro cubo, che distaccatisi dalla parte più alta del versante sinistro del Vallone della Gava, sono sparsi in un prato, ai piedi di una frana formata da minuto materiale in gran parte serpentinoso.

Stante l'asperità del versante non fu possibile accedere al luogo da cui i blocchi si distaccarono e che sono formati da serpentina in prevalenza compatta ed in in parte scistosa, di tipo antigoritico.

A differenza di quanto il REPOSSI osservò nel giacimento che descrisse, dove la vesuviana è assai rara in confronto del granato abbondantissimo, in questo del Passo della Gava è il primo dei due minerali quello che predomina, mentre il secondo è molto scarso.

La vesuviana, diffusa nei blocchi sotto forma di vene o di masse irregolari entro alla serpentina, è generalmente accompagnata da clorite. Sia la vesuviana come il granato si presentano anche in nitidi cristalli. Quelli di vesuviana, che raggiungono lunghezze di 6 a 7 cm., costituiscono spesso delle druse nelle quali i cristalli, di colore bruno-castagno, sono adagiati parallelamente alle loro facce prismatiche, su vesuviana compatta. In questo caso, di rado presentano facce terminali. Oppure i cristalli, con dimensioni assai piccole, ma molto ricchi di forme, si annidano nelle cavità o sono variamente impiantati, sia sulla vesuviana compatta,

⁽¹⁾ Presentata nell'Adunanza del 19 dicembre 1941-XX.

⁽²⁾ Vedi: Tavoletta di « Urbe » alla scala di 1/2500 dell'IGM.

⁽³⁾ ID., E. REPOSSI, *I minerali della Valle della Gava nel « Gruppo di Voltri »*. In « Natura », 1919.

come anche su druse formate da lamelle di clorite. Cristalli isolati si trovarono inoltre, poco al disotto del passo della Gava, entro ad un terriccio formato da minute laminette di clorite. I cristalli di cui si tratta sono spesso terminati da una parte, alcuni anche alle due estremità, misurano da mezzo centimetro a due centimetri di lunghezza, con diametro da tre a dieci millimetri. Presentano bene sviluppate le facce dei due prismi {010} e {110} e sono terminati dalla base {001}, avendo gli spigoli fra questa e quelli, smussati da piccole facce delle due bipiramidi {111} e {011}. Questi cristalli sono generalmente costituiti da più individui semplici, riuniti in accrescimento parallelo, ciò che determina la presenza di cavità, sulle facce basali, e di solchi, nella zona dei prismi.

I cristalli più piccoli, alla giacitura dei quali ho sopra accennato, presentano un numero di forme assai superiori a quelli descritti dal REPOSSI ⁽¹⁾. Vi si notano infatti le seguenti:

{001}, {010}, {110}, {120}, {130}, {012}, {011}, {032}, {114}, {113}, {335}, {111}, {885}, {221}, {331}, {133}, {121}, {131}, {132}, {139}.

Di queste venti forme, nei cristalli esaminati, si trovarono sempre presenti: {001}, {010}, {110}, {130}, {011}, {131}. Le {113}, {111}, {221}, {133}, {132}, sono meno frequenti, rare le altre.

Lo sviluppo delle facce delle singole forme, come spessissimo accade per i cristalli di questo minerale, è molto irregolare, ma l'abito di quelli qui descritti è sempre prismatico.

I prismi {010} e {110} sono rappresentati da facce abbastanza estese, mentre assai sottili sono quelle degli altri. Costante è la loro striatura verticale. La base ha dimensioni molto variabili nei diversi cristalli, in taluni essendo rappresentata da piccole faccette, in altri, invece, bene sviluppata. In qualche cristallo alla base sono sovrapposte delle laminette quadratiche o rettangolari, limitate da facce sottilissime di una bipiramide tetragonale di 1° ordine molto schiacciata, analogamente a quanto lo STRUEVER osservò in molti cristalli della Val d'Ala ⁽²⁾.

La zona delle bipiramidi di 1° ordine è la più ricca di forme, con predominio, come estensione di facce e loro frequenza, di {331} e {111}. mentre le altre bipiramidi sono rappresentate da facce piccole o piccolissime ed in scarso numero, nei singoli cristalli. {011} e {032} alla loro volta sono le forme più frequenti fra le bipiramidi di 2° ordine ed hanno dimensioni medie; rare e piccole sono le facce di {012}.

Delle bipiramidi ditetragonali presentano facce abbastanza estese, ma non sempre, le {131}, {132}, {133}, rare invece e con superfici sempre assai piccole sono le facce delle altre.

⁽¹⁾ REPOSSI trovò soltanto: {010}, {110}, {001}, {132}.

⁽²⁾ Vedi: G. STRUEVER, *Ulteriori osservazioni sui giacimenti minerali di Val d'Ala in Piemonte*. In «Memorie della R. Accademia dei Lincei», 1888.

Tutte le facce in generale riflettono abbastanza bene ed alcune danno anche buone immagini. In ogni caso la presenza delle forme sopra elencate potè essere con sicurezza accertata mediante misure eseguite con il teodolite-goniometro.

Gli angoli di posizione, così determinati, corrisposero infatti, con sufficiente approssimazione, a quelli indicati nelle Winkeltanellen del GOLDSCHMIT e calcolati in base alla costante $c = 0,5376$ da questo autore adottata.

Oltre alla vesuviana bruno-rossastra, in questo giacimento se ne trovò qualche raro campione di quella verde-olivo, non però in distinti cristalli, ma solo in masse cristalline compatte. Si è constatato che la varietà bruna contiene manganese, che invece manca nell'altra.

Degli altri minerali che si trovano in questo giacimento, insieme alla vesuviana, il più comune è la *clorite*. Si tratta di *clinocloro*, in lamelle che raggiungono $\frac{1}{2}$ centimetro di diametro, le una alle altre appilate a formare rosette od intrecciate, dando luogo a masse compatte. Il colore dal verde pallido va al verde cupo, quasi nero.

Il *granato* è simile a quello descritto da REPOSSI, ma più povero di forme, non presentando che il rombododecaedro {110} dominante, con gli spigoli smussati da piccole faccette dell'icositetraedro {211}. Notevole è un piccolo gruppo di cristalli di granato di colore bruno-rossastro in cui le facce del rombododecaedro hanno superficie drusica, formata da numerosi e piccoli rombododecaedri isorientati.

La *gavite* è in questo giacimento molto rara e si è osservata a riempire qualche volta gli interstizi esistenti fra i cristalli di vesuviana.

In un solo esemplare è stata trovata l'*ilmenite* in cristalli tabulari secondo la base e nei quali soltanto questa forma è visibile le altre essendo nascoste dalla vesuviana in cui queste lamine sono incluse.

Nessuno degli altri minerali rinvenuti nel giacimento di Casa Stellin è in questo presente, mentre si trovò della *titanite*, associata a clorite quasi nera ed a granato, in un campione raccolto a mezza via fra questo giacimento e quello della vesuviana. Notevole in questo campione è la presenza di piccoli cristalli di *quarzo* distorti e corrosi, poichè nelle rocce granatifere della Gava il quarzo non si era ancora trovato.

Fisiologia. — *Topografia ed eccitabilità degli organi di senso dell'orecchio interno nell'uomo.* Comunicazione ⁽¹⁾ dell'Aggregato SILVESTRO BAGLIONI.

Nella mia Comunicazione all'Adunanza di questa R. Accademia del 21 marzo 1940-XVIII descrissi un metodo per l'esame funzionale degli organi di senso interno (labirinto acustico e non acustico), basato sul principio di eccitare i due organi di senso acustico (cocleare) e non acustico (vestibolare), situati in due regioni distinte nella profondità della rocca petrosa, mediante la stimolazione vibratoria trasmessa per la cosiddetta via ossea, prodotta dalle vibrazioni di diapason metallici di varia frequenza ed intensità (serie di EDELMANN), applicati col loro stelo, su determinate zone cutanee adiacenti al meato uditivo esterno.

Gli effetti che si osservano, variano essenzialmente secondo le zone cutanee di applicazione e la frequenza vibratoria.

I. La zona cutanea situata anteriormente al meato uditivo, a livello del solco formato dal rilievo dell'impianto del trago e del capo articolare del mascellare inferiore (indicata col n. 1), è dotata della massima sensibilità per stimoli sonori, la cui frequenza salga da circa 100 a 880 per/sec.

II. La zona cutanea situata allo stesso livello della prima, ma posteriormente al padiglione (n. 2), sul livello della regione superiore dell'apofisi mastoide, presenta massima sensibilità per stimoli vibratorii di bassa frequenza, sotto 100 per/sec. che provocano un eccitamento di caratteri ben differenti da quelli delle sensazioni avvertite per stimolazione della prima zona.

Gli stimoli applicati sulla prima zona sono avvertiti come vere e proprie sensazioni sonore, che variano di altezza secondo la frequenza delle vibrazioni, seguendo approssimativamente la nota curva della sensibilità acustica, basata sui risultati degli eccitamenti trasmessi normalmente per via timpanossiculare, pel fatto che la soglia va mano mano diminuendo in senso inverso all'aumento della frequenza (entro l'ambito di 880 per.) mentre gli stimoli applicati sulla seconda zona provocano sensazioni a colorito sgradevole, di frastuono o stordimento, che possono giungere sino

(¹) Letta nell'Adunanza del 16 gennaio 1942-XX.

alla vertigine e alla nausea, e che ricordano gli abnormi eccitamenti degli organi di senso del labirinto non acustico, in un grado sempre più intenso quanto minore è la frequenza vibratoria, e che quindi vanno perdendo sempre più i caratteri di sensazioni sonore.

Il metodo descritto è stato in seguito applicato su individui normali e oto-pazienti da G. C. ANTIGNOLI⁽¹⁾ ottenendo risultati che essenzialmente confermano l'esattezza del metodo.

Nella mia Memoria feci l'ipotesi che il meccanismo d'azione degli stimoli vibratorii applicati sulle due zone cutanee e trasmessi per via ossea può essere interpretato tenendo conto del modo della propagazione fisica dell'energia vibratoria nell'ambito dei tessuti sino a raggiungere i due organi di senso, nonchè della loro particolare posizione anatomica (topografica) in seno alla rocca petrosa.

Mi son proposto di verificare la giustezza di questa ipotesi mediante adeguate ricerche, i cui risultati formano l'oggetto della presente comunicazione.

Come è noto, il labirinto è formato da una serie di canalini scavati nel seno delle due rocche petrose degli ossi temporali, che come due travate ossee resistenti e solidissime si sollevano nella base cranica, simmetricamente, dirigendosi in direzione obliqua dall'esterno verso l'interno e dall'indietro in avanti (fig. 1). Scoprendo con attenzione la lamina ossea (tavolato interno) che lo protegge, si può mettere a nudo il sistema dei canali ossei del labirinto liberandoli dal tessuto spugnoso che li circonda. Le loro pareti sono costituite da tessuto osseo compattissimo e quindi resistentissimo, di durezza lapidea, per cui è facile poterli estrarre *in solido* dal tessuto osseo adiacente spugnoso (fig. 2). Particolarmente interessante dal punto di vista della loro funzione è la posizione topografica nei loro rapporti spaziali (orientazione). I tre canali semicircolari sono orientati secondo le tre dimensioni dello spazio, in quanto l'uno decorre sul piano orizzontale, gli altri due decorrono sui due piani verticali ortogonali al primo; sboccano nel seno vestibolare (otricolo e sacculo). Essi occupano la regione media posteriore della travata ossea della rocca petrosa. Il canale cocleare occupa invece la regione anteriore della stessa travata, svolgendosi colle sue spire secondo una retta perpendicolare (ortogonale) all'asse longitudinale della travata, colla spira più ampia verso l'interno e l'apice verso l'esterno.

Dall'esame della loro posizione topografica è facile desumere che la sede del labirinto non acustico (canali semicircolari, otricolo e sacculo) corrisponde alla zona cutanea esterna che si estende alla regione poste-

(1) G. C. ANTIGNOLI, *Prime ricerche di esame funzionale dell'orecchio interno*, ecc. «Fisiologia e medicina», XII, 1941-XIX, pagg. 381-393.

riore del padiglione dell'orecchio, verso l'alto nella regione sovrastante l'apofisi mastoide; mentre la sede del canale cocleare (labirinto acustico)

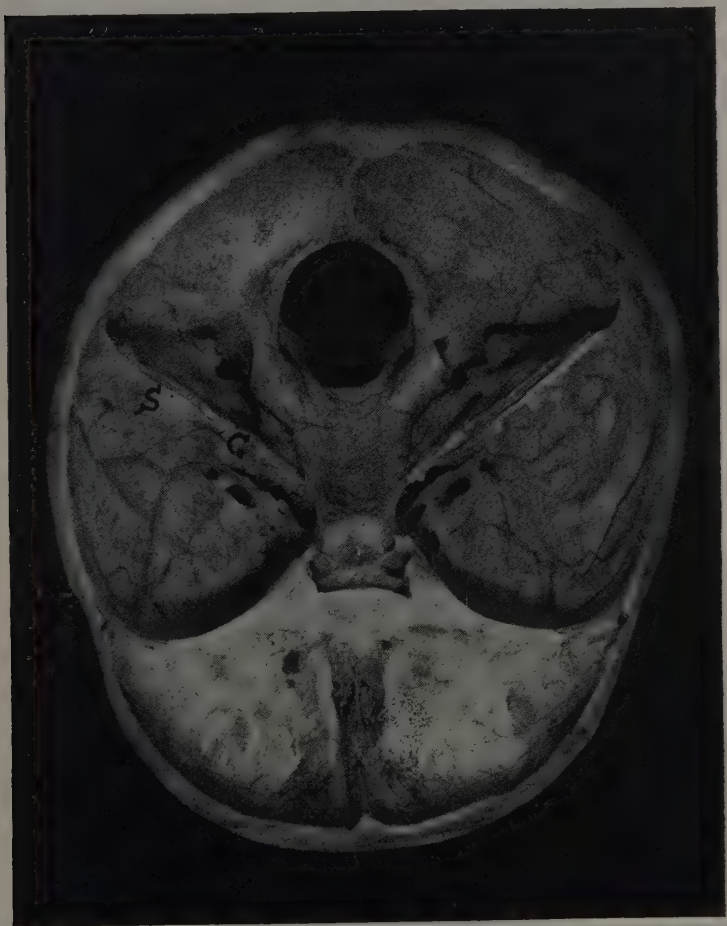


Fig. 1. - Riproduce fotograficamente la superficie interna della base, vista dall'alto, di un cranio umano; gr. 2/3.

S.C., travata della rocca petrosa del lato destro; *S* corrisponde alla regione dei canali semicircolari, *C* a quella della chiocciola.

corrisponde alla zona cutanea che ricopre il capo articolare del mascelle inferiore (fossa glenoide), e più precisamente il solco antistante l'eminenza del trago dinanzi il meato uditivo esterno.

Al fine di controllare questi rapporti topografici della sede degli organi di senso dell'orecchio interno anche nel cranio normale rivestito dei tessuti molli, in collaborazione col collega V. VIRNO, direttore dell'Istituto di Anatomia Umana della R. Università di Roma (al quale porgo anche

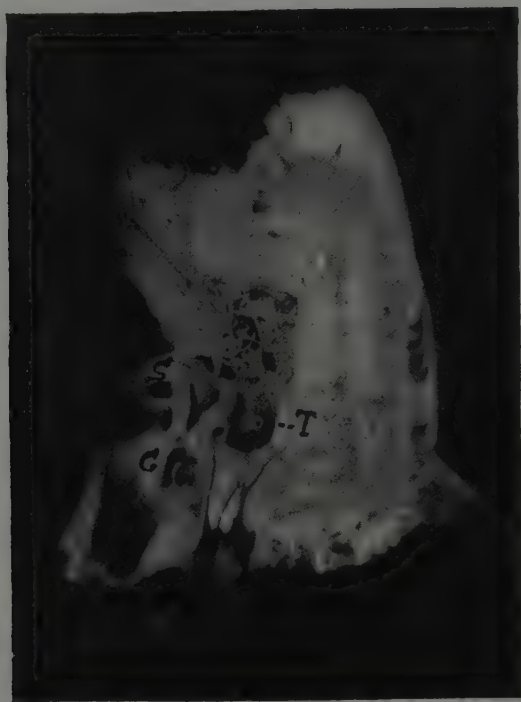


Fig. 2. — Riproduce fotograficamente la superficie interna dell'osso temporale destro umano, dopo aver scoperto il labirinto osseo; gr. nat.

S, canali semicircolari; *O*, chiocciola;
T, catena degli ossicini.

qui i miei ringraziamenti), ho fatto eseguire sezioni a tutto spessore (dopo aver fissato i tessuti col liquido di MUELLER, e decalcificato le ossa con soluzione di acido nitrico) nella regione topografica dell'orecchio sinistro di un cadavere di adulto (anziano). Una prima sezione (*A A'* dell'annessa figura 3) fu condotta sul piano orizzontale passante per le due zone 1 e 2;

la superficie interna messa allo scoperto dalla sezione è riprodotta fotograficamente dalla figura 4.

Furono poi sullo stesso pezzo fatte due altre sezioni $B B'$ e $C C'$ ortogonali alla prima e passanti rispettivamente sulla zona 1 e 2, appro-

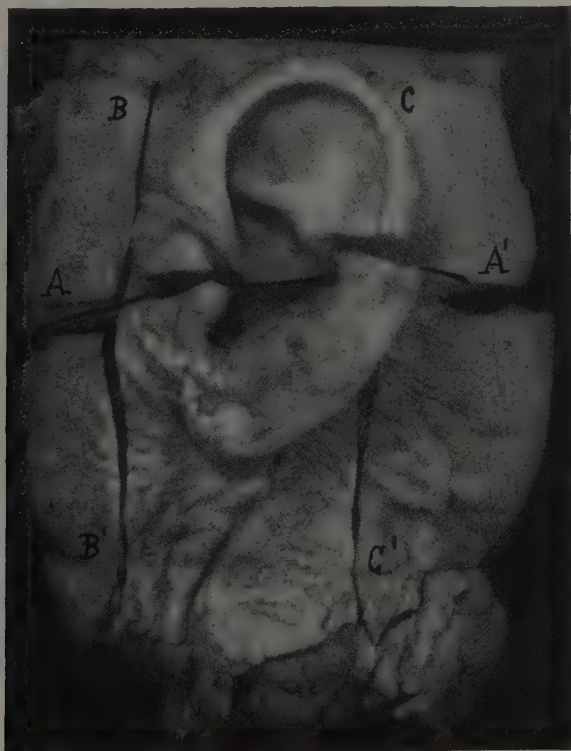


Fig. 3. — Superficie esterna della regione auricolare destra di cadavere umano, sezionata secondo i tre assi ortogonali.

Riproduzione fotografica; gr. 4/5.

fondandosi obliquamente secondo la direttrice della sede della coclea la prima e dei canali semicircolari la seconda, come risulta dalla figura 4.

Dall'esame dei rapporti topografici dei due organi di senso dell'orecchio interno colle zone cutanee adiacenti al padiglione risulta chiaramente che la coclea è più prossima alla zona mediana del trago, a livello del margine inferiore del cavo glenoideo (in cui è il capo articolare del mascellare inferiore), mentre è più lontana della zona 2 situata allo stesso livello dietro il padiglione. Essa trovasi infatti sul cateto del triangolo $b b' c$.

inscritto sugli assi dei tre piani di sezione. I canali semicircolari si trovano invece più vicini a quest'ultima.

I risultati sono stati ottenuti nel cranio di un adulto anziano. Ulteriori ricerche saranno estese ai crani di altri individui di sesso e di età diverse. Mi pare tuttavia al riguardo utile ricordare che, secondo le diligenti ricerche di S. SERGI ⁽¹⁾ in più di 100 crani umani, siano le ossa tem-

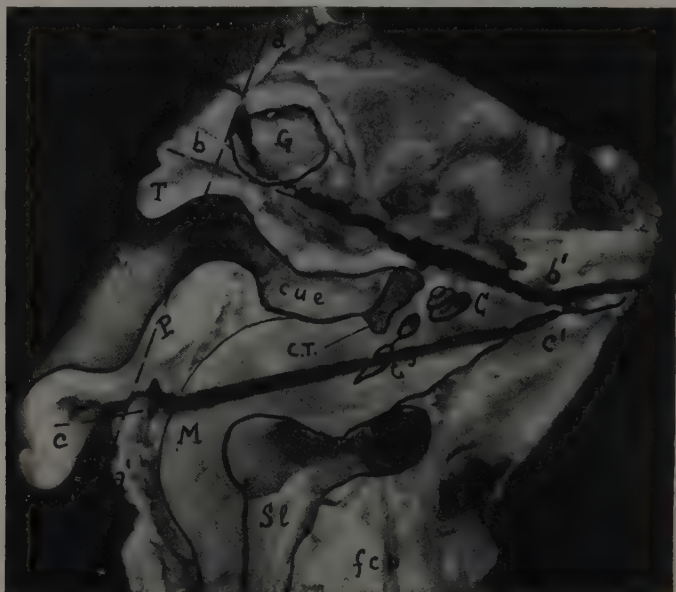


Fig. 4. - Superficie interna del piano della sezione orizzontale AA' della figura 3.

P, padiglione; *T*, trago; *cue*, condotto uditivo esterno; *C. T.*, cassa timpanica; *G*, glenoide; *C*, coclea; *C. S.*, canali semicircolari; *S. l.*, seno laterale; *aa₁*, asse del piano della sezione *AA'*; *bb'*, asse del piano della sezione *BB'*; *cc'*, asse del piano di sezione *CC'*.

porali quelle che presentino la massima costanza di forma e di architettura, probabilmente in dipendenza dei particolari organi di senso che risiedono in esse. Comunque questi primi risultati confermano la ipotesi che dalla sede topografica dei due organi di senso dell'orecchio interno si può trarre argomento per la spiegazione del fatto che gli stimoli vibra-

⁽¹⁾ S. SERGI, *Sulle variazioni di forma e di posizione dell'osso temporale nell'uomo*. « Riv. di Antropologia », XXXI, 1935-36.

tori applicati sulla regione cutanea della zona 1 hanno da percorrere un breve tragitto per raggiungere l'organo cocleare, il quale essendo particolarmente eccitabile agli stimoli sonori (con frequenza elevata) è in grado di avvertirli anche con minime intensità (ampiezza), mentre i canali semicirculari essendo più prossimi alla zona cutanea 2, posteriormente al padiglione, sono più facilmente eccitati dagli stimoli ivi applicati ed adeguati alla loro recettività, ossia a frequenze molto più basse. Con altre parole, mediante l'applicazione di stimoli vibratorii, applicati sulle due zone 1 e 2 e trasmessi per via ossea, si può dimostrare che *vige una particolare legge della soglia di eccitabilità dei due organi di senso del labirinto acustico e non acustico in dipendenza della sede topografica dei rispettivi organi (cocleare e canali semicirculari).*

Per intendere il meccanismo del particolare comportamento di queste due zone cutanee agli stimoli vibratorii è necessario considerare anche la natura fisica di questi stimoli e il loro modo di giungere per via ossea agli organi di senso recettivi. L'energia vibratoria è una forma di energia meccanica, e precisamente di energie cinetica e potenziale elastica che si trasformano a vicenda secondo un ritmo di determinate frequenze. Ogni sorgente di energia vibratoria che può essere un corpo solido, liquido o gassoso è promossa da una forza fisica che tende a deformare il corpo materiale (solido, liquido o gassoso); che agisce momentaneamente e alla cui cessazione il corpo, per la sua energia elastica potenziale, tende di ritornare alla sua posizione di equilibrio, compiendo escursioni pendolari che man mano vanno decrescendo di ampiezza (intensità) pur mantenendo costante il ritmo (frequenza), secondo la legge dell'isocronismo del pendolo. L'energia vibratoria si diffonde nell'ambiente ossia negli oggetti coi quali la sorgente vibratoria si trova in immediato contatto (continuità materiale) in forma di onde, con una velocità variabile secondo la natura del mezzo trasmittente, conservando costante la frequenza, ma diminuendo di ampiezza (intensità) secondo la legge del quadrato della distanza in mezzo continuo, omogeneo e indefinito.

Negli esperimenti in parola la sorgente dell'energia vibratoria è data dallo stelo del diapason portato a diretto contatto colla cute e messo in vibrazione dai due rebbi (col nodo alla base presso la forchetta); la trasmissione dell'energia ha luogo per i tessuti molli e duri che costituiscono le pareti del cranio. Non conosciamo con esattezza la velocità di tale trasmissione, essendo il mezzo di natura complessa ed eterogenea (liquido, semiliquido e solido) quale risulta dalla complessa compagine strutturale dei vari tessuti. Possiamo però con sufficiente approssimazione ammettere che tale velocità sarà certamente superiore a quella dell'aria.

L'energia vibratoria partendo dalla sorgente, ossia nel primo caso dalla zona cutanea 1, va ad investire per la via più breve l'organo del

CORTI situato nell'interno della coclea, colpendone in senso normale dapprima le porzioni che si trovano più vicine all'apice della coclea, ossia nella spira più piccola, diffondendosi poi alle altre parti secondo la direzione dell'asse cocleare (fig. 5); mentre la stessa energia vibratoria dalla zona cutanea n. 2 giunge alla coclea per un tragitto più lungo e dopo aver toccato il sistema dei canali semicircolari, che a differenza dell'organo cocleare sono specificamente più eccitabili alle vibrazioni di frequenza più bassa.

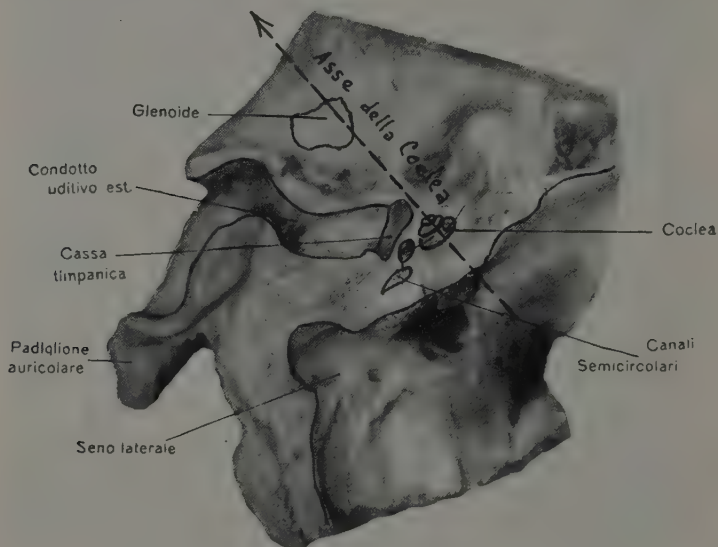


Fig. 5. - Sede topografica degli organi di senso dell'orecchio proiettati sul piano della sezione orizzontale A A' (cfr. fig. 4).

L'eccitamento dei due organi in questi esperimenti non ha luogo per vie normali. L'organo cocleare normalmente reagisce agli stimoli vibratori che lo raggiungono pel sistema degli organi diotici (padiglione, condotto uditivo esterno, membrana del timpano e catena ossiculare, membrana della finestra ovale, fig. 6). In definitiva però tanto nell'un caso come nell'altro (trasmissione dell'energia per via ossea), le vibrazioni vanno a scuotere le varie formazioni anatomiche dell'organo del CORTI, provocandone le sensazioni acustiche.

Ho considerato sinora come sola possibilità di spiegazione del comportamento della zona cutanea n. 1, ipereccitabile alle frequenze alte, l'ipotesi che l'energia vibratoria del diapason viaggi attraverso i tessuti solidi, che dividono la cute e la coclea, direttamente all'organo di senso

cocleare, senza intervento dell'apparato diotico timpanossiculare. Osservando la sezione del piano orizzontale (fig. 4) si vede che il condotto uditivo esterno (*cue*) e la cassa timpanica (*CT*) si trovano molto vicini alla retta *b b'*; si può quindi anche supporre che alla trasmissione degli stimoli vibratorii possa partecipare la via normale timpanossiculare. Credo tuttavia, soprattutto sulla base dei risultati in individui che, come esito di otite media pregressa, hanno perduto la funzione diotica dell'apparato timpanossiculare, e che pur si comportano come i normali, come pure del

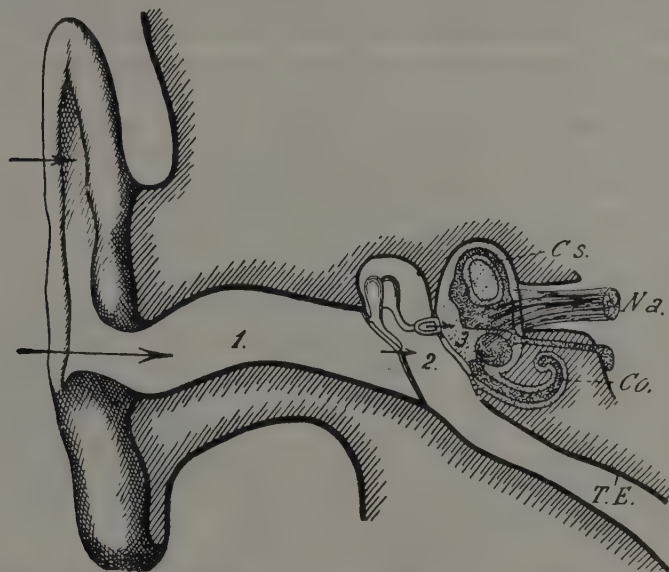


Fig. 6. - Figura schematica, in sezione verticale, dell'apparato diotico dell'orecchio umano.

1, condotto uditivo esterno; 2, cassa del timpano; T.E., tuba di EUSTACHIO;
Co, coclea; C. s., canali semicircolari.

Le frecce indicano la direzione dell'energia vibratoria (sonora)
per l'apparato diotico.

fatto che portando lo stimolo diretto sulle varie zone cutanee che rivestono l'anello osseo interno del foro uditivo, si osserva la massima eccitabilità a livello del n. 1, che si possa escludere tale possibilità.

Una particolare importanza per l'argomento in parola ha la recente scoperta del fenomeno di E. G. WEVER e C. W. BRAY (1930) e successivamente confermata da numerosi sperimentatori, detta anche risposta elettrica della coclea, secondo la quale l'organo del CORTI, in condizioni fisiologiche della sua attività recettiva dei suoni e dei rumori, si comporta come un apparecchio microfonico (ADRIAN). Ponendo (nel gatto o in

altri animali da esperimento) a nudo il nervo acustico e derivando da esso, mediante adatti elettrodi, le variazioni di potenziale elettrico, che si verificano nel suo interno, per un sistema telefonico, munito di amplificatori, i suoni e i rumori che sono trasmessi all'orecchio interno per la via normale aerea, sono trasformati dall'orecchio interno (organo cocleare) in variazioni, che al telefono si riconoscono perfettamente cogli stessi caratteri specifici di altezza, ampiezza e timbro degli stimoli sonori, nello stesso modo con cui si trasmetterebbero se, invece che all'orecchio dell'animale, si facessero agire su un perfetto microfono fisico. L'apparato cocleare ha pertanto la proprietà, come un perfetto apparecchio microfónico, di trasformare l'energia sonora (meccanica o vibratoria) in energia elettrica, le cui modulazioni si possono rivelare mediante un adatto sistema telefonico, che ritrasforma le variazioni elettriche in fenomeni sonori, captandole da zone prossime alla coclea, alle quali si trasmettono da essa per mezzi dielettrici. Invece di ricorrere allo scoprimento del nervo acustico (che implica una delicata operazione chirurgica) fu, in seguito, dimostrato che si presta anche a tale derivazione fisica di energia elettrica la faccia esterna della finestra rotonda (la cui faccia interna è a diretto contatto colla endolinfa che comunica direttamente col liquido entro cui si trova l'organo del CORTI), dopo aver semplicemente aperto l'orecchio medio (la cassa timpanica) dell'animale.

Questo particolare comportamento dell'organo cocleare, pur essendo un fenomeno fisico, accompagna fedelmente la sua attività fisiologica, poichè cessa colla morte dell'animale, coll'arresto della circolazione sanguigna e anche per ogni anche minima variazione sperimentale dei vari tessuti che compongono l'organo di senso cocleare (persino la sostituzione dell'endolinfa con soluzione fisiologica fa cessare la risposta, mentre si mantiene inalterata se l'endolinfa è sostituita col liquido cerebrospinale dello stesso animale, avendo esso un'analogia composizione dell'endolinfa); non si ha in animali che siano sordi per atrofia o grave lesione anatomica dell'organo del CORTI.

Questa risposta elettrica che pare specifica dell'organo interno dell'orecchio, anche se non è analoga (come credevano dapprima gli scopritori di essa) alle note correnti di azione di tutti i tessuti viventi, specialmente nervosi e muscolari, può tuttavia servire come un ottimo mezzo di esame obiettivo delle condizioni funzionali dell'udito interno, e sarebbe pertanto di somma importanza pratica poterla utilizzare anche nell'uomo, mediante opportune modificazioni (che non mi paiono di insuperabili difficoltà pratiche) del sistema di captazione e derivazione dell'energia elettrica in energia sonora.

Per intendere chiaramente il meccanismo col quale si svolge il fenomeno di WEVER e BRAY è necessario ricordare le leggi anatomiche e fisiologiche, oggi note, che regolano la funzione dei vari organi dell'orecchio.

L'orecchio esterno (fig. 6) funge da adatto apparecchio recettore o captatore dell'energia sonora aerea, essendo il padiglione costruito come un complesso imbuto colla tromba di apertura verso l'esterno, del quale le cavità (solchi) e i rilievi rappresentano un complicato sistema recettore delle onde, emananti da sorgenti vibratorie dell'ambiente, raccogliendole fedelmente e convogliandole nel condotto uditivo esterno, che le concentra direttamente sulla faccia esterna della membrana del timpano. Questa aderendo ermeticamente alle pareti del condotto, lo chiude separandolo dalla cavità dell'orecchio medio. Per la sua sottigliezza e inestensibilità questa membrana sollecitata dalle onde sonore, convibra con esse, trasmettendole alla catena degli ossicini, che funge da

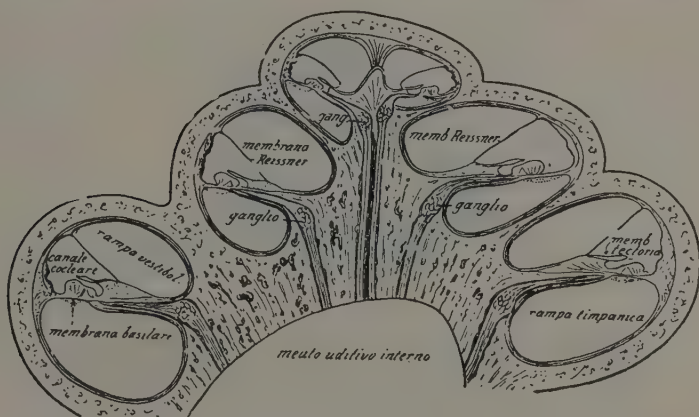


Fig. 7. - Schema della sezione verticale della coclea umana, ingrandita circa 10 volte.

sistema rinforzatore (moltiplicatore d'ampiezza) finchè sono in atto, ma appena cessate funge da smorzatore. Il sistema diotico timpanossiculare trasmette fedelmente le vibrazioni alla membrana della finestra ovale, che alla sua volta le trasmette all'endolinfa del sistema labirintico dell'occhio interno.

Il mezzo di trasmissione dell'energia vibratoria è, pertanto, aereo finchè le onde sonore dell'ambiente esterno sono raccolte e trasmesse dal padiglione e dal condotto uditivo alla membrana del timpano, diviene solido quando dalla membrana passano alla catena degli ossicini sino alla membrana della finestra ovale, diviene poi liquido quando da questa sono trasmesse all'endolinfa.

La funzione dell'orecchio medio non consiste però in una pura e semplice trasmissione ossea (timpanossiculare) delle onde sonore, ma bensì anche in un'amplificazione di esse, regolabile per un fine congegno

neuromuscolare (dei due muscoli striati, tensore del timpano e stapedio) secondo i gradi di intensità (ampiezza) e forse anche di altezza (frequenza) degli stimoli.

L'orecchio esterno e medio rappresentano, pertanto, un complesso sistema acustico che adempie all'ufficio di raccogliere e trasmettere fedelmente, in tutti i loro elementi essenziali fisici, gli stimoli sonori (energia vibratoria) agli organi dell'orecchio interno, mantenendo la loro natura fisica di energia sonora (onde meccaniche), amplificandone o moderandone l'ampiezza (ossia ciò che si dice, nel linguaggio radiotecnico, il volume), secondo le particolari esigenze fisiologiche dell'udito. Per tale funzione di trasmettere senza modificare essenzialmente la natura meccanica

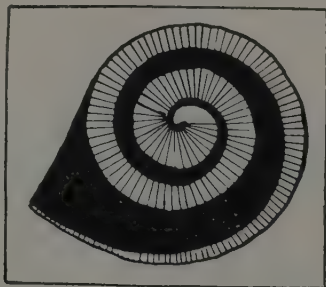


Fig. 8. — Schema della struttura della membrana basilare, ingrandita circa 3 volte, e proiettata su un piano orizzontale, secondo le dimensioni delle due zone spirale (nera) e pectinata (striata) che la compongono (BRÜHL).

dell'energia sonora, ma soltanto concentrandola sull'organo reattivo, tale sistema verificato dall'orecchio esterno e medio si può definire *apparato diotico* (analogo all'apparato *diottrico* del complesso sistema refrattivo delle onde luminose dell'occhio), che ha essenzialmente il compito di captare dal mezzo aereo le onde sonore e trasformarle in vibrazioni del mezzo solido (sistema timpanossiculare) e del mezzo liquido (endolinfa).

L'orecchio interno possiede l'apparato ricevente (reattivo) che trasforma l'energia vibratoria in energia sensitiva, esso è l'organo cocleare o del CORTI, costituito da un mirabile complesso di formazioni anatomiche, riprodotte schematicamente nelle figure 7 e 9. L'energia è trasmessa ad esso dall'endolinfa sollecitata dalla membrana della finestra ovale, che è alla sua volta eccitata dalla placchetta della staffa.

Le onde dell'endolinfa vengono in forma di onde stazionarie ad agire sulle due membrane (*basilare e tectoria*) che racchiudono nel loro interno le formazioni istologiche dell'organo del CORTI. Di queste due membrane per molto tempo fu data la massima importanza (a cominciare da HELM-

HOLTZ) alla *basilare*; oggi si ritiene che anche alla *tectoria* spetti massimo compito, essendo essa a più diretto ed immediato contatto colle rigide ciglia delle cellule uditive. Una proprietà della basilare consiste nel fatto di essere costituita di due zone (*spirale* e *pectinata*) che salendo dalle regioni più basse della coclea alle più alte, vanno gradatamente variando di ampiezza (fig. 8). Precisamente la zona pectinata, su cui riposa l'organo del CORTI, va aumentando sempre più di ampiezza dal basso verso l'alto. Ciò ha suggerito l'ipotesi che le diverse regioni di essa reagiscano alle diverse lunghezze d'onda, in modo che le zone più basse, ossia situate nella spira basale della coclea, convibrino colle frequenze più alte (suoni acuti), le zone delle spire successive colle frequenze medie e basse.

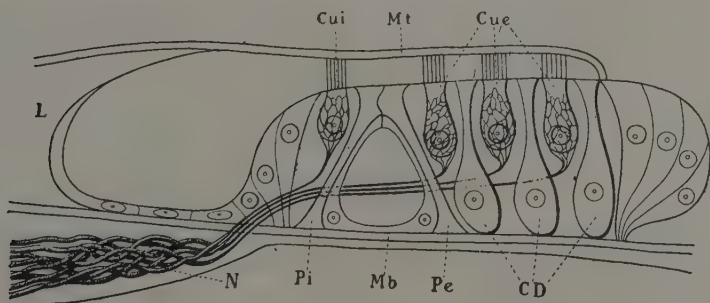


Fig. 9. - Schema della struttura dell'organo del CORTI (circa $\times 200$).

Mb, membrana basilare; *Mt*, membrana tectoria; *N*, nervo acustico; *Pi*, pilastro interno; *Pe*, pilastro esterno dell'arco; *Cui*, cellula uditiva interna; *Cue*, cellule uditive esterne; *CD*, cellule di sostegno (di DEITERS).

Le onde sonore stazionarie vengono quindi come particolare forma di energia meccanica (vibratoria) ad agire direttamente su queste due membrane, le quali trasmettono tali stimoli meccanici (sonori) con tutti i loro caratteri fisici, come una perfetta membrana microfonica, agli elementi istologici dell'organo del CORTI, i quali alla loro volta trasformano l'energia sonora in energia sensitiva dell'udito, e, inoltre, come è stato scoperto da WEVER e BRAY, anche in energia elettrica, fungendo da vero apparato microfonico, le cui variazioni di potenziale elettrico sono capaci di riprodurre con tutti i loro caratteri le onde sonore che eccitano le membrane in seno all'endolinfa, quando le dette variazioni elettriche siano opportunamente captate e derivate in un apparecchio telefonico.

Una domanda sorge qui spontanea: a quale dei microfoni, noti nella fisica acustica, può essere assimilato il microfono cocleare?

Molti sono i microfoni che nella sempre più rigogliosa branca dell'elettroacustica si sono andati man mano costruendo, a cominciare dal

più antico a polvere di carbone. Una esauriente rassegna di essi ha dato nel 1939 il GIGLI. Tra essi non figura però nessuno che si possa senz'altro paragonare al cocleare, soprattutto perchè questo funziona con mezzi essenzialmente liquidi, ossia con soluzioni acquose e colloidali di elettroliti, mentre tutti i microfoni fisici lavorano con metalli. Seguendo la vecchia distinzione classica, il microfono cocleare (come del resto tutti i tessuti viventi, quali i muscoli e i nervi, che sono sede di fenomeni bioelettrici) è costituito da generatori (conduttori) elettrici della seconda classe, mentre i comuni microfoni risultano da generatori metallici o della prima classe.

Volendo tuttavia azzardare una risposta alla domanda propostaci di segnalare un microfono fisico che, secondo il modo di trasformare l'energia sonora in energia elettrica, più si avvicini al cocleare, mi pare che, tra tutti i noti sinora, sia quello piezoelettrico che più si avvicini al cocleare. Nel piezoelettrico infatti l'energia vibratoria va ad agire come energia meccanica (di pressione), captata da una sottile lamina metallica (ad imbuto) e trasmessa mediante uno stiletto a due gambi (come avviene per l'orecchio mediante il sistema diotico), sulla superficie esterna dell'armatura metallica che riveste il cristallo di quarzo. È per effetto delle variazioni di pressione meccanica che insorgono le variazioni elettriche che, essendo di minima intensità, debbono essere opportunamente amplificate perchè si rivelino. Ciò è anche il caso, come abbiamo detto, delle variazioni elettriche del microfono cocleare.

Penso che il microfono piezoelettrico possa essere paragonato a quello cocleare, a prescindere dal fatto, che ho sopra ricordato, che il cocleare non funziona con generatori elettrici metallici, ma con elettroliti, per la ragione che tutti gli altri microfoni fisici, a cominciare dal più antico a polvere di carbone, hanno bisogno di una forza elettromotrice che li alimenti, e in cui le variazioni vibratorie (meccaniche) servono a modificare o la resistenza del flusso elettrico o il campo elettromagnetico della sua azione, mentre nel microfono piezoelettrico è l'energia vibratoria che si trasforma in energia elettrica, come avviene nell'organo cocleare.

Questa analogia non è che una vaga approssimazione, più che per altro, per rendere più facile ad intendere fisicamente il fenomeno della risposta elettrica dell'organo del CORTI, la cui scoperta può suggerire l'idea (di cui io mi propongo di tentare tra breve la realizzazione) di costruire apparecchi microfonici basati sullo stesso principio, ossia di elettroliti, sui quali agiscano variazioni di pressione meccaniche (energia vibratoria), opportunamente dotati di congegni selettivi, quali la natura biologica ha dato all'orecchio.

Comunque, tornando al problema da cui ho preso le mosse, è facile intendere che anche quando l'energia vibratoria (sonora) giunge all'organo cocleare reattivo per una via diversa di quella normale aerea (pel

tramite, cioè, dell'apparecchio diotico timpanossiculare), ossia per il tramite della via ossea, come è il caso degli eccitamenti prodotti dai diapason applicati direttamente sulle zone cutanee soprandicate, è capace di mettere in vibrazione l'endolinfa che si trova nell'interno della coclea, dopo aver investito le sue pareti ossee, con intensità maggiore o minore secondo il punto cutaneo direttamente colpito, in rapporto alla distanza di esso dall'organo cocleare (o risp. dei canali semicircolari), e secondo l'intensità o ampiezza dell'energia vibratoria nel tempo dell'applicazione. E poichè nei diapason tale intensità va gradatamente decrescendo dal momento in cui lo stelo fu messo in vibrazione, la coclea col suo organo del CORTI, continuerà a reagire per un tempo molto più lungo quando la sorgente sonora emana dalla zona cutanea n. 1, che è topograficamente la più prossima all'organo reattivo, e la sua frequenza è relativamente più alta, ossia nell'ambito della soglia acustica. Dalla durata della percettibilità del suono, nel metodo indicato, si deduce il valore liminale dell'eccitabilità dell'organo di senso acustico. Per l'organo di senso del labirinto non acustico (canali semicircolari) la zona cutanea più prossima è il n. 2, mentre gli stimoli vibratorii ai quali reagisce tale organo in modo particolare hanno una frequenza molto più bassa.

Un altro metodo di stimolazione, forse più esatto, in ogni modo più pratico, consisterà nell'applicare adatti vibratorii, muniti di apparecchi che permettano di mantenere costante non solo la frequenza, ma anche l'ampiezza di diverso grado. Mi propongo, colla collaborazione dei valorosi camerati dell'Istituto di Elettroacustica « O. M. Corbino » del C.N.R., ai quali colgo questa occasione per porgere ancora qui i miei sensi di grato animo, di realizzare questo metodo come controllo e ulteriore studio dell'attraente argomento.

Mi resta un'ultima considerazione. Poichè l'organo cocleare, secondo la scoperta di WEVER e BRAY, funge da apparecchio microfonico, quando è eccitato normalmente, ossia per il tramite aereo, volendo estendere all'uomo questo metodo di ricerca, senza ricorrere a un intervento chirurgico, che, come abbiamo sopra visto, è necessario per raggiungere una regione (finestra rotonda della cassa timpanica) più prossima alla coclea donde derivare la energia elettrica per l'apparecchio telefonico, mi pare si potrebbe tentare a tale scopo (come mi propongo di realizzare in seguito) di utilizzare la zona cutanea n. 1, che, come risulta dalle mie osservazioni, è la più prossima topograficamente all'organo cocleare. In tal modo si potrebbe forse ottenere un vero e proprio *elettroaudiogramma*, le cui variazioni potrebbero servire per un nuovo metodo di esame funzionale dell'udito.

Matematica (Geometria algebrica). — *Sul limite dell'intersezione di due curve variabili sopra una superficie, le quali tendano ad avere una parte comune.* Nota ⁽¹⁾ dell'Accademico FRANCESCO SEVERI.

Nella mia Memoria su « La teoria generale dei sistemi continui di curve sopra una superficie algebrica ⁽²⁾ », ho stabilito un lemma ⁽³⁾ avente un ufficio importante nella sottile e laboriosa dimostrazione del teorema fondamentale della Memoria. Esso riguarda due curve algebriche (o analitiche) E, H variabili sopra una superficie algebrica (o analitica), le quali siano funzioni olomorfe d'un parametro t e per $t \rightarrow 0$ abbiano come limiti due curve spezzate $E_0 = C + D, H_0 = C + L$, aventi una parte comune C , nell'ipotesi ulteriore che, per t infinitesimo, E passi per uno O dei punti comuni alle C, D .

Si tratta di valutare se e quante delle intersezioni (in numero finito quando trattasi di curve algebriche ed in numero finito attorno ad O , quando trattasi di curve analitiche, non algebriche) delle E, H tendano ad O per $t \rightarrow 0$.

La conclusione del lemma è che generalmente tendono ad O due delle intersezioni predette. Ora il prof. BOMPIANI mi ha comunicato l'esempio di due coniche del piano, variabili in due fasci proiettivi, soddisfacenti alle ipotesi delle E, H (anzi nell'esempio di BOMPIANI il punto O è addirittura base pel fascio descritto da E), per le quali però una sola intersezione del gruppo comune tende ad O .

Ho perciò ripreso in esame la dimostrazione del lemma ed ho constatato che, nel fatto, senza altra ipotesi aggiuntiva, vale la conclusione stessa alla quale BOMPIANI è giunto nell'esempio particolare.

Si tratta d'una circostanza un po' riposta inerente agl'infinitesimi. La indicherò, perchè è istruttiva.

Devo però aggiungere che, nel caso interessante la dimostrazione del teorema fondamentale della mia Memoria, son soddisfatte altre condi-

⁽¹⁾ Presentata nell'Adunanza del 16 gennaio 1942-XX.

⁽²⁾ Memorie della R. Accademia d'Italia, vol. XII. 1941-XIX, pag. 337. Questa Memoria si citerà in seguito come « Teoria ».

⁽³⁾ Loc. cit., pag. 368.

zioni, le quali, conformemente alla mia affermazione, portano a due il numero delle intersezioni aventi per limite O .

1. — Il ragionamento esposto al n. 17 (pag. 368) della « Teoria », con successive semplificazioni lecite, non restrittive, riduce la ricerca del numero delle intersezioni che hanno per limite O , sotto le ipotesi generali specificate, al caso particolarissimo di due coniche E, H :

$$[1] \quad \varepsilon(x, y; t) \equiv xy + t(ax + by) + \varepsilon_0 t^2 = 0,$$

$$[2] \quad \eta(x, y; t) \equiv x(mx + ny + p) + t(cx + dy + e) + \eta_0 t^2 = 0,$$

dipendenti dal parametro t ($a, b, c, d, e, m, n, p, \varepsilon_0, \eta_0$ costanti).

Per $t \rightarrow 0$ la E si spezza nella retta C ($x = 0$) e nella retta D ($y = 0$) passanti per O ($x = y = 0$); e la H si spezza in C e nella retta L ($mx + ny + p = 0$). La curva E infinitamente vicina a $C + D$ passa per O , perchè nel coefficiente di t nella [1] manca il termine indipendente da x, y .

Si osserverà che le E, H hanno già in comune il punto all'infinito dell'asse y , cosicchè le intersezioni variabili con t son tre. La determinazione delle ordinate y spettanti a queste intersezioni, si fa risolvendo anzitutto la [1] rispetto ad x :

$$[3] \quad x = -\frac{tby + \varepsilon_0 t^2}{y + at}.$$

Sostituito questo valore di x nella [2], soppresso il fattore t , e ridotta a forma intera la [2] così trasformata, s'ottiene un'equazione di 3° grado in y . In generale in quest'equazione, che non ci occorre per disteso, il coefficiente di y^3 è indipendente da t ; il coefficiente di y^2 è diverso da zero per $t = 0$; il coefficiente di y è infinitesimo del 1° ordine con t e il termine noto è infinitesimo del 2° ordine. Ciò significa che due (non tre) delle radici della risultante in y son infinitesime con t ; e siccome esse posson permutarsi circolando t attorno al punto di diramazione $t = 0$, ed il loro prodotto è infinitesimo del 2° ordine, così ognuna di esse è infinitesima del 1° ordine.

L'equazione risultante in y per $t = 0$ diviene:

$$[4] \quad y^2[y(d - nb) + (e - bp)] = 0$$

e le due radici che vanno a cadere in $y = 0$ son dunque infinitesime del 1° ordine con t .

Per questo si è tentati a prima vista di concludere che alla radice doppia $y = 0$ corrisponde una radice doppia $x = 0$; ed è così che O verrebbe ad assorbire al limite due intersezioni. Invero, nella [3] il numeratore è di secondo ordine rispetto a t e vien fatto di asserire che il denominatore sia in generale del 1° ordine perché y e t son del 1° ordine. Sembra cioè che la combinazione $y + at$ non possa esser d'ordine superiore al 1° senza che intervenga una particolarità nel sistema delle [1], [2]. Invece

non è così! Si vede infatti subito che in corrispondenza ad una delle due radici di y , infinitesime con t , il binomio $y + at$ è certo d'ordine superiore al 1°; e ciò perchè la x associata tende per $t \rightarrow 0$ ad un valore non nullo (finito o infinito), che è l'ascissa $x = -\frac{p}{m}$ del punto comune dalle rette

D, L . Questo punto è il limite d'una delle tre intersezioni variabili, perchè D, L son distinte e fanno parte delle curve limiti.

Così delle intersezioni aventi per limite O , se $e - bp = 0$, ce ne rimane al più una, in quanto una sola delle y infinitesime con t può ormai dar luogo ad un binomio $y + at$ del 1° ordine.

2. - Dobbiamo ora mostrare che effettivamente accade *sempre* che una almeno delle tre intersezioni abbia per limite O .

All'uopo osserviamo che le intersezioni, le quali al limite cadono in $C (x = 0)$, son due, perchè il limite di una delle tre intersezioni variabili (e cioè la $x = -\frac{p}{m}, y = 0$) cade generalmente fuori di C . Ciò posto, le intersezioni al finito delle [1], [2] verificano anche, per ogni $t \neq 0$, l'equazione

$$\frac{y\eta(x, y; t) - (mx + ny + p)\varepsilon(x, y; t)}{t} = y(cx + dy + e) -$$

$$-(ax + by)(mx + ny + p) + t[y\eta_0 - (mx + ny + p)\varepsilon_0] = 0$$

combinazione lineare delle $\varepsilon = 0, \eta = 0$. Epperò le intersezioni limiti attesa l'algebricità e quindi la continuità delle funzioni in gioco, verificano l'equazione limite:

$$[5] \quad y(cx + dy + e) - (ax + by)(mx + ny + p) = 0.$$

Ma questa è di 2° grado: dunque le intersezioni della conica [5] e della retta $x = 0$ son proprio le due intersezioni delle [1], [2], che al limite stanno su C . Si conclude così che di queste due intersezioni una cade in $O (x = 0, y = 0)$ e l'altra nel punto definito su C dall'equazione:

$$y(d - bn) + (e - pb) = 0,$$

suggerita già dalla [4].

Si vede inoltre che un'altra intersezione al limite cade in O se $m = 0, p = 0$, cioè se L passa per O ; oppure se $d - bn = 0$ ed $e - bp = 0$.

È facile verificare che la condizione $e - bp = 0$ equivale a ciò che le coordinate del centro $x = -bt, y = -at$ della [1] ⁽¹⁾, rendono il primo

(1) Se trattasi di due curve piane analitiche qualunque E, H , il punto in questione è quello nel quale è identicamente nullo il differenziale totale del primo membro dell'equazione di E .

membro della [2] infinitesimo di 2° ordine rispetto a t ; ciò che vuol dire che la conica H infinitamente vicina ad H_0 passa pel centro della conica E infinitamente vicina ad E_0 .

Tale condizione è soddisfatta p. es. allorchè E possiede un punto doppio variabile avente per limite O ⁽¹⁾ ed H , per ogni t , passa per quel punto doppio.

3. — Proviamo infine che, nel caso della dimostrazione del teorema fondamentale della « Teoria », due intersezioni limiti cadono in O .

Il lemma del n. 17 s'applica all'ultimo passo della ricordata dimostrazione, della quale presuppongo noti i precedenti (che qui sarebbe troppo lungo riassumere) e le notazioni. Si tratta di trovare il limite del gruppo

$$g^* \equiv (E^*, H^*) - 2\Gamma_1^* - (A, E^*)$$

nel caso in cui la curva H^* , individuata dalla E^* , variabile nel sistema $\infty^1 \gamma$, al limite venga a contenere come parte C , che insieme a D costituisce il limite E_0 di E^* .

Anzitutto, siccome il gruppo Γ_1^* è ben definito anche al limite, dove riducesi al gruppo Γ_1 , è chiaro a priori che del gruppo limite di (E^*, H^*) fa parte $2\Gamma_1$; il che del resto segue altresì dalla considerazione finale del numero precedente.

Poichè g^* varia su F in una serie d'equivalenza, descritta da una serie lineare razionalmente individuata sopra una curva mobile in un sistema lineare, così al limite esso diviene equivalente (sulla superficie e sulla curva spezzata $C + D$) a $(C, C) + (D, D) + 2\Gamma_2$. La parte del gruppo limite situata fuori di C equivale su D ad un gruppo (D, D) . Rimane su C un gruppo equivalente a $(C, C) + 2\Gamma_2$, del quale però, in virtù del lemma, fa già parte Γ_2 , in quanto i punti di Γ_2 sono comuni a C, D e per ciascuno di essi passa la E^* infinitamente vicina ad E_0 . Fatta astrazione da Γ_2 , quel che resta del gruppo limite su C è un gruppo equivalente a $(C, C) + \Gamma_2$. Ma siccome (n. 15 della « Teoria ») la serie lineare completa $|(C, C) + \Gamma_2|$ ha il gruppo fisso Γ_2 , ciò significa che alla parte del gruppo limite di g^* , che sta su C , appartiene non soltanto Γ_2 , ma $2\Gamma_2$. Ossia al limite due intersezioni delle E^*, H^* , per $E^* \rightarrow E_0$, vengono a coincidere con ciascun dei punti di Γ_2 . E si conclude come nel n. 23.

Il ragionamento non è applicabile, senza ulteriore riflessione, al caso in cui H^* al limite contiene come parte D , invece di C . La differenza fra

(¹) Dal che consegue automaticamente che la E infinitamente vicina ad E_0 passa per O . Ved. p. es., SEVERI, *Trattato di geometria algebrica*, vol. I, parte I (Bologna, Zanichelli, 1926), pag. 38.

i due casi dipende essenzialmente da ciò che non si può affermare (n. 16 della « Teoria ») che la serie completa $|(D, D) + \Gamma_2|$ su D , posseda il gruppo fisso Γ_2 . La cosa è vera allora e soltanto allora che le curve canoniche impure K di F seghino su C una serie lineare completa (ciò non significa ancora che il sistema lineare $|C|$ sia regolare, come suppone B. SEGRE nel suo ragionamento). Invero (pag. 366 della « Teoria ») la dimensione della serie completa $|(D, D) + \Gamma_2|$ vale $v - \pi + i + j$; e d'altronde (pag. 367) $i + j = p_g + \tau$, ove τ è la deficienza della serie segata su C dalle K . Perciò quando $\tau = 0$, la serie completa $|(D, D) + \Gamma_2|$ ha la stessa dimensione della $|(D, D)|$ e quindi il gruppo Γ_2 è fisso.

Ma a prescindere da ciò basta tener conto:

a) Che le H^* relative alla generica E^* , costruita nel n. 22 della « Teoria », segan su E^* , fuori di Γ_1^* e di (A, E^*) una serie lineare, la quale ha per limite sulla $E_0 = C + D$, comunque si passi al limite, una serie d'equivalenza segabile con curve H , limiti delle H^* , passanti pei gruppi Γ_1 , (A, E_0) , limiti di Γ_1^* , (A, E^*) .

b) Che (n. 15 della « Teoria ») la serie segata su D dalle E per Γ_1 , fuori di Γ_1 , e quindi anche la serie segata su D dalle H per $\Gamma_1 + (A, D)$, fuori di $\Gamma_1 + (A, D)$, pur potendo essere incompleta, ha sempre il gruppo fisso Γ_2 .

E questo permette di concludere, anche se H^* al limite contiene D , conformemente al n. 23.

4. - Giova aggiungere, a proposito di quanto si è esposto nel n. 3, qualche altra considerazione. Il gruppo (E^*, H^*) , in quanto le curve E^*, H^* , sono rispettivamente equivalenti alle $E_0 = C + D$, $H_0 = C + L$, equivale ad un gruppo $(C, C) + (C, D) + (C, L) + (D, L)$ e quindi la parte del gruppo limite che sta su C equivale ad un gruppo $(C, C) + (C, D) + (C, L)$, cioè ad un gruppo comune a C e ad una curva equivalente a $C + D + L$, ossia ad $E_0 + L$, od anche ad un gruppo comune a C e ad una curva equivalente a $H_0 + D$.

Ora la curva che si può costruire su F trasferendo ivi il procedimento del n. 2, è appunto una curva equivalente alle curve $E_0 + L$, $H_0 + D$, delle quali essa è combinazione lineare. Pertanto esiste una curva equivalente ad $E_0 + L$ o ad $H_0 + D$, la quale stacca su C il gruppo limite. Questa curva, a norma dell'osservazione finale del n. 2, ha con C , in ciascuno dei punti del gruppo Γ_1 , molteplicità d'intersezione 2 e sega ulteriormente C in un gruppo equivalente a $(C, C) + 2\Gamma_2 + (A, C)$, cioè fuori di (A, C) , che è il limite di quella parte di (A, E^*) che va, su C , in un gruppo $(C, C) + 2\Gamma_2$. Essa, a norma del lemma, passa inoltre per Γ_2 ed ha ivi in conseguenza con C molteplicità d'intersezione 2.

Matematica. — *Un preliminare teorema di Analisi per lo studio dei moti con resistenza passiva* ⁽¹⁾. Nota di LUIGI AMERIO, presentata ⁽²⁾ dall'Aggregato MAURO PICONE.

In una questione studiata nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo e risolta da CACCIOPOLI ⁽³⁾, in collaborazione con GHIZZETTI, si è presentata l'opportunità di dare qualche criterio sulla prolungabilità in un intervallo infinito degli integrali di un particolare sistema di equazioni differenziali non lineari.

In questa Nota, che si ricollega a precedenti ricerche sulla dinamica del punto compiute dal prof. PICONE ⁽⁴⁾, sono indicate su tale argomento alcune proposizioni, alle quali può, tra l'altro, riferirsi il sistema di equazioni considerato da CACCIOPOLI e GHIZZETTI.

1. Si abbia il sistema di n equazioni differenziali del secondo ordine nelle funzioni incognite $x_1(t), \dots, x_n(t)$ della variabile reale t

$$[1] \quad \ddot{x}_i(t) + \frac{\partial U(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} = F_i(t; x_1, \dots, x_n; \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n; \ddot{x}_1, \dots, \ddot{x}_n) \\ (i = 1, 2, \dots, n)$$

dove $U(x_1, \dots, x_n)$ è una funzione assegnata, continua insieme con le sue derivate parziali in tutti i punti (x_1, \dots, x_n) dello spazio S_n e le

$$F_i(t; x_1, \dots, x_n; \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n; \ddot{x}_1, \dots, \ddot{x}_n)$$

sono funzioni assegnate, continue per $t \geq t_0$ e per

$$-\infty < x_m < \infty, \quad -\infty < \dot{x}_m < \infty, \quad -\infty < \ddot{x}_m < \infty \quad \text{con } m = 1, 2, \dots, n.$$

⁽¹⁾ Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

⁽²⁾ Nell'Adunanza del 16 gennaio 1942-XX.

⁽³⁾ In questi Rendiconti sono in corso di stampa due Note di CACCIOPOLI e GHIZZETTI su tale argomento.

⁽⁴⁾ M. PICONE, *Sul moto dei gravi nell'atmosfera*, B. U. M. I., 1930. *Sul moto dei gravi in un mezzo resistente*, B. U. M. I., 1931.

È facile riconoscere che tale sistema comprende come caso particolare il sistema di equazioni differenziali traducendo il moto di un punto soggetto a una forza di richiamo di potenziale U , a una resistenza passiva di componenti R_i e a una forza motrice di componenti G_i , quando si ponga $F_i = G_i - R_i$.

Indicando con $P(t)$ il punto di S_n avente coordinate $x_1(t), \dots, x_n(t)$ e usando le notazioni vettoriali scriveremo il sistema [1] nella forma

$$[2] \quad \ddot{P}(t) + \text{grad } U(P) = F(t, P, \dot{P}, \ddot{P})$$

dove il vettore $F(t, \alpha, \beta, \gamma)$ risulta funzione continua per $t \geq t_0$ e per tutti i vettori α, β, γ ; $U(P)$ è uno scalare funzione continua del posto, insieme con le sue derivate parziali.

Supponiamo inoltre soddisfatte le seguenti condizioni:

a) In tutti i punti P di S_n si ha

$$U(P) \geq 0.$$

b) Esiste nel campo $t \geq t_0, \xi \geq 0, \eta \geq 0$ una funzione continua $\omega(t, \xi, \eta)$ tale che $\eta \omega(t, \xi, \eta)$ sia non decrescente come funzione di ξ e come funzione di η ; inoltre tale che risulti, per tutti i vettori α, β, γ e per $t \geq t_0$,

$$\beta \times F(t, \alpha, \beta, \gamma) \leq |\beta| \omega(t, |\alpha|, |\beta|)$$

e che, prefissati ad arbitrio due numeri $A > 0, B > 0$, l'equazione

$$\ddot{z}(t) = \omega(t, z, \dot{z})$$

ammetta un integrale $z(t)$ soddisfacente alle condizioni iniziali

$$z(t_0) = A$$

$$\dot{z}(t_0) = B$$

e prolungabile nel tratto $t_0 \mid \infty$.

Allora, se la [2] è equivalente a un'equazione del tipo

$$[3] \quad \ddot{P}(t) = H(t, P, \dot{P}),$$

dove il vettore $H(t, \alpha, \beta)$ è funzione continua per $t \geq t_0$ e per tutti i vettori α, β , e se vale per tale equazione (e quindi per la [2]), il teorema locale di esistenza, ogni integrale della [2], corrispondente ad arbitrarie condizioni iniziali per $t = t_0$, è prolungabile nel tratto $t_0 \mid \infty$.

Dimostrazione. - Supponiamo che $P(t)$ sia un integrale dell'equazione [2] definito nel tratto $t_0 - \lambda$ e dimostriamo che tale integrale

può prolungarsi in un intervallo $t_0 \vdash t_1$, con $t_1 > \lambda$. In tal modo la tesi sarà provata.

Per questo, moltiplichiamo scalarmente entrambi i membri dell'equazione [2] per $\dot{P}(t)$ e integriamo tra t_0 e t , con $t_0 \leq t < \lambda$.

Ricaviamo

$$\frac{|\dot{P}(t)|^2}{2} + U(P(t)) - \frac{|\dot{P}(t_0)|^2}{2} - U(P(t_0)) = \int_{t_0}^t \dot{P}(\tau) \times F(\tau, P, \dot{P}, \ddot{P}) d\tau$$

e quindi, tenendo presenti le condizioni a), b),

$$[4] \quad \frac{|\dot{P}(t)|^2}{2} \leq \frac{|\dot{P}(t_0)|^2}{2} + U(P(t_0)) + \int_{t_0}^t |\dot{P}(\tau)| \omega(\tau, |P|, |\dot{P}|) d\tau.$$

Presi due numeri positivi A, B , con

$$A > |P(t_0)|, \\ \frac{B^2}{2} > \frac{|\dot{P}(t_0)|^2}{2} + U(P(t_0)),$$

sia $z(t)$ un integrale dell'equazione

$$\ddot{z}(t) = \omega(t, z, \dot{z})$$

soddisfacente alle condizioni iniziali

$$z(t_0) = A, \\ \dot{z}(t_0) = B.$$

Un tale integrale esiste per ipotesi ed è prolungabile nell'intervallo $t_0 \vdash \infty$.

Vale inoltre per $z(t)$ la relazione

$$[5] \quad \frac{\dot{z}^2(t)}{2} = \frac{B^2}{2} + \int_{t_0}^t \dot{z}(\tau) \omega(\tau, z, \dot{z}) d\tau.$$

Per $t = t_0$, si ha $z(t_0) > |P(t_0)|$, $\dot{z}(t_0) > |\dot{P}(t_0)|$; perciò in un conveniente intorno $t_0 \leq t \leq \delta$, con $t_0 < \delta < \lambda$, sarà

$$[6] \quad \begin{cases} z(t) > |P(t)|, \\ \dot{z}(t) > |\dot{P}(t)|. \end{cases}$$

Sia \bar{t} , con $t_0 < \bar{t} \leq \lambda$, l'estremo superiore dei numeri δ .

Non può essere $\bar{t} < \lambda$. Infatti, in tal caso, valgono le [6] per $t_0 \leq t < \bar{t}$, mentre deve aver luogo almeno una delle eguaglianze

$$z(\bar{t}) = |P(\bar{t})|,$$

$$\dot{z}(\bar{t}) = |\dot{P}(\bar{t})|.$$

Dimostriamo che, se è $\bar{t} < \lambda$, le [6] valgono anche per $t = \bar{t}$.

Siccome $\eta\omega(t, \xi, \eta)$ è non decrescente come funzione di ξ e come funzione di η , si ricava dalle [6], per $t_0 \leq \tau \leq t < \bar{t}$,

$$|\dot{P}(\tau)| \omega(\tau, |P|, |\dot{P}|) \leq \dot{z}(\tau) \omega(\tau, z, \dot{z})$$

e quindi, per le [4], [5], essendo $\frac{B^2}{2} > \frac{|\dot{P}(t_0)|^2}{2} + U(P(t_0))$,

$$\begin{aligned} \frac{|\dot{P}(t)|^2}{2} &\leq \frac{|\dot{P}(t_0)|^2}{2} + U(P(t_0)) + \int_{t_0}^t |\dot{P}(\tau)| \omega(\tau, |P|, |\dot{P}|) d\tau < \\ &< \frac{B^2}{2} + \int_{t_0}^t \dot{z}(\tau) \omega(\tau, z, \dot{z}) d\tau = \frac{\dot{z}^2(t)}{2} \end{aligned}$$

diseguaglianza che continua necessariamente a valere per $t = \bar{t}$.

È poi, per $t_0 \leq t \leq \bar{t}$,

$$P(t) = P(t_0) + \int_{t_0}^t \dot{P}(\tau) d\tau$$

e quindi

$$|P(t)| < A + \int_{t_0}^t \dot{z}(\tau) d\tau = z(t).$$

Deve perciò essere $\bar{t} = \lambda$.

In tal caso si ha, per $t_0 \leq t < \lambda$,

$$|\dot{P}(t)| < \dot{z}(t) \leq M$$

dove M è il massimo di $\dot{z}(t)$ nell'intervallo $t_0 \vdash \lambda$.

Siccome è

$$|\dot{P}(t)|^2 = \sum_{i=1}^n \dot{x}_i^2(t),$$

si ricava anche

$$[7] \quad |\dot{x}_i(t)| < M$$

cioè le derivate delle funzioni $x_1(t), \dots, x_n(t)$ sono limitate nel tratto $t_0 \vdash \lambda$.

Esiste perciò finito il limite

$$[8] \quad \lim_{t \rightarrow \lambda -} \dot{x}_i(t) = \dot{x}_i(t_0) + \int_{t_0}^{\lambda} \ddot{x}_i(\tau) d\tau = \delta_i.$$

Dall'equazione [3] si ottiene poi

$$\ddot{x}_i(t) = H_i(t; x_1, \dots, x_n; \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$$

dove le $H_i(t; x_1, \dots, x_n; \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$ sono funzioni continue per $t \geq t_0$ e per $-\infty < x_r < \infty$, $-\infty < \dot{x}_r < \infty$, con $r = 1, \dots, n$.

Per le [7], [8], tali funzioni sono limitate nell'intervallo $t_0 \leq t < \lambda$ e perciò esistono finiti i limiti

$$[9] \quad \lim_{t \rightarrow \lambda -} \ddot{x}_i(t) = \ddot{x}_i(t_0) + \int_{t_0}^{\lambda} H_i(\tau; x_1, \dots, x_n; \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) d\tau = \eta_i.$$

Per le [8], [9] esistono allora finiti anche i limiti

$$\lim_{t \rightarrow \lambda -} \ddot{x}_i(t) = H_i(\lambda; \delta_1, \dots, \delta_n; \eta_1, \dots, \eta_n).$$

Posto $x_i(\lambda) = \delta_i$, la funzione $x_i(t)$ risulta continua nell'intervallo chiuso $t_0 \leq t \leq \lambda$ e ammette per $t_0 \leq t < \lambda$ le derivate $\dot{x}_i(t)$, $\ddot{x}_i(t)$ le quali tendono a limiti finiti quando $t \rightarrow \lambda$. Per un noto teorema tali limiti coincidono con le derivate prima e seconda a sinistra della $x_i(t)$ nel punto $t = \lambda$.

Siccome vale per l'equazione [3], e quindi per la [2], il teorema di esistenza nell'intorno di $t = \lambda$, con le condizioni

$$x_i(\lambda) = \delta_i,$$

$$\dot{x}_i(\lambda) = \eta_i,$$

la tesi risulta provata.

COROLLARIO I. — Sia

$$\omega(t, z, \dot{z}) = \varphi(t) f(\dot{z})$$

con $\varphi(t)$ funzione continua e positiva per $t \geq t_0$, $f(\dot{z}) > 0$ e continua per $\dot{z} \geq 0$, $\dot{z} f(\dot{z})$ non decrescente.

Allora ogni integrale dell'equazione [2], corrispondente ad arbitrarie condizioni iniziali per $t = t_0$, è prolungabile nell'intervallo $t_0 \leq t < \infty$ se risulta

$$\int_0^{\infty} \frac{d\dot{z}}{f(\dot{z})} = +\infty.$$

In particolare ciò avviene se è

$$f(\dot{z}) = (\dot{z} + h) \log(\dot{z} + k)$$

con $h > 0, k > 1$.

Dimostrazione. — Integriamo l'equazione differenziale

$$\ddot{z} = \varphi(t) f(\dot{z})$$

con le condizioni iniziali

$$z(t_0) = A \geq 0$$

$$\dot{z}(t_0) = B \geq 0.$$

Siccome la funzione $f(\dot{z})$ è positiva, si ricava

$$[10] \quad \int_B^{\dot{z}} \frac{d\dot{z}}{f(\dot{z})} = \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau$$

e poichè risulta

$$\int_B^\infty \frac{d\dot{z}}{f(\dot{z})} = +\infty,$$

l'equazione [10] definisce per ogni $t \geq t_0$ una funzione continua e crescente

$$\dot{z}(t) = \vartheta(t) \quad (\dot{z}(t_0) = B)$$

da cui, per $t \geq t_0$,

$$z(t) = A + \int_{t_0}^t \vartheta(\tau) d\tau.$$

Osservazione. — Se l'integrale

$$\int_0^\infty \frac{d\dot{z}}{f(\dot{z})}$$

converge al valore k , si ha

$$\lim_{B \rightarrow \infty} \int_B^\infty \frac{d\dot{z}}{f(\dot{z})} = 0.$$

Preso ad arbitrio $t_1 > t_0$, siccome è $\varphi(t) > 0$, si può determinare B_1 in modo che per $B \geq B_1$ risulti

$$\int_B^\infty \frac{d\dot{z}}{f(\dot{z})} < \int_{t_0}^{t_1} \varphi(\tau) d\tau.$$

Perciò la funzione $z(t)$ definita dall'equazione [10] non è, in tale ipotesi, prolungabile oltre t_1 .

COROLLARIO II. — Sia

$$\omega(t, z, \dot{z}) = \alpha(t)z + \beta(t)\dot{z} + \gamma(t)$$

con $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ funzioni continue per $t \geq t_0$ e non negative.

Allora ogni integrale dell'equazione [2], corrispondente ad arbitrarie condizioni iniziali per $t = t_0$, è prolungabile nell'intervallo $t_0; -\infty$.

Dimostrazione. — Basta osservare che, nelle ipotesi poste, la funzione

$$\alpha(t)z\dot{z} + \beta(t)\dot{z}^2 + \gamma(t)\dot{z}$$

è non decrescente nel dominio $z \geq 0$, $\dot{z} \geq 0$ e che, per la linearità, l'equazione

$$\ddot{z} = \alpha(t)z + \beta(t)\dot{z} + \gamma(t)$$

ammette un (solo) integrale definito nell'intervallo $t_0; -\infty$ e soddisfacente a condizioni iniziali arbitrarie.

2. Il teorema dimostrato nel n. 1 si può estendere se, in luogo della b), si pone la seguente condizione:

b') Esiste una successione $\{t_n\}$, con

$$t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = +\infty,$$

e una successione di funzioni $\{\omega_n(t, \xi, \eta)\}$ tali che:

1°) $\omega_n(t, \xi, \eta)$ sia funzione continua per $t_n \leq t \leq t_{n+1}$, $\xi \geq 0$, $\eta \geq 0$ ed $\eta\omega_n(t, \xi, \eta)$ sia non decrescente, come funzione di ξ e come funzione di η , nello stesso campo;

2°) risulti per tutti i vettori α, β, γ e per $t_n \leq t \leq t_{n+1}$,

$$\beta \times F(t, \alpha, \beta, \gamma) \leq |\beta| \omega_n(t, |\alpha|, |\beta|);$$

3°) prefissati ad arbitrio $A > 0$, $B > 0$, l'equazione

$$\ddot{z} = \omega_n(t, z, \dot{z})$$

ammetta in tutto l'intervallo $t_n - t_{n+1}$ un integrale soddisfacente alle condizioni iniziali

$$z(t_n) = A$$

$$\dot{z}(t_n) = B.$$

Dimostrazione. — Sia $P(t)$ un integrale dell'equazione [2] definito nel tratto $t_0 \leq t$ e sia λ l'estremo superiore dei numeri t . Cominciamo col dimostrare che è $\lambda > t_1$.

Supponiamo infatti $\lambda \leq t_1$ e osserviamo che, per ipotesi, nell'intervallo $t_0 \leq t_1$ esiste un integrale dell'equazione

$$\ddot{z} = \omega_0(t, z, \dot{z})$$

soddisfacente alle condizioni iniziali

$$z(t_0) = A > |P(t_0)|$$

$$\dot{z}(t_0) = B > \sqrt{|\dot{P}(t_0)|^2 + 2U(P(t_0))}.$$

Se M è il massimo di $\dot{z}(t)$ nell'intervallo $t_0 \leq t_1$, ragionando come si è fatto nel n. 1, si trova, per $t_0 \leq t < \lambda$,

$$|\dot{P}(t)| < M$$

e si deduce che l'integrale $P(t)$ è prolungabile oltre λ . Deve perciò essere $\lambda > t_1$. Proseguendo in modo analogo per l'intervallo $t_1 \leq t_2$ si dimostra che è $\lambda > t_2$ e così via.

COROLLARIO III. — Sia, per $t_n \leq t \leq t_{n+1}$,

$$\omega_n(t, z, \dot{z}) = g_n(z)$$

con $g_n(z)$ funzione positiva, continua e non decrescente.

Allora ogni integrale dell'equazione [2], corrispondente a valori iniziali arbitrari per $t = t_0$, è prolungabile nell'intervallo $t_0 - \infty$ se risulta

$$\int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{\int_0^z g_n(u) du}} = +\infty \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

In particolare ciò avviene se è

$$g_n(z) = c_n(z + h_n) \log^2(z + k_n)$$

con $c_n > 0$, $h_n > 0$, $k_n > 1$.

Dimostrazione. — Data l'equazione

$$\ddot{z} = g_n(z) \quad (z(t_n) = A \geq 0, \dot{z}(t_n) = B \geq 0)$$

si ricava

$$\frac{dz^2}{dz} = 2 g_n(z)$$

da cui, integrando,

$$z(t) = \sqrt{B^2 + 2 \int_A^z g_n(u) du}.$$

Ne segue

$$t - t_n = \int_A^z \frac{dz}{\sqrt{B^2 + 2 \int_A^z g_n(u) du}}.$$

Deve poi esistere, qualunque siano A e B , un valore \bar{z} (dipendente da A, B) che soddisfi all'equazione

$$[11] \quad t_{n+1} - t_n = \int_A^{\bar{z}} \frac{dz}{\sqrt{B^2 + 2 \int_A^z g_n(u) du}}.$$

Ora si ha, per ipotesi,

$$\int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{\int_0^z g_n(u) du}} = +\infty$$

e si constata che è, per $A \geq 0, B \geq 0$,

$$\int_A^\infty \frac{dz}{\sqrt{B^2 + 2 \int_A^z g_n(u) du}} = +\infty.$$

Esiste allora un valore \bar{z} che soddisfi alla [11] e quindi la tesi è provata.

COROLLARIO IV. — Sia, per $t_n \leq t \leq t_{n+1}$,

$$\omega_n(t, z, \dot{z}) = \dot{z} f_n(z)$$

con $f_n(z)$ funzione continua, non decrescente e positiva.

Allora ogni integrale dell'equazione [2] è prolungabile nell'intervallo $t_0 - \infty$ se risulta

$$\int_0^\infty \frac{dz}{\int_0^z f_n(u) du} = +\infty.$$

In particolare ciò avviene se è

$$f_n(z) = c_n \log(z + k_n)$$

con $c_n > 0$, $k_n > 1$.

Dimostrazione. — Data l'equazione

$$\ddot{z} = \dot{z} f_n(z) \quad (z(t_n) = A \geq 0, \dot{z}(t_n) = B > 0)$$

si ha, prescindendo dalla soluzione $z = \text{cost.}$, che non interviene essendo $B > 0$,

$$\frac{d\dot{z}}{dz} = f_n(z)$$

e quindi

$$\dot{z}(t) = B + \int_A^z f_n(u) du.$$

Ne segue

$$[12] \quad t - t_n = \int_A^z \frac{dz}{B + \int_A^z f_n(u) du}.$$

Essendo, per ipotesi,

$$\int_0^\infty \frac{dz}{\int_0^z f_n(u) du} = +\infty$$

si ricava anche

$$\int_A^\infty \frac{dz}{B + \int_A^z f_n(u) du} = +\infty.$$

Esiste allora un valore z soddisfacente all'equazione

$$t_{n+1} - t_n = \int_A^z \frac{dz}{B + \int_A^z f_n(u) du}$$

e quindi la tesi è provata.

3. Si consideri l'equazione differenziale

$$[13] \quad \ddot{x}(t) + x(t) + \varphi(\dot{x}) = f(t)$$

studiata nella prima Nota di CACCIOPOLI e GHIZZETTI.

Si suppone $f(t)$ continua nell'intervallo $t_0 | - \infty$, $\varphi(\dot{x})$ continua con la sua derivata nell'intervallo $-\infty < \dot{x} < \infty$. Esiste inoltre un numero $\delta > 0$ tale che per $|\dot{x}| \geq \delta$ risulti

$$\dot{x}\varphi(\dot{x}) \geq 0.$$

Osserviamo che è soddisfatto il teorema locale di esistenza (e unicità). Posto poi

$$U(x) = \frac{x^2}{2}$$

la [13] diventa

$$\ddot{x}(t) + \text{grad } U(x) = F(t, \dot{x})$$

ed è

$$\dot{x}F(t, \dot{x}) = -\dot{x}\varphi(\dot{x}) + \dot{x}f(t) \leq |\dot{x}|(M + |f(t)|)$$

dove M è il massimo di $|\varphi(\dot{x})|$ nell'intervallo $-\delta | - \delta$.

Per il corollario I possiamo perciò affermare che tutti gli integrali della [13], corrispondenti ad arbitrarie condizioni iniziali per $t = t_0$, sono prolungabili nel tratto $t_0 | - \infty$.

Consideriamo ora il sistema

$$[14] \quad \mu_i \ddot{x}_i(t) + \sum_k^n A_{ik} \dot{x}_k + \varphi_i(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) = f_i(t) \quad (i = 1, \dots, n)$$

studiato nella seconda Nota di CACCIOPOLI e GHIZZETTI.

Si suppongono soddisfatte le seguenti condizioni:

α) le costanti μ_i sono positive;

β) si ha $A_{ik} = A_{ki}$ e la forma quadratica $\sum_{i,k}^{1 \dots n} A_{ik} \xi_i \xi_k$ è definita positiva;

γ) le funzioni $\varphi_i(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$ sono continue insieme con le loro derivate parziali in ogni punto $(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$ e la forma quadratica

$$\sum_{i,k}^{1 \dots n} \frac{\partial \varphi_i(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)}{\partial \dot{x}_k} \xi_i \xi_k$$

è semidefinita positiva;

δ) le funzioni $f_i(t)$ sono continue nell'intervallo $t_0 | - \infty$.

Osserviamo che è soddisfatto il teorema locale di esistenza (e unicità).

Col cambiamento di funzioni incognite

$$y_i(t) = \sqrt{\mu_i} x_i(t)$$

ricaviamo dal sistema [14] il sistema

$$\ddot{y}_i(t) + \sum_k^n B_{ik} y_k + \psi_i(\dot{y}_1, \dots, \dot{y}_n) = g_i(t)$$

dove la forma $\sum_{i,k}^{1 \dots n} B_{ik} \xi_i \xi_k$ è definita positiva e la forma

$$\sum_{i,k}^{1 \dots n} \frac{\partial \psi_i(\dot{y}_1, \dots, \dot{y}_n)}{\partial \dot{y}_k} \xi_i \xi_k$$

è semidefinita positiva.

Indicando con $P(t)$, $H(\dot{P})$, $G(t)$ i vettori di componenti $y_i(t)$, $\dot{\psi}_i(\dot{y}_1, \dots, \dot{y}_n)$, $f_i(t)$ rispettivamente, e posto

$$U(P) = \frac{1}{2} \sum_{i,k}^{1 \dots n} B_{ik} y_i y_k,$$

si ricava dal sistema [14] l'equazione vettoriale

$$[15] \quad \ddot{P}(t) + \text{grad } U(P) + H(\dot{P}) = G(t).$$

Prefissato un vettore non nullo β , di componenti β_i , si consideri il prodotto scalare

$$\beta \times H(\beta) = \sum_1^n \beta_i \dot{\psi}_i(\beta_1, \dots, \beta_n).$$

Consideriamo poi, per $0 \leq \lambda \leq 1$, la funzione $\psi_i(\lambda\beta_1, \dots, \lambda\beta_n)$ e poniamo

$$\dot{\psi}_{ik}(\dot{y}_1, \dots, \dot{y}_n) = \frac{\partial \psi_i(\dot{y}_1, \dots, \dot{y}_n)}{\partial \dot{y}_k}.$$

Ricaviamo

$$\begin{aligned} \psi_i(\beta_1, \dots, \beta_n) - \psi_i(0, \dots, 0) &= \int_0^1 \frac{d\psi_i(\lambda\beta_1, \dots, \lambda\beta_n)}{d\lambda} d\lambda = \\ &= \int_0^1 \left(\sum_1^n \dot{\psi}_{ik}(\lambda\beta_1, \dots, \lambda\beta_n) \beta_k \right) d\lambda \end{aligned}$$

e quindi

$$\sum_1^n \beta_i \dot{\psi}_i(\beta_1, \dots, \beta_n) - \sum_1^n \beta_i \dot{\psi}_i(0, \dots, 0) = \int_0^1 \left(\sum_{i,k}^{1 \dots n} \dot{\psi}_{ik} \beta_i \beta_k \right) d\lambda \geq 0$$

essendo la forma $\sum_{i,k}^{1 \dots n} \dot{\psi}_{ik} \xi_i \xi_k$ semidefinita positiva.

Ne segue

$$\beta \times G(t) - \beta \times H(\beta) \leq -\beta \times H(0) + \beta \times G(t) \leq |\beta| (|H(0)| + |G(t)|)$$

e quindi, per il corollario I, la tesi è provata.

Matematica. — *Ricerche asintotiche per una particolare equazione differenziale non lineare* ⁽¹⁾. Nota di RENATO CACCIOPPOLI ed ALDO GHIZZETTI, presentata ⁽²⁾ da MAURO PICONE, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

In un quesito proposto all'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo si è presentato il problema di integrare la seguente equazione differenziale

$$[1] \quad y'' + y + y' |y'| = \varepsilon \sin x$$

colle condizioni iniziali

$$[2] \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -\varepsilon$$

e per una serie di valori del parametro ε tutti inferiori ad 1.

Dal punto di vista numerico il problema non ha offerto difficoltà; si è arrivati a tabellare l'integrale $y(x, \varepsilon)$ coll'approssimazione richiesta e a dare così completa soluzione al quesito proposto. Sui risultati numerici si è constatato che, da un certo punto in poi, tale integrale ha un andamento sensibilmente periodico, con periodo 2π ; ciò ha portato ad assegnare, per x abbastanza grande e per i considerati valori di ε , la seguente semplicissima formola approssimata ⁽³⁾

$$[3] \quad y(x, \varepsilon) = -\frac{4}{3} \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\pi}} \cos x.$$

Rimaneva però aperta la questione di dimostrare rigorosamente le proprietà dell'equazione [1] così intraviste, e più generalmente di intraprendere ricerche asintotiche per le equazioni differenziali del tipo

$$[4] \quad y'' + y + \varphi(y') = f(x)$$

delle quali è ben manifesta la grande importanza nello studio dei moti oscillatori forzati di un punto materiale soggetto ad una forza elastica di richiamo e ad una forza dissipativa dipendente dalla velocità.

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

⁽²⁾ Nell'Adunanza del 16 gennaio 1942-XX.

⁽³⁾ In una Nota, dedicata al moto di rollio del bastimento, presentemente in corso di pubblicazione a cura del Comitato per i progetti delle navi del Ministero della Marina, dovuta al prof. A. SIGNORINI, consulente ordinario dell'I. N. A. C., trovasi riportata e ampiamente giustificata la [3].

Tali ricerche da me proposte al Prof. Renato Caccioppoli sono state da questi brillantemente compiute colla conquista di un notevole criterio di stabilità per gli integrali della [4], nonché di un teorema d'esistenza per un integrale periodico della [4] nel caso che la $f(x)$ sia periodica, risolvendo così anche una questione da lungo tempo pensata, come ebbe ad indicare all'Istituto il Prof. A. Signorini, dagli studiosi dei moti sopradetti. Il Caccioppoli ha anche dato, nel caso particolare della [1], una limitazione dell'ampiezza delle oscillazioni della soluzione periodica, che è in perfetto accordo con i risultati dei calcoli numerici eseguiti dall'Istituto.

Nella presente Nota, redatta dal prof. Aldo GHIZZETTI, consulente ordinario dell'I. N. A. C., si fa conoscere l'interessante analisi del Caccioppoli con quei perfezionamenti e completamenti dovuti ad una profonda rielaborazione di essa fatta dallo stesso Ghizzetti.

M. PICONE.

1. Premettiamo un semplice risultato relativo alle trasformazioni piane.

Diremo che una trasformazione

$$u_1 = \alpha(u, v) \quad , \quad v_1 = \beta(u, v)$$

differenziabile con continuità, del piano uv in sè stesso, è una *contrazione* se per due elementi lineari corrispondenti qualunque $ds = \sqrt{du^2 + dv^2}$, $ds_1 = \sqrt{du_1^2 + dv_1^2}$ si ha sempre $\frac{ds_1}{ds} < 1$, tranne al più per elementi spiccati da un particolare punto O , unito nella trasformazione.

Dimostriamo il seguente:

LEMMA. — *Se la trasformazione \mathcal{T} è una contrazione, e se per un particolare punto P_0 è limitato l'insieme P_1, P_2, \dots delle immagini iterate (cioè dei corrispondenti di P_0 in $\mathcal{T}, \mathcal{T}^2, \dots$), allora la successione P_0, P_1, P_2, \dots converge verso un punto unito di \mathcal{T} . Tale punto unito è unico ed è limite di ogni altra successione di immagini iterate.*

Dim. — L'ipotesi che \mathcal{T} sia differenziabile con continuità e sia una contrazione porta come conseguenza immediata che, se M_1, N_1 sono i corrispondenti in \mathcal{T} di due punti qualsiasi M, N , si avrà $\overline{M_1 N_1} < \overline{MN}$ non solo, ma anche, supposto dapprima che non esista il punto eccezionale O ,

$$\frac{\overline{M_1 N_1}}{\overline{MN}} < k < 1$$

fin che M, N si mantengono in una regione limitata Γ del piano, la costante k dipendendo soltanto da Γ . Se dunque tutti i punti della successione P_0, P_1, P_2, \dots appartengono a Γ , si avrà $\overline{P_n P_{n+1}} < k^n \overline{P_0 P_1}$, e tale successione convergerà verso un punto P^* , che sarà evidentemente

unito in \mathcal{C} . La $\overline{P^*M_1} < \overline{P^*M}$ esclude poi l'esistenza di un altro punto unito.

Considerata inoltre una qualsiasi altra successione Q_0, Q_1, Q_2, \dots di immagini iterate, si avrà $\overline{P^*Q_0} > \overline{P^*Q_1} > \overline{P^*Q_2} > \dots$, onde l'insieme di dette immagini è pure limitato; la successione relativa convergerà pertanto verso un punto unito di \mathcal{C} , vale a dire necessariamente verso P^* .

Supposto infine che esista il punto eccezionale O , si vede subito, osservando che si ha $\frac{ds_1}{ds} < k < 1$ in ogni regione limitata cui O sia esterno, che $\overline{OQ_n}$ tende a zero al divergere di n . In tal caso è anche superflua l'ipotesi della successione limitata P_0, P_1, P_2, \dots .

2. Consideriamo ora l'equazione differenziale [4], supponendo $\varphi(y')$ funzione definita per tutti i valori reali di y' , *crescente* e dotata di derivata prima continua, ed $f(x)$ funzione continua periodica di periodo ω .

Consideriamo della [4] un qualsiasi integrale $y(x)$, individuato dalle condizioni iniziali

$$y(a) = u, \quad y'(a) = v,$$

e definito per $x \geq a$ ⁽¹⁾. Detto h un arbitrario numero positivo, poniamo poi

$$y(a+h) = u_1, \quad y'(a+h) = v_1.$$

Risulta allora manifestamente definita una trasformazione piana

$$\mathcal{C}_{a,h}) \quad u_1 = \alpha(u, v), \quad v_1 = \beta(u, v),$$

differenziabile con continuità, che diciamo essere una *contrazione*.

Infatti per una variazione $(\delta u, \delta v)$ dei dati iniziali, l'integrale y subisce una variazione δy non identicamente nulla in $(a, a+h)$. Tale variazione verifica l'equazione differenziale

$$[5] \quad \delta y'' + \delta y + \frac{d\varphi}{dy'} \delta y' = 0$$

dalla quale, moltiplicando per $2\delta y'$, si trae

$$[6] \quad \frac{d}{dx} [(\delta y)^2 + (\delta y')^2] = -2 \frac{d\varphi}{dy'} (\delta y')^2.$$

⁽¹⁾ Ammettiamo che ogni integrale della [4] esista in tutto l'intervallo $(a, +\infty)$, ipotesi che legittimeremo fra breve.

Per l'ipotesi fatta sulla funzione φ si ha $\frac{d\varphi}{dy} \geq 0$. Il secondo membro della [6] è dunque non positivo; d'altra parte, se esso si annullasse identicamente in $(a, a+h)$, sarebbe $\frac{d\varphi}{dy} \delta y' \equiv 0$ e quindi, per la [5], o $\delta y \equiv 0$ o $\frac{d\varphi}{dy} = 0$. Quest'ultimo caso non si presenta che quando, nella [4], $f(x)$ si riduce ad una costante c , $\frac{d\varphi}{dy} = 0$ per $y' = 0$, e $y = c - \varphi(0)$; altrimenti la [6] esprime che la funzione $(\delta y)^2 + (\delta y')^2$ è decrescente in $(a, a+h)$. Da ciò segue che, tranne al più per gli elementi spiccati da un particolare punto unito, si ha sempre

$$\sqrt{(\delta u_1)^2 + (\delta v_1)^2} < \sqrt{(\delta u)^2 + (\delta v)^2}$$

vale a dire che $\mathcal{C}_{a,h}$ è effettivamente una contrazione.

Supponiamo in particolare $h = \omega$. Data la periodicità della funzione $f(x)$, i valori di $y(x)$, $y'(x)$ per $x = a + \omega$, $a + 2\omega, \dots$ si trovano semplicemente iterando la trasformazione $\mathcal{C}_{a,\omega}$.

Ciò posto, facciamo l'ipotesi che la [4] ammetta almeno un integrale $\bar{y}(x)$ il quale sia *stabile*, vale a dire tale che $\bar{y}(x)$, $\bar{y}'(x)$ si mantengano limitate per $x \rightarrow \infty$.

Allora, posto $\bar{u}_n = \bar{y}(a + n\omega)$, $\bar{v}_n = \bar{y}'(a + n\omega)$, il Lemma del n. 1 (applicato alla contrazione $\mathcal{C}_{a,\omega}$) ci assicura che il punto (\bar{u}_n, \bar{v}_n) converge verso un punto (u^*, v^*) , che è l'unico punto unito di $\mathcal{C}_{a,\omega}$. Possiamo di conseguenza affermare che la [4] ammette uno ed un solo *integrale periodico* $\eta(x)$ di periodo ω , il quale è individuato dalle condizioni iniziali $\eta(a) = u^*$, $\eta'(a) = v^*$.

Inoltre lo stesso Lemma ci dice che, per qualsiasi altro integrale $y(x)$ della [4], si avrà del pari che, al crescere indefinito di n , il punto di coordinate $u_n = y(a + n\omega)$, $v_n = y'(a + n\omega)$ converge verso il punto $u^* = \eta(a + n\omega)$, $v^* = \eta'(a + n\omega)$. Si avrà cioè

$$[7] \quad \sqrt{[y(a + n\omega) - \eta(a + n\omega)]^2 + [y'(a + n\omega) - \eta'(a + n\omega)]^2} < \varepsilon$$

per tutti gli n maggiori o uguali di un certo $N = N(\varepsilon)$.

Per $x > a + N\omega$, posto $x = a + N\omega + h$ con $h > 0$, la contrazione $\mathcal{C}_{a+N\omega,h}$ muta i punti

$$M[y(a + N\omega), y'(a + N\omega)] \quad , \quad N[\eta(a + N\omega), \eta'(a + N\omega)]$$

rispettivamente nei punti

$$M_1[y(x), y'(x)] \quad , \quad N_1[\eta(x), \eta'(x)]$$

e quindi, in virtù della $\overline{M_1 N_1} < \overline{MN}$ e della [7], si avrà

$$\sqrt{[y(x) - \eta(x)]^2 + [y'(x) - \eta'(x)]^2} < \varepsilon$$

per tutti gli x sufficientemente grandi. Dunque

$$[8] \quad \lim_{x \rightarrow \infty} [y(x) - \eta(x)] = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} [y'(x) - \eta'(x)] = 0$$

ossia anche l'integrale $y(x)$ è stabile ed asintotico all'integrale periodico $\eta(x)$ (nel senso precisato dalle [8]).

Abbiamo ammesso dianzi che ogni integrale della [4] possa definirsi nell'intervallo $(a, +\infty)$. Ora ciò è conseguenza immediata dell'ipotesi dell'esistenza di un integrale stabile, e però indefinitamente prolungabile, $\bar{y}(x)$.

Invero per ogni altro integrale $y(x) = \bar{y}(x) + \Delta y$, l'equazione alle differenze dà, analogamente alla [6]

$$\frac{d}{dx} [(\Delta y)^2 + (\Delta y')^2] \leq 0;$$

quindi y, y', y'' si conservano limitate, y' e y'' uniformemente continue, e y risulta indefinitamente prolungabile ⁽¹⁾.

Abbiamo così ottenuto il seguente:

TEOREMA I. — *Se nell'equazione differenziale [4], la funzione $\varphi(y')$ è crescente e dotata di derivata prima continua e la funzione $f(x)$ è continua e periodica di periodo ω , allora, se l'equazione stessa ammette un integrale stabile, essa ammette uno e un solo integrale periodico di periodo ω . Inoltre tutti gli integrali dell'equazione sono stabili e per $x \rightarrow \infty$ asintotici a tale integrale periodico.*

A complemento di questo teorema, vogliamo mostrare con un esempio che, nelle ipotesi poste, può effettivamente presentarsi il caso che la [4] sia priva di integrali stabili.

Consideriamo la

$$y'' + y + \varphi(y') = \text{sen } x$$

dalla quale discende la conseguenza

$$[9] \quad y(x) = a \text{ sen } (x - b) - \frac{1}{2} x \cos x - \int_0^x \varphi[y'(\xi)] \text{ sen } (x - \xi) d\xi,$$

⁽¹⁾ Possiamo aggiungere che in base ad alcuni teoremi generali, recentemente stabiliti da L. AMERIO (vedi la Nota: *Un preliminare teorema di Analisi per lo studio dei moti con resistenza passiva*, inserita in questi « Rendiconti », Adunanza del 16-1-1942-XX), l'indefinita prolungabilità di tutti gli integrali della [4] è garantita dalla sola ipotesi che esista un $\delta > 0$ tale che risulti $y'[\varphi(y') - \varphi(0)] \geq 0$ per $|y'| \geq \delta$, ipotesi evidentemente verificata nel caso di $\varphi(y')$ crescente.

con a, b costanti arbitrarie. Se la funzione φ è *limitata* e $\frac{\pi}{4}$ maggiore dell'estremo superiore del suo modulo, si deduce facilmente dalla [9] che $\lim_{x \rightarrow \infty} |y(x)| = \infty$.

3. In relazione al Teorema I, vogliamo ora dare un criterio di stabilità per gli integrali dell'equazione [4].

Ci conviene premettere qualche osservazione elementare sulla funzione $\eta(x)$ che soddisfa all'equazione differenziale lineare

$$[10] \quad \eta'' + 2k\eta' + \eta = \lambda$$

ed alle condizioni iniziali

$$[11] \quad \eta(x_0) = M, \quad \eta'(x_0) = 0.$$

Qui k, λ, M denotano delle costanti che supporremo soddisfacenti alle

$$[12] \quad 0 < k < 1, \quad M > \lambda > 0.$$

Per tale funzione si ha

$$[13] \quad \eta(x) = \lambda + \frac{M - \lambda}{\sqrt{1 - k^2}} e^{-k(x - x_0)} \cos \left[\sqrt{1 - k^2} (x - x_0) - \alpha \right],$$

(con $\alpha = \arcsen k$),

$$[14] \quad \eta'(x) = -\frac{M - \lambda}{\sqrt{1 - k^2}} e^{-k(x - x_0)} \sen \sqrt{1 - k^2} (x - x_0);$$

essa è crescente nell'intervallo $\left(x_0 - \frac{\pi}{\sqrt{1 - k^2}}, x_0\right)$ il cui estremo sinistro è punto di minimo e l'estremo destro punto di massimo, avendosi inoltre

$$[15] \quad \eta\left(x_0 - \frac{\pi}{\sqrt{1 - k^2}}\right) = \lambda - (M - \lambda) e^{\frac{k\pi}{\sqrt{1 - k^2}}} < -M$$

non appena si supponga

$$[16] \quad M > \lambda \left(1 + \frac{2}{e^{\frac{k\pi}{\sqrt{1 - k^2}}} - 1}\right).$$

La $\eta(x)$ si annulla in uno ed un solo punto ξ dell'intervallo considerato ed è agevole riconoscere che se si suppone ulteriormente che sia

$$[17] \quad M > \lambda \left[1 + \frac{1}{2k} e^{-\frac{k}{\sqrt{1 - k^2}} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}\right],$$

tale punto ξ cade certamente entro l'intervallo $\left(x_0 - \frac{\frac{\pi}{2} + \alpha}{\sqrt{1-k^2}}, x_0 - \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{\sqrt{1-k^2}}\right)$

e quindi risulta $\sqrt{1-k^2}(\xi - x_0) < -\sqrt{1-k^2}$. Dalla [14] si deduce che sarà allora

$$\eta'(\xi) > M - \lambda.$$

D'altra parte le limitazioni [16], [17] imposte ad M si possono riassumere dicendo che M soddisfa ad una disuguaglianza del tipo

$$[18] \quad M > \lambda(1 + \gamma)$$

con $\gamma > 0$ dipendente soltanto da k ; sarà dunque

$$[19] \quad \eta'(\xi) > M \left(1 - \frac{\lambda}{M}\right) > M \left(1 - \frac{1}{1 + \gamma}\right) = cM$$

con $0 < c < 1$ dipendente soltanto da k .

Ciò posto, consideriamo nel solito intervallo la funzione $|\eta(x)| + \eta'(x)$; è facile riconoscere che tale funzione assume il suo minimo valore o nel punto ξ oppure nel punto x_0 . Detto quindi L il suo minimo o $L = \eta'(\xi)$ oppure $L = M$; per la [19] si ha in ogni caso

$$[20] \quad L > cM.$$

4. Veniamo ora al criterio di stabilità preannunciato, riprendendo la [4]. Abbandoniamo per un momento l'ipotesi che la $\varphi(y')$ sia crescente e supponiamo soltanto che la $f(x)$ sia *limitata*. Vale allora il seguente:

LEMMA. — *Se la funzione $f(x)$ è limitata, e se si possono trovare due numeri positivi A, k tali che si abbia*

$$[21] \quad \varphi(y') > 2ky' \quad \text{per } y' > A, \quad \varphi(y') < 2ky' \quad \text{per } y' < -A,$$

allora tutti gli integrali della [1] sono stabili per $x \rightarrow \infty$ (1).

Dim. — L'ipotesi [21] assicura che per $y' \geq 0$ ($y' \leq 0$) la $\varphi(y')$ è limitata inferiormente (superiormente). È allora subito visto che per $x \rightarrow \infty$ un qualsiasi integrale $y(x)$ della [4] non può tendere ad ∞ crescendo definitivamente, perchè in tal caso risulterebbe definitivamente $y' \geq 0$ e quindi $\varphi(y')$ definitivamente limitata inferiormente; dalla [4] si ricaverebbe allora (ricordando che $f(x)$ è limitata) $y'' \rightarrow -\infty$ e di con-

(1) Anche colle attuali ipotesi sulla $\varphi(y')$, il già citato teorema di L. AMERIO assicura la prolungabilità degli integrali in tutto $(a, +\infty)$.

seguenza l'assurdo $y' \rightarrow -\infty$. Analogamente si vede che $y(x)$ non può tendere a $-\infty$ decrescendo definitivamente. Per limitare $y(x)$ basta dunque limitare i suoi massimi positivi ed i suoi minimi negativi.

Supponiamo che $y(x)$ sia massima nel punto x_0 col valore positivo M ; supporremo anzi M maggiore di un certo numero positivo che sarà precisato nel corso della dimostrazione. Per il momento, osservato che, in virtù delle ipotesi fatte, esiste certamente un numero positivo λ tale da aversi

$$[22] \quad \begin{aligned} f(x) - [\varphi(y') - 2ky'] &< \lambda & \text{per } y' \geq 0, \\ f(x) - [\varphi(y') - 2ky'] &> -\lambda & \text{per } y' \leq 0, \end{aligned}$$

ci basterà supporre

$$[23] \quad M > \lambda.$$

Dalla [4] segue $y''(x_0) = f(x) - \varphi(0) - M$ e quindi, in virtù di [22], [23], è $y''(x_0) < 0$; se ne deduce che, in un intorno a sinistra del punto x_0 , la y' si può riguardare come una funzione positiva della y . Posto nel predetto intorno $y' = p(y) > 0$, la [4] assume l'aspetto

$$p \frac{dp}{dy} = -\varphi(p) - y + f(x)$$

e di qui, ricordando la prima delle [22], si trae la disuguaglianza

$$p \frac{dp}{dy} < -2kp - y + \lambda.$$

Ponendo ancora $p^2 = u$, $y = -z$, possiamo anche scrivere

$$[24] \quad \frac{du}{dz} > 4k\sqrt{u} - 2z - 2\lambda.$$

Ciò posto, prendiamo in considerazione l'equazione differenziale [10] ed il relativo integrale $\eta(x)$ di cui si è discusso al n. 3, intendendo che nelle [10], [11] i numeri k, λ, M coincidano con quelli ora considerati (possiamo evidentemente nelle [21] supporre $k < 1$). Per poter però applicare le conclusioni del n. 3, supporremo ora in più che il massimo M dell'integrale $y(x)$ soddisfi alla [18], con che resta assorbita la [23].

Per quanto si è detto al n. 3, nell'intorno $x_0 - \frac{\pi}{\sqrt{1-k^2}} < x < x_0$, possiamo operare sulla [10] le sostituzioni analoghe a quelle fatte sulla [4], e cioè $\eta' = q(\eta) > 0$, $q^2 = v$, $\eta = -z$, ottenendo così

$$[25] \quad \frac{dv}{dz} = 4k\sqrt{v} - 2z - 2\lambda.$$

Siccome per $z = -M$ si ha $u = v = 0$, il confronto fra la [24] e la [25] mostra immediatamente che per $z > -M$ (e fin tanto che u, v si mantengono positive) si ha sempre $u(z) > v(z)$ e quindi, ricordando le posizioni fatte,

$$[26] \quad p(z) > q(z).$$

Possiamo ora fare il confronto fra l'integrale $y(x)$ della [4] e l'integrale $\eta(x)$ della [10], considerandoli entrambi per valori di x decrescenti a partire da x_0 . Essi decrescono a partire dal valore M e, se chiamiamo corrispondenti un punto della curva $y = y(x)$ ed un punto della curva $y = \eta(x)$ quando hanno la stessa ordinata, la [26] dice che in punti corrispondenti si ha sempre $y' > \eta'$. Ne segue che anche l'integrale $y(x)$ raggiunge il valore [15] (minimo di η) e lo raggiunge con un valore positivo di y' , di modo che $y(x)$ va anche al disotto di tale valore.

Possiamo quindi affermare che se x'_0 è per $y(x)$ il primo punto di minimo a sinistra di x_0 (supposto esistente), sarà certamente (in virtù di [15]):

$$[27] \quad y(x'_0) < -M.$$

Inoltre, detto x'_0 ($x'_0 < x'_0 < x_0$) il punto in cui $y(x)$ raggiunge il valore [15], abbiamo visto che fra i punti della curva $y = y(x)$ nell'intervallo (x'_0, x_0) ed i punti della $y = \eta(x)$ nell'intervallo $\left(x_0 - \frac{\pi}{\sqrt{1-k^2}}, x_0\right)$ si può stabilire una corrispondenza tale che in punti corrispondenti si abbia $y = \eta$, $y' > \eta'$; dunque nell'intervallo (x'_0, x_0) la funzione $|y(x)| + y'(x)$ rimane al disopra del minimo L della funzione $|\eta(x)| + \eta'(x)$. Ricordando la [20], possiamo dire che in (x'_0, x_0) è

$$[28] \quad |y(x)| + y'(x) > cM, \quad (0 < c < 1),$$

ma questa disuguaglianza vale anche in tutto l'intervallo più ampio (x'_0, x_0) , perchè nell'intervallo (x'_0, x'_0) la $y(x)$ va al disotto del valore [15] e quindi è ivi $|y(x)| > M$ oltre che $y'(x) > 0$.

Alla precedente proposizione, possiamo aggiungere quest'altra: in tutto l'intervallo (x'_0, x_0) sussiste la [28] ⁽¹⁾.

Uno studio perfettamente analogo si può fare su un punto di minimo x_1 ove $y(x)$ assuma il valore negativo $-N$. In un intorno a sinistra di x_1 , ponendo, analogamente a quanto abbiamo fatto dianzi $y' = -p$,

(1) Giova ricordare che questa proposizione e la precedente sussistono nell'ipotesi che M sia abbastanza grande, e precisamente che soddisfi alla [18].

$u = p^2$ e sfruttando la seconda delle [22], deduciamo dalla [4] la disuguaglianza

$$\frac{du}{dy} > 4k\sqrt{u} - 2y - 2\lambda.$$

Ripetendo allora il ragionamento precedente e confrontando $y(x)$ coll'integrale $\eta(x)$ della [10] individuato dalle condizioni $\eta(x_1) = -N$, $\eta'(x_1) = 0$, giungiamo stavolta al risultato che, *a patto di supporre N abbastanza grande, detto x_1 il primo punto di massimo per $y(x)$ precedente x_1 , si ha*

$$y(x_1) > N$$

e in tutto l'intervallo (x'_1, x_1)

$$|y(x) - y'(x)| > cN, \quad (0 < c < 1),$$

(ove la costante c può supporre la stessa del caso precedente).

Vediamo le conseguenze dell'analisi ora fatta. Consideriamo per $x \geq a$ un qualsiasi integrale $y(x)$ della [4] e sia $\xi > a$ un suo punto di massimo positivo o di minimo negativo. Se $|y(\xi)|$ è non minore di una certa costante K dipendente solo dall'equazione data, detti ξ', ξ'', \dots gli eventuali punti estremanti che ordinatamente si incontrano procedendo a ritroso dal punto ξ , sarà certamente

$$[29] \quad |y(\xi')| > |y(\xi)|, \quad |y(\xi'')| > |y(\xi')|, \dots$$

Inoltre sarà

$$\begin{aligned} |y(x)| + |y'(x)| &> c|y(\xi)| && \text{in } (\xi', \xi) \\ |y(x)| + |y'(x)| &> c|y(\xi')| && \text{in } (\xi'', \xi') \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

vale a dire per le [29]

$$|y(x)| + |y'(x)| > c|y(\xi)| \quad \text{in tutto } (a, \xi).$$

Dunque o si ha

$$|y(\xi)| < K$$

oppure

$$|y(\xi)| < \frac{1}{c} \{ |y(a)| + |y'(a)| \}$$

e questo dimostra che la $y(x)$ è limitata.

Passiamo a considerare la $y'(x)$. Posto $y'(x) = u(x)$, dalla [4] discende che la $u(x)$ verifica un'equazione del tipo

$$[30] \quad u' = -\varphi(u) + g(x)$$

con $g(x) = f(x) - y(x)$ limitata. In base a ciò ed alle ipotesi fatte sulla funzione φ , esiste un numero positivo U tale che per $u > U$ il secondo membro della [30] è negativo, mentre è positivo per $u < -U$. Se ne deduce immediatamente che $|u(x)|$ o è limitato da U oppure è limitato dal suo valore iniziale $|y'(a)|$. Le due funzioni $y(x)$ ed $y'(x)$ risultano dunque limitate per $x \rightarrow \infty$ ed il nostro Lemma è dimostrato.

Da tale Lemma e dal Teorema I discende subito quest'altro teorema:

TEOREMA II. — *Nell'ipotesi che $f(x)$ sia periodica e che $\varphi(y')$ sia crescente di ordine non inferiore ad 1, che sia cioè*

$$\lim'_{|y'| \rightarrow \infty} \frac{\varphi(y')}{y'} > 0,$$

l'equazione [4] ammette un unico integrale periodico cui sono asintotici per $x \rightarrow \infty$ tutti gli altri integrali.

Si è già detto che il teorema è in difetto se φ si suppone soltanto crescente (vedi l'esempio dato alla fine del n. 2 ove φ si supponeva limitata); rimane dubbio il caso di un *ordine di crescita minore di uno*, che però non sembra presentare interesse pratico.

5. Passiamo ora a considerare il caso particolare dell'equazione differenziale [1].

Si ha ora $\varphi(y') = y'|y'|$; questa funzione φ ha la derivata prima continua e, per $|y'| \rightarrow \infty$, il rapporto $\frac{\varphi(y')}{y'}$ tende ad ∞ . Possiamo applicare il Teorema II e concludere che la [1] ha uno ed un solo integrale periodico $\eta(x)$ di periodo 2π , al quale tutti gli altri integrali sono asintotici per $x \rightarrow \infty$.

L'integrale periodico $\eta(x)$ gode inoltre della proprietà

$$[31] \quad \eta(x + \pi) = -\eta(x),$$

come risulta subito dall'osservare che $\eta(x + \pi)$, verificando l'equazione $y'' + y + y'|y'| = -\varepsilon \sin x$, deve coincidere con l'integrale periodico $-\eta(x)$ di questa.

Per l'equazione [1] le considerazioni svolte al n. 4 si possono anche presentare sotto forma più semplice. Così, se $x_0 > 0$ è un punto di massimo per l'integrale $y(x)$ considerato per $x \geq 0$ ed è $y(x_0) = M > 0$, supposto $M > |\varepsilon|$, possiamo in un intorno a sinistra del punto x_0 porre $y' = p(y) > 0$ e trasformare la [1] nella

$$[32] \quad p \frac{dp}{dy} + p^2 + y = \varepsilon \sin x,$$

da cui (riguardando x come funzione di y):

$$p^2 = 2 e^{-2y} \int_y^M (y - \varepsilon \sin x) e^{2y} dy > 2 e^{-2y} \int_y^M (y - |\varepsilon|) e^{2y} dy$$

vale a dire

$$[33] \quad p^2 > \left(M - \frac{1}{2} - |\varepsilon| \right) e^{2(M-y)} - \left(y - \frac{1}{2} - |\varepsilon| \right).$$

Supposto $M \geq \frac{1}{2} + |\varepsilon|$, il secondo membro di [33] sarà sempre positivo per $y < M$, sicchè, prolungando y a ritroso partendo da x_0 , si troverà y' sempre positiva, e le [32], [33] saranno valide, non solo in prossimità di x_0 , ma in tutto l'intervallo $(0, x_0)$. Si avrà allora, poichè per $y < M$ la [33] fornisce $p^2 + y > M$:

$$M < y(0) + y'^2(0).$$

Analogamente per un punto di minimo negativo (con $-y(0)$ in luogo di $y(0)$), e quindi si conclude che, per ogni integrale $y(x)$ della [1], considerato per $x \geq 0$, si ha

$$[34] \quad |y(x)| < \mu$$

ove μ è il maggiore dei tre numeri $\frac{1}{2} + |\varepsilon|$, $y'^2(0) + y(0) \cdot \operatorname{sgn} y'(0)$, $|y(0)|$.

Posto poi $y'(x) = u(x)$ si ha $u' = -u|u| + g(x)$ con $g(x) = \varepsilon \sin x - y(x)$, $|g(x)| < \varepsilon + \mu$. Se per un particolare valore x_0 è $|u| > \sqrt{\varepsilon + \mu}$, $|u|$ risulterà decrescente a sinistra di x_0 , sicchè $|u|$ è limitato o da $\sqrt{\varepsilon + \mu}$ o dal suo valore iniziale $|y'(0)|$.

(1) Nel caso, presentatosi all'Istituto, colle condizioni iniziali [2] e con $0 < \varepsilon < 1$, le [34], [35] danno

$$|y(x)| < \frac{1}{2} + \varepsilon, \quad |y'(x)| < \sqrt{\frac{1}{2} + 2\varepsilon},$$

e quindi, considerando ad esempio il caso $\varepsilon = 0,2$,

$$|y(x)| < 0,7, \quad |y'(x)| < 0,949.$$

Effettivamente si è trovato

$$\max |y(x)| = 0,487, \quad \max |y'(x)| = 0,483.$$

In questo caso le [34], [35] non danno delle limitazioni molto ristrette, ma non va dimenticato che esse si riferiscono ad ogni integrale della [1].

Per ogni integrale $y(x)$ della [1] considerato per $x \geq 0$, si ha

$$[35] \quad |y'(x)| < \nu$$

ove ν è il maggiore dei due numeri $\sqrt{\varepsilon + \mu}$, $|y'(0)|^{(1)}$.

La limitazione [34] dianzi trovata per un qualunque integrale della [1] non è soddisfacente per grandi valori di x , in quanto $y(x)$ è asintotico all'integrale periodico $\eta(x)$ e quest'ultimo, che è lo zero nel caso $\varepsilon = 0$, deve presumibilmente avere ampiezza dell'oscillazione infinitesima con ε .

Passiamo dunque a ricercare un limite superiore per $\max |\eta(x)|$ in funzione di ε .

6. Per la proprietà [31] l'integrale $\eta(x)$ ammette degli zeri; sia α uno di questi. Posto $\beta = \alpha + \pi$, per la stessa proprietà sarà pure $\eta(\beta) = 0$. Nell'intervallo (α, β) la funzione $|\eta(x)|$ raggiunge il suo massimo valore M e, detta V la variazione totale di $\eta(x)$ in (α, β) , sarà evidentemente

$$2M \leq V = \int_{\alpha}^{\beta} |\eta'(x)| dx.$$

Per la disuguaglianza di HÖLDER si ha

$$\int_{\alpha}^{\beta} |\eta'(x)| dx < \left(\int_{\alpha}^{\beta} |\eta'(x)|^3 dx \right)^{\frac{1}{3}} \left(\int_{\alpha}^{\beta} dx \right)^{\frac{2}{3}} = \pi^{\frac{2}{3}} \left(\int_{\alpha}^{\beta} |\eta'(x)|^3 dx \right)^{\frac{1}{3}}$$

e perciò

$$[36] \quad M < \frac{\pi^{\frac{2}{3}}}{2} \left(\int_{\alpha}^{\beta} |\eta'(x)|^3 dx \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Ciò premesso, teniamo conto che $\eta(x)$ soddisfa alla [1]. Moltiplichiamo ambo i membri per η' e integriamo fra α, β ; risulta immediatamente tenendo conto che $\eta(\alpha) = \eta(\beta) = 0$ e che dalla [31] segue $\eta'(\beta) = -\eta'(\alpha)$:

$$\int_{\alpha}^{\beta} |\eta'(x)|^3 dx = \varepsilon \int_{\alpha}^{\beta} \eta'(x) \operatorname{sen} x dx,$$

od anche, dato che il primo membro è positivo:

$$\int_{\alpha}^{\beta} |\eta'(x)|^3 dx = |\varepsilon| \left| \int_{\alpha}^{\beta} \eta'(x) \operatorname{sen} x dx \right|.$$

Applicando all'ultimo integrale la disuguaglianza di SCHWARZ, si ottiene

$$\int_{\alpha}^{\beta} |\eta'(x)|^3 dx < |\varepsilon| \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\alpha}^{\beta} |\eta'(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

ed applicando al secondo membro la disuguaglianza di HÖLDER

$$\int_{\alpha}^{\beta} |\eta'(x)|^3 dx < |\varepsilon| \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \pi^{\frac{1}{6}} \left(\int_{\alpha}^{\beta} |\eta'(x)|^3 dx\right)^{\frac{1}{3}} = |\varepsilon| \frac{\pi^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{1}{2}}} \left(\int_{\alpha}^{\beta} |\eta'(x)|^3 dx\right)^{\frac{1}{3}}$$

da cui

$$\int_{\alpha}^{\beta} |\eta'(x)|^3 dx < |\varepsilon|^{\frac{3}{2}} \frac{\pi}{2^{\frac{3}{4}}}.$$

Sostituendo nella [36] troviamo

$$M < |\varepsilon|^{\frac{1}{2}} \frac{\pi}{2^{\frac{1}{4}}}$$

ed infine, osservato che $\frac{\pi}{2^{\frac{1}{4}}} < \frac{4}{3}$:

$$[37] \quad \max |\eta(x)| < \frac{4}{3} \sqrt{|\varepsilon|}.$$

La [37] dà la cercata limitazione per l'integrale periodico della [1].

Questa formola è in accordo colla formola approssimata [3] che si era trovata per $\eta(x)$ in corrispondenza a piccoli valori di ε (1).

(1) L'integrale $y(x)$ soddisfacente alle [2] e corrispondente ad $\varepsilon = 0, 2$, di cui si è già parlato, coincide praticamente coll'integrale periodico $\eta(x)$ a partire da $x = 19$ circa. Il calcolo ha fornito $\max |\eta(x)| = 0,487$, mentre la [37] dà $\max |\eta(x)| < 0,596$, e la [3] $\eta(x) \cong -0,476 \cos x$. Si constata pertanto un accordo assai soddisfacente.

Matematica (Geometria). — *Linee geografiche su un ellissoide a tre assi.* Nota di VINCENZO GIAMBUSSO, presentata (1) da CORRADINO MINEO, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

L'estensione a superficie regolari qualunque (non sviluppabili) della nozione di coordinate geografiche, oltre che importante in se stessa dal punto di vista geometrico, si rende necessaria nella Geodesia teorica, segnatamente oggi che si tende a riferire il *Geoide* a un ellissoide a tre assi anzichè al solito ellissoide rotondo (di BESSEL, di CLARKE o di altri).

Lo studio di alcune linee geografiche dell'ellissoide generale (linee est, linee nord, traiettorie ortogonali delle linee d'eguale longitudine, ecc.), è stato fatto dallo SCHMEHL (2) in vista delle applicazioni geodetiche e servendosi di coordinate geografiche (generalizzate). Ora, se le coordinate geografiche si presentano come necessarie in Geodesia (perchè determinabili sperimentalmente), non semplificano d'altra parte né avvantaggiano lo studio geometrico delle linee anzidette. In questa Nota lo studio è fatto in coordinate cartesiane; le quali permettono di meglio caratterizzare le linee in discorso e di arrivare più speditamente e più lontano che non faccia l'uso costante delle coordinate geografiche.

1. Premettiamo qualche rapido cenno sulle coordinate geografiche sopra una superficie S regolare qualunque (non sviluppabile). Diamo ad arbitrio una retta orientata, che chiameremo *asse polare*. Diremo *latitudine* di un punto P di S il complemento φ dell'angolo che la normale a S in P , convenientemente orientata (supposto, s'intende, che essa vari con continuità nella regione considerata di S in modo che in punti differenti abbia direzioni differenti), forma con l'asse polare; chiameremo *longitudine* di P l'angolo diedro ω che un semipiano α passante per l'asse polare forma col *meridiano* di P , cioè con il piano della normale e della parallela per P all'asse polare. Rispetto allo stesso asse polare, chiameremo

(1) Nell'Adunanza del 16 gennaio 1942-XX.

(2) Vedi SCHMEHL, *Untersuchungen über ein allgemeines Erdellipsoid*, « Veröffentlichung des Preussischen Geodätischen Institutes ». Neue Folge, N. 98, Potsdam, 1927.

retta cardinale nord-sud in P l'intersezione del piano meridiano con il piano tangente a S in P ; e retta cardinale est-ovest la perpendicolare per P , sul detto piano tangente, alla retta cardinale nord-sud. Chiameremo linee nord e linee est le linee di S lungo le quali le tangenti coincidono rispettivamente con le rette cardinali nord-sud e con le rette cardinali est-ovest.

Questa estensione delle coordinate geografiche a superficie qualunque, si deve, come afferma anche il DARBOUX (*Leçons sur la théorie générale des surfaces*, Paris, 1887, pag. 311) al MINDING ⁽¹⁾. Questi chiama paralleli, per estensione, le linee d'eguale latitudine; meridiani di prima specie le linee d'eguale longitudine, meridiani di seconda specie le traiettorie ortogonali dei paralleli e meridiani di terza specie quelle che noi abbiamo chiamato linee nord. Il risultato più importante dell'analisi del MINDING è che le uniche superficie che ammettono un doppio sistema geografico (di linee φ e ω), ortogonale, sono le superficie modanate a sviluppabile direttrice cilindrica del MONGE e le superficie minime. A titolo d'esempio, il MINDING determina i meridiani di terza specie (linee nord) d'un ellissoide a tre assi, rispetto a uno dei suoi assi di simmetria preso come asse polare.

In uno studio sintetico, il PIZZETTI ⁽²⁾ stabilisce alcune proprietà dei sistemi geografici, particolarmente quella involutoria delle tangenti alle linee φ , ω , nord ed est e quella relativa alle condizioni perchè le linee ω siano geodetiche della superficie. Alle coordinate geografiche sopra uno sferoide accenna lo SCHIAPARELLI nei suoi aurei *Elementi di Astronomia sferica* (« Litografia dell'Istituto Geografico Militare », 1896, pag. 7), e anche il POINCARÉ in un importante articolo (*Sur les déviations de la verticale en Géodésie*, « Bulletin astronomique », t. XVIII, 1901). Il VITERBI ⁽³⁾ ritrova analiticamente i teoremi del PIZZETTI e determina anche le condizioni perchè i meridiani e i paralleli siano linee asintotiche della superficie. In un ampio studio analitico sui sistemi geografici, il MINEO ⁽⁴⁾ stabilisce, oltre quelli del PIZZETTI e del VITERBI, altri importanti teoremi (sulle condizioni affinchè le linee φ e ω siano di curvatura

⁽¹⁾ Vedi MINDING, *Ueber einige Grundformeln der Geodäsie*. « Journal für die reine und angewandte Mathematik », vol. XLIV, 1852, pagg. 66-72.

⁽²⁾ Vedi PIZZETTI, *Contribuzione allo studio della superficie terrestre*: « Giornale della Società di Letture e conversazioni scientifiche di Genova », vol. XVII, 1887.

⁽³⁾ Vedi VITERBI, *Sulla determinazione degli elementi intrinseci fondamentali della superficie terrestre mediante misure locali*. « Rend. Circolo Matematico di Palermo », to. XXV, 1908.

⁽⁴⁾ Vedi MINEO, *Sulle superficie riferite a un sistema geografico e sulla determinazione intrinseca del Geode*. « Giornale di Matematiche di Battaglini », volume XLVIII, 1910.

o geodetiche o coincidano con il doppio sistema delle assintotiche, ecc.). Risultati che egli ritrova elegantemente e sinteticamente, insieme con il teorema citato del MINDING, in un successivo articolo ⁽¹⁾. Recentemente il MINEO determina la totalità delle superficie sulle quali le linee d'eguale longitudine, rispetto a una certa direzione, costituiscono una famiglia di geodetiche ⁽²⁾.

Anche lo SCHMEHL, nella Memoria citata, si occupa dei sistemi geografici in generale, ma senza apportare alcun contributo né citare gli autori italiani. E appresso ci tornò il JENNE, anch'egli senza dir nulla del contributo italiano e senza recar nulla di nuovo ⁽³⁾.

2. Premesso ciò, veniamo all'ellissoide a tre assi di equazione

$$[1] \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

nel quale supponiamo, per fissare le idee,

$$a > b > c;$$

e assumiamo come asse polare l'asse z , come semipiano α il semipiano zx e come verso positivo della normale quello che va dall'interno all'esterno della superficie.

In un punto $P(x, y, z)$ di [1] si ha

$$[2] \quad \tan^2 \varphi = \frac{\frac{z^2}{c^4}}{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}, \quad \cos^2 \omega = \frac{\frac{x^2}{a^4}}{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}},$$

essendo

$$[3] \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \omega < 2\pi.$$

Da queste si deduce subito che le linee di eguale longitudine sono le ellissi sezioni di [1] con il fascio di piani di asse z :

$$[4] \quad y = x \frac{b^2}{a^2} \tan \omega.$$

⁽¹⁾ Vedi MINEO, *Sistemi geografici sulle superficie*. « Periodico di Matematica », anno XXVI, 1910.

⁽²⁾ Vedi MINEO, *Superficie dotate di ∞^1 geodetiche che sono eliche su cilindri ortogonali a una direzione fissa*. « Atti della R. Accademia d'Italia », vol. III, 1941.

⁽³⁾ Vedi W. JENNE, *Breitengleichen und Langengleichen als Parameterlinien allgemeiner Flächen*. « Astr. Nachr », Band 251, febbraio 1934.

E le linee d'egual latitudine sono le intersezioni di [1] con la famiglia di coni quadrici

$$[5] \quad k^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} \right) - \frac{z^2}{c^4} = 0,$$

dove è

$$[6] \quad k = \tan \varphi.$$

Le linee φ sono dunque quartiche gobbe di 1^a specie, ciascuna costituita di due rami distinti chiusi simmetrici rispetto al piano $z = 0$. Tali quartiche sono manifestamente simmetriche anche rispetto agli altri due piani coordinati. Esse non hanno punti doppi, perchè i coni quadrici [5] non sono tangenti all'ellissoide. Il numero dei loro punti doppi apparenti è 2. Applicando le formule di PLÜCKER, si possono determinare le altre caratteristiche delle dette quartiche, le quali sono determinate da 8 punti. Si trova, con il noto significato dei simboli (¹):

$$\begin{aligned} m = 4 \quad , \quad n = 12 \quad , \quad r = 8 \quad , \quad \alpha = 16 \quad , \quad \beta = 0, \\ x = 16 \quad , \quad y = 8 \quad , \quad g = 38 \quad , \quad h = 2. \end{aligned}$$

3. Dalla proprietà stessa che caratterizza le linee est, cioè che la tangente dev'essere in ogni punto perpendicolare al piano meridiano (n. 1), quindi, nel nostro caso, ortogonale all'asse z , si deduce che le linee est di una qualunque superficie sono le sezioni di questa con piani perpendicolari all'asse polare. Nel nostro caso, le linee est sono dunque ellissi, determinate intersecando l'ellissoide con i piani $z = \text{costante}$.

Possiamo poi determinare le linee nord (meridiani di 3^a specie, secondo la denominazione di MINDING) come traiettorie ortogonali delle linee est. Consideriamole determinate dall'intersezione dell'ellissoide [1] con una famiglia di cilindri

$$[7] \quad y = y(x).$$

Le componenti di direzione della tangente a una curva determinata da [1] e [7], sono

$$-\frac{z}{c^2} \quad , \quad -\frac{z}{c^2} \frac{dy}{dx} \quad , \quad \frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} \frac{dy}{dx} \quad ,$$

mentre le componenti di direzione della retta est-ovest sono

$$\frac{y}{b^2} \quad , \quad -\frac{x}{a^2} \quad , \quad 0.$$

(¹) Vedi SALMON, *Traité de Géométrie analytique à trois dimensions*. Paris, 1882, pag. 105 (2^a parte).

Ne segue subito che la funzione [7] deve verificare l'equazione differenziale

$$\frac{x}{a^2} \frac{dy}{dx} - \frac{y}{b^2} = 0,$$

donde

$$[8] \quad (y^2)^{b^2} = v^2 (x^2)^{a^2},$$

essendo v una costante arbitraria. In particolare, per i valori 0 e ∞ della costante v , abbiamo le due soluzioni (evidenti *a priori*)

$$y = 0 \quad , \quad x = 0 ;$$

che danno le due ellissi principali di [1], situate nei due piani coordinati corrispondenti. In generale le [8] rappresentano una famiglia di cilindri trascendenti (o più precisamente interscendenti secondo la denominazione di LEIBNITZ). Ogni cilindro tocca il piano zx secondo l'asse z e rivolge la sua convessità all'anzidetto piano (¹). Le linee nord, o meridiani di 3^a specie, sono in generale linee gobbe, simmetriche rispetto ai piani coordinati e tangenti all'ellisse principale del piano $y = 0$, nei due punti $(0, 0, \pm c)$.

4. Determiniamo ora le traiettorie ortogonali delle linee $\omega = \text{costante}$ (o meridiani di 1^a specie). Se chiamiamo *paralleli di 1^a specie* le linee d'eguale latitudine, potremo chiamare *paralleli di 2^a specie* le traiettorie predette (e *paralleli di 3^a specie* si possono dire le linee est). Considerando le curve cercate come intersezioni dell'ellissoide [1] con una famiglia di cilindri

$$[9] \quad z = z(y),$$

si trova che la funzione $z(y)$, deve verificare l'equazione differenziale

$$[10] \quad \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{hxy}{a^2b^2} + \frac{z^2}{c^4} \right) \frac{dz}{dy} - \frac{z}{c^2} \left(\frac{hx}{a^2} - \frac{y}{b^2} \right) = 0,$$

dove è, tenendo presente la [4]:

$$[11] \quad h = \frac{b^2}{a^2} \tan \omega = \frac{y}{x}.$$

(¹) Infatti si ha

$$yy'' = \frac{a^2}{b^2} \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) \frac{y^2}{x^2},$$

ed è, per ipotesi, $a > b$.

Per mezzo di [1] e [11], la [10] diviene, supposto $z \neq 0$:

$$[12] \quad \left(\frac{c^2}{z} - \frac{c^2 - a^2}{c^2} z \right) dz = \frac{b^2 - a^2}{b^2} y dy,$$

il cui integrale generale è

$$[13] \quad c^2 \log \lambda^2 z^2 = \frac{b^2 - a^2}{b^2} y^2 + \frac{c^2 - a^2}{c^2} z^2,$$

essendo λ una costante arbitraria. La [13] rappresenta una famiglia di cilindri trascendenti, simmetrici rispetto ai piani coordinati, formati, ciascuno, da due distinte falde, simmetriche rispetto al piano xy . Ogni parallelo di 2^a specie è quindi formato da due rami chiusi (senza punti comuni).

5. Ma possiamo anche determinare i meridiani di 2^a specie (il che non è stato fatto), cioè le traiettorie ortogonali delle linee φ , quali intersezioni dell'ellissoide con una famiglia di cilindri $y = y(x)$. Procedendo col metodo più volte usato, perveniamo all'equazione differenziale

$$[14] \quad \frac{yz^2}{b^2 c^4} \left(\frac{1}{c^2} + \frac{k^2}{b^2} \right) + \frac{k^2 x^2 y}{a^4 b^4} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) - \\ - \left[\frac{xz^2}{a^2 c^4} \left(\frac{1}{c^2} + \frac{k^2}{a^2} \right) - \frac{k^2 xy^2}{a^2 b^4} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) \right] \frac{dy}{dx} = 0.$$

Questa, opportunamente trasformata con l'eliminare la costante k e la z , per mezzo di [1] e [5], sotto l'ipotesi che sia $xy \neq 0$, diviene

$$[15] \quad \left[\frac{(a^2 - c^2)(b^2 - a^2)}{a^2} x + \frac{a^4}{x} \right] dx = \left[\frac{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}{b^2} y + \frac{b^4}{y} \right] dy,$$

il cui integrale generale è

$$[16] \quad \log \mu^2 \frac{(x^2)^{\mu^2}}{(y^2)^{\mu^2}} = (a^2 - b^2) \left[\frac{a^2 - c^2}{a^2} x^2 + \frac{b^2 - c^2}{b^2} y^2 \right],$$

essendo μ una costante arbitraria.

La [16] rappresenta anch'essa una famiglia di cilindri trascendenti simmetrici rispetto ai piani coordinati. I meridiani di 2^a specie sono quindi curve costituite da quattro rami (gobbi) che tendono a riunirsi nei poli $(0, 0, \pm c)$ dell'ellissoide.

Geodesia. — Sulla ellitticità dell'equatore terrestre. Nota ⁽¹⁾
dell'Accademico CARLO SOMIGLIANA.

Il prof. W. HEISKANEN, illustre Direttore dell'Istituto isostatico dell'Associazione internazionale di Geodesia ad Helsinki, in una interessante Memoria dal titolo: *Investigations on the gravity Formula* ⁽²⁾ ha determinato, con laboriosi calcoli, i coefficienti numerici della formola della gravità normale sul geoide ellissoidico a tre assi, servendosi delle misure di gravità fatte su tutta la superficie terrestre, raggruppandoli in vari modi e compensandone i valori col metodo dei minimi quadrati.

Dai valori di questi coefficienti ha poi dedotto il valore dello schiacciamento dell'ellisse equatoriale con un procedimento che già aveva applicato in una precedente Memoria: *Ist die Erde ein dreiaxiges Ellipsoid?* ⁽³⁾. Questo procedimento si fonda sopra una formola, sostanzialmente intuitiva, che rappresenta una estensione della classica relazione di Clairaut ai meridiani dell'ellissoide a tre assi, e che può servire a determinare lo schiacciamento di tali ellissi meridiane. Dai valori di questo schiacciamento ha dedotto la differenza dei semiassi dell'ellisse equatoriale, che è risultata di circa trecento metri.

In questa Nota io mi propongo di utilizzare i risultati numerici del prof. HEISKANEN, per le formole della gravità normale, seguendo un procedimento del tutto differente, fondato sulle formole della teoria rigorosa del campo gravitazionale, ellissoidico, da me studiata in varie occasioni. Queste formole permettono di calcolare direttamente la grandezza degli assi dell'ellissoide sul quale i valori della gravità sono quelli della formola accettata per la gravità normale. Se ne possono quindi immediatamente dedurre gli schiacciamenti delle sezioni principali e le differenze dei semiassi. Per una semplificazione dei calcoli ammetto conosciuta la densità media del geoide, quale può essere determinata cogli elementi dell'ellissoide geoidico di rotazione.

I valori numerici che si ottengono in tal modo concordano notevolmente con quelli trovati dal prof. HEISKANEN e li completano. Ma il nuovo

⁽¹⁾ Presentata nell'Adunanza del 16 gennaio 1942-XX.

⁽²⁾ « *Annales Academiae scientiarum fennicae* ». Ser. A; tom. LI, Helsinki, 1938.

⁽³⁾ *Gerlands Beiträge zur Geophysik*. Bel. XIX, 1928.

procedimento, oltre che assai semplice, risulta basato su formole rigorose della teoria del campo gravitazionale. Questa teoria, studiata finora solo in via generale, risulta così suscettibile anche di notevoli ed interessanti applicazioni numeriche.

In fine di questa Nota dimostro come sia *analiticamente* possibile la determinazione dei tre assi del geoide ellissoidico mediante un certo numero di valori della gravità.

I.

Devo richiamare alcune formole della teoria del campo gravitazionale da me stabilite precedentemente ⁽¹⁾. Indicando con a, b, c i semiassi dell'ellissoide, con g_a, g_b, g_c i valori della gravità agli estremi di questi assi, con ω la velocità di rotazione del geoide, intorno all'asse c , si hanno le seguenti relazioni, che sono le analoghe della relazione di CLAIRAUT per l'ellissoide di rotazione:

$$\frac{g_b}{b} - \frac{g_c}{c} = \omega^2 \Phi_a (a^2 : b^2 : c^2)$$

$$\frac{g_c}{c} - \frac{g_a}{a} = \omega^2 \Phi_b (a^2 : b^2 : c^2)$$

$$\frac{g_a}{a} - \frac{g_b}{b} = \omega^2 \Phi_c (a^2 : b^2 : c^2).$$

Inoltre si ha

$$\frac{g_a}{a} + \frac{g_b}{b} + \frac{g_c}{c} = 4\pi\gamma k - 2\omega^2.$$

In queste formole γ è la costante dell'attrazione, k la densità media del geoide, e Φ_a, Φ_b, Φ_c sono funzioni trascendenti dei due rapporti $a^2 : b^2 : c^2$, o di qualsiasi loro funzione.

Queste quattro relazioni formano un sistema lineare risolubile rispetto ai tre rapporti $g_a : a, g_b : b, g_c : c$. Si trova così

$$[1] \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{3g_a}{a} = 4\pi\gamma k - \omega^2 (\Phi_b - \Phi_c + 2) \\ \frac{3g_b}{b} = 4\pi\gamma k - \omega^2 (\Phi_c - \Phi_a + 2) \\ \frac{3g_c}{c} = 4\pi\gamma k - \omega^2 (\Phi_a - \Phi_b + 2). \end{array} \right.$$

(1) C. SOMIGLIANA, *Complementi alla teoria del campo gravitazionale ellissoidico*. « Rend. Ist. Lombardo », vol. LXXII, 1938.

C. SOMIGLIANA, *Funzioni trascendenti del campo gravitazionale ellissoidico*. « Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino », vol. 75, 1939.

Queste formole possono essere utilizzate per determinare i valori della gravità alle estremità degli assi g_a, g_b, g_c quando siano dati gli assi e la densità media del geoide, elementi che, come è noto, determinano completamente il campo gravitazionale. È pure noto che mediante g_a, g_b, g_c si può rappresentare il valore della gravità in qualsiasi punto della superficie o dello spazio. Ma non è di questo problema che intendiamo occuparci.

Osserviamo invece che nelle [1] se noi supponiamo nota la densità media ed i rapporti degli assi, oltre ai valori g_a, g_b, g_c , possiamo considerare come incognite a, b, c e servirci delle formole stesse per determinarle. Noi porremo per semplicità

$$[2] \quad \begin{cases} \Psi_a = \Phi_b - \Phi_c + 2 \\ \Psi_b = \Phi_c - \Phi_a + 2 \\ \Psi_c = \Phi_a - \Phi_b + 2 \end{cases}$$

ed avremo così dalle formole [1]

$$[3] \quad \begin{cases} a = \frac{3 g_a}{4 \pi \gamma k - \omega^2 \Psi_a} \\ b = \frac{3 g_b}{4 \pi \gamma k - \omega^2 \Psi_b} \\ c = \frac{3 g_c}{4 \pi \gamma k - \omega^2 \Psi_c} \end{cases}$$

Abbiamo così i valori dei semiassi espressi in funzione della densità media, e dei rapporti degli assi stessi, o degli schiacciamenti, oppure delle eccentricità.

Noi considereremo la densità media k come determinata mediante gli elementi del geoide di rotazione ellissoidico. Il prof. CASSINIS ha fatto questo calcolo, e mediante il valore della gravità $g = 978,030$ all'equatore di HELMERT, ha trovato ⁽¹⁾

$$k = 5,517$$

valore che noi pure adotteremo.

Le funzioni Ψ sono, come le Φ , esprimibili in serie delle eccentricità

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \quad e^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2}$$

oppure delle eccentricità aggiunte

$$i'^2 = \frac{b^2 - c^2}{c^2}, \quad i^2 = \frac{a^2 - c^2}{c^2}$$

⁽¹⁾ Ved. Verbali delle sedute della R. Commissione Geodetica Italiana. Seduta del 14 giugno 1929, Padova.

I valori numerici dei coefficienti di queste serie sono stati calcolati per i gruppi di termini fino al 3° ordine dall'Istituto per le applicazioni del calcolo (V. la Nota già citata: *Funzioni trascendenti*, ecc.). Mediante queste espressioni, se si tiene conto soltanto dei termini lineari, si trovano per le funzioni Ψ definite dalle formole [2] i seguenti valori:

$$[4] \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi_a = \frac{3}{2} \left(3 + \frac{8}{7} e'^2 + \frac{3}{7} e^2 \right) \\ \Psi_b = \frac{3}{2} \left(3 - \frac{11}{7} e'^2 + \frac{3}{7} e^2 \right) \\ \Psi_c = -\frac{3}{2} \left(2 - \frac{3}{7} e'^2 + \frac{6}{7} e^2 \right) \end{array} \right.$$

che dovrebbero essere sostituiti nelle [3], quando si voglia restare nell'approssimazione indicata. Ma noi cominceremo ad usare le formole [3] trascurando anche i termini contenenti e'^2 , e^2 (che sono ordinariamente dell'ordine di grandezza di 10^{-10} , e 10^{-6}) e scriveremo le formole [3] nella forma

$$[5] \quad \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{3 g_a}{4 \pi \gamma k - \frac{9}{2} \omega^2} \\ b = \frac{3 g_b}{4 \pi \gamma k - \frac{9}{2} \omega^2} \\ c = \frac{3 g_c}{4 \pi \gamma k + 3 \omega^2} \end{array} \right.$$

Notiamo subito che in queste formole i denominatori sono indipendenti dai valori dei semiassi, e perciò esse permettono un calcolo immediato approssimato di a , b , c . Ottenuti questi valori, si potranno calcolare e'^2 ed e^2 , per sostituirli nelle espressioni [4], ed ottenere quindi nuovi valori più approssimati per a , b , c mediante le formole [3]. Tale procedimento si potrà poi ripetere, e continuare così per approssimazioni successive.

Ma noi vedremo che nella pratica le formole [5] danno già valori attendibili per a , b , c ; l'approssimazione che così si ottiene è analoga a quella corrispondente alla formola classica di CLAIRAUT.

Scriveremo le [5] nella forma seguente

$$a = \frac{g_a}{\frac{1}{3} \Delta_1} \quad b = \frac{g_b}{\frac{1}{3} \Delta_1} \quad c = \frac{g_c}{\frac{1}{3} \Delta_2}$$

ponendo

$$\Delta_1 = 4 \pi \gamma k - \frac{9}{2} \omega^2$$

$$\Delta_2 = 4 \pi \gamma k + 3 \omega^2$$

E queste quantità Δ_1, Δ_2 possono essere facilmente calcolate mediante i valori

$$\gamma = 6,67 \times 10^{-8} \quad k = 5,517 \quad \omega = 7,29 \times 10^{-5}.$$

Si trova così

$$4 \pi \gamma k = 462,41847729 \times 10^{-8}$$

$$\frac{9}{2} \omega^2 = 2,39148445 \times 10^{-8}$$

$$3 \omega^2 = 1,594323 \times 10^{-8}$$

Ne segue

$$\frac{1}{3} \Delta_1 = 153,3423072 \times 10^{-8}$$

$$\frac{1}{3} \Delta_2 = 154,6709330 \times 10^{-8}$$

Troviamo così

$$[6] \quad \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{10^8 g_a}{153,3423} = 652136 g_a \\ b = \frac{10^8 g_b}{153,3423} = 652136 g_b \\ c = \frac{10^8 g_c}{154,6709} = 646534 g_c. \end{array} \right.$$

Sono queste le formole mediante le quali noi calcoleremo i semiassi dell'ellissoide, servendoci dei valori della gravità alle estremità degli assi ottenuti dalle formole del prof. HEISKANEN.

La formola per la gravità normale usata dall'illustre geodeta è della forma

$$[7] \quad g = G (1 + \alpha \sin^2 \varphi - \beta \sin^2 2 \varphi + \gamma \cos^2 \varphi \cos 2 (\lambda - \lambda_0))$$

ove φ è la latitudine, λ la longitudine sul meridiano di Greenwich, misurata positivamente verso l'Est, quindi λ_0 la longitudine del piano meridiano passante per l'asse maggiore dell'ellissoide. Le G, α, β, γ sono le costanti della formula. Noi porremo

$$\psi = \lambda - \lambda_0.$$

I valori per la gravità alle estremità degli assi risultanti dalla formola precedente sono

$$[8] \quad g_a = G (1 + \gamma) \quad g_b = G (1 - \gamma) \quad g_c = G (1 + \alpha)$$

e di questi noi ci serviremo partendo dai valori ottenuti dal prof. HEISKANEN, che gioverà riassumere, secondo i vari raggruppamenti da lui fatti dei valori osservati per la gravità.

I. *Tutte le stazioni isostaticamente ridotte.*

Si ha in questo caso

$$G = 978,0524 \quad \alpha = 0,0052970 \quad \gamma = 0,0000276$$

e se ne deduce mediante le [8]

$$g_a = 978,0793 \quad g_b = 978,0254 \quad g_c = 983,2331$$

II. *Stazioni di gravità terrestri.*

Si ha

$$G = 978,0475 \quad \alpha = 0,0053029 \quad \gamma = 0,0000234$$

se ne deduce

$$g_a = 978,0704 \quad g_b = 978,0245 \quad g_c = 983,2339$$

III. *Stazioni di gravità in mare.*

Si ha

$$G = 978,0624 \quad \alpha = 0,0052970 \quad \gamma = 0,0000108$$

se ne deduce

$$g_a = 978,0729 \quad g_b = 978,0518 \quad g_c = 983,2431$$

IV. *Stazioni di gravità alle alte latitudini.*

Si ha

$$G = 978,0532 \quad \alpha = 0,0052884 \quad \gamma = 0,0000232$$

se ne deduce

$$g_a = 978,0753 \quad g_b = 978,0305 \quad g_c = 983,2255$$

V. *Stazioni di gravità vicine all'equatore.*

Si ha

$$G = 978,0526 \quad \alpha = 0,0052884 \quad \gamma = 0,0000308$$

se ne deduce

$$g_a = 978,0827 \quad g_b = 978,0224 \quad g_c = 983,2249$$

VI. *Stazioni di gravità vicine all'equatore senza le stazioni marine di Vening Meinesz.*

$$G = 978,0418 \quad \alpha = 0,0052884 \quad \gamma = 0,0000214$$

se ne deduce

$$g_a = 978,0627 \quad g_b = 978,0208 \quad g_c = 983,2140$$

VII. *Stazioni di gravità americane (Messico, Indie occidentali, U. S. A., Canada).*

Si ha

$$G = 978,437 \quad \alpha = 0,0053117 \quad \gamma = 0,0000276$$

se ne deduce

$$g_a = 978,0706 \quad g_b = 978,0167 \quad g_c = 983,2387$$

VIII. *Stazioni di gravità in Europa.*

Si ha

$$G = 978,0515 \quad \alpha = 0,0053013 \quad \gamma = 0,0000276$$

se ne deduce

$$g_a = 978,0784 \quad g_b = 978,0245 \quad g_c = 983,2365$$

IX. *Stazioni di gravità in Siberia ed India.*

Si ha

$$G = 978,0503 \quad \alpha = 0,0052751 \quad \gamma = 0,0000276$$

se ne deduce

$$g_a = 978,0773 \quad g_b = 978,0232 \quad g_c = 983,1998$$

X. *Stazioni di gravità nei mari australi (non ridotte).*

Si ha

$$G = 978,0398 \quad \alpha = 0,0053171 \quad \gamma = 0,0000143$$

se ne deduce

$$g_a = 978,0537 \quad g_b = 978,0258 \quad g_c = 983,3401$$

XI. *Stazioni dell'emisfero australe in Africa orientale ed in mare, non ridotte.*

Si ha

$$G = 978,0385 \quad \alpha = 0,0052884 \quad \gamma = 0,0000047$$

se ne deduce

$$g_a = 978,0620 \quad g_b = 978,0307 \quad g_c = 983,2226$$

I valori dell'angolo λ_0 che determina l'orientazione dell'asse maggiore dell'ellisse equatoriale sono pure stati determinati mediante le osservazioni

gravimetriche dal prof. HEISKANEN, negli undici casi considerati, ma essi non interessano i calcoli che noi dobbiamo eseguire. Tuttavia li riferiamo qui nello stesso ordine dei casi considerati. Si ha

$$\begin{aligned}\lambda_0 = & -25^\circ ; -3^\circ ; -33^\circ ; +12^\circ ; -30^\circ ; -31^\circ ; \\ & -25^\circ ; -25^\circ ; -25^\circ ; +25^\circ ; +32^\circ\end{aligned}$$

Di qui appare che le osservazioni di gravità non danno valori concordanti per l'orientazione dell'asse maggiore. Tuttavia predomina il valore $\lambda_0 = -25^\circ$.

Riferiamo nella Tabella I che segue i valori dei semiassi a, b, c calcolati negli undici casi considerati, applicando le formule [6] ed usando come unità di misura il metro.

Nella Tabella II riferiamo i valori della differenza $a - a_i$, essendo a_i il raggio equatoriale dell'ellissoide internazionale

$$a_i = 6378388 \text{ m.}$$

Inoltre le differenze $a - b$ ed $a - c$; l'inversa $\frac{1}{\alpha}$ dello schiacciamento $\frac{a - c}{a}$ ed i valori che per questa inversa ha trovato HEISKANEN.

TABELLA I.

	a	b	c
I.	6378 407	6378 055	6356 936
II.	349	049	941
III.	365	227	7000
IV.	381	088	887
V.	429	036	883
VI.	298	025	812
VII.	350	7998	972
VIII.	401	049	968
IX.	394	058	720
X.	240	058	628
XI.	294	090	868

TABELLA II.

	$a - a_i$	$a - b$	$a - c$	$1/\alpha$	$1/\alpha H$
I.	+ 19	352	21471	297.0	297.8
II.	— 39	300	408	297.9	298.3
III.	— 23	138	305	293.5	297.8
IV.	— 9	293	494	296.7	—
V.	+ 41	393	546	296.0	—
VI.	— 90	273	486	296.8	—
VII.	— 38	352	378	298.3	299.1
VIII.	+ 13	352	443	297.4	298.1
IX.	+ 6	353	674	294.2	295.8
X.	— 148	182	0612	309.4	299.5
XI.	— 94	204	426	297.6	—

In queste Tabelle appare notevole la piccolezza della differenza $a - a_i$; cioè il semiasse maggiore a dell'ellissoide differisce pochissimo del raggio dell'equatore internazionale.

Sono da ritenersi anomali, e quindi da escludere, i risultati del caso X; del resto anche HEISKANEN avverte che i calcoli relativi sono *very inaccurate*.

Le differenze $a - b$ coincidono in quattro casi col valore trovato da HEISKANEN considerando tutti i valori della gravità isostaticamente ridotti (caso I) che è

$$a - b = 352 \pm 30 \text{ m.}$$

Vi è qualche differenza notevole negli altri casi. In via generale possiamo ammettere che questa differenza dei semiassi equatoriali, quale risulta dalle misure di gravità, è compresa fra 200 e 400 m.

L'aver ottenuto numeri concordanti fra loro in generale, sebbene i dati d'osservazione siano stati presi in regioni diverse della superficie terrestre, può considerarsi come una conferma del fatto teorico che gli elementi geometrici dell'ellissoide geoidica sono determinati da un piccolo numero di valori della gravità, come vedremo meglio in seguito.

Naturalmente i valori numerici trovati non sono valori assoluti; qualche variazione si può avere variando le approssimazioni. Noi ci siamo

in generale attenuati a quattro cifre decimali. Queste variazioni però lasciano pressochè inalterate le differenze $a - b$, $a - c$, che precipuamente importava di calcolare.

II.

Le considerazioni precedenti si collegano naturalmente col problema della determinazione dell'ellissoide geoidico, quando siano noti un certo numero di valori della gravità in punti conosciuti.

Nel caso del geode ellissoidico di rotazione io ho già avuto occasione di dimostrare che i due assi di questo ellissoide sono *analiticamente* determinati quando si conoscano tre valori della gravità. Giova ora esaminare se questa proprietà possa averne una corrispondente sull'ellissoide a tre assi. La quistione può essere risolta ricordando anzitutto la formola che rappresenta la gravità sulla superficie ellissoidica del geode:

$$[9] \quad g = \frac{(ag_a \cos^2 \psi + bg_b \sin^2 \psi) \cos^2 \varphi + cg_c \sin^2 \varphi}{\sqrt{(a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi) \cos^2 \varphi + c^2 \sin^2 \varphi}}$$

ove φ, ψ rappresentano la latitudine e la longitudine del punto considerato.

Questa formola, come facilmente si vede, non dipende dai valori assoluti dei semiassi, ma soltanto dai loro rapporti.

Si ha perciò la proprietà che in ellissoidi geoidici omotetici, nei quali i valori della gravità agli estremi degli assi siano uguali, anche tutti gli altri valori della gravità nei punti di ugual latitudine e longitudine sono uguali.

Pel nostro problema questa proprietà è fondamentale, poichè una relazione come la [9] quando tutti gli elementi che vi compaiono siano noti all'infuori dei valori dei semiassi, può considerarsi come una relazione algebrica atta alla determinazione dei loro rapporti.

Poniamo per semplicità

$$\lambda = \cos \psi \cos \varphi \quad \mu = \sin \psi \cos \varphi \quad \nu = \sin \varphi$$

La [9] diviene

$$g = \frac{ag_a \lambda^2 + bg_b \mu^2 + cg_c \nu^2}{\sqrt{a^2 \lambda^2 + b^2 \mu^2 + c^2 \nu^2}}$$

Supponiamo noti i valori g_1, g_2 della gravità in due punti di coordinate φ_1, ψ_1 e φ_2, ψ_2 rispettivamente. Indichiamo con λ_1, μ_1, ν_1 e λ_2, μ_2, ν_2 i corrispondenti valori di λ, μ, ν . Poniamo inoltre

$$x = \frac{b}{a} \quad y = \frac{c}{a}$$

Le due relazioni che risultano dalle corrispondenti espressioni di g_1, g_2 ridotte a forma razionale divengono

$$[10] \quad \begin{aligned} (\lambda_1^2 + x^2 \mu_1^2 + y^2 \nu_1^2) g_1^2 &= (g_a \lambda_1^2 + x g_b \mu_1^2 + y g_c \nu_1^2)^2 \\ (\lambda_2^2 + x^2 \mu_2^2 + y^2 \nu_2^2) g_2^2 &= (g_a \lambda_2^2 + x g_b \mu_2^2 + y g_c \nu_2^2)^2. \end{aligned}$$

Costituiscono quindi un sistema di due equazioni quadratiche nelle due incognite x, y . Queste due quantità risultano quindi determinate, in via generale, eventualmente non in modo unico. Converrebbe quindi discutere sui valori delle soluzioni di questo sistema di equazioni.

Ma si può osservare che nei casi che ci interessano, quando cioè è nota una formola per la gravità normale, noi possediamo infiniti valori per la gravità. Possiamo quindi scegliere a nostro piacimento i due valori g_1, g_2 in modo da semplificare il sistema delle due equazioni.

Supponiamo il primo punto scelto sull'equatore, quindi $\varphi_1 = 0$; ed il secondo sul meridiano che contiene gli assi a, c quindi $\psi_2 = 0$. Avremo, sopprimendo gli indici di φ e di ψ ,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \cos \psi & \mu_1 &= \sin \psi & \nu_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= \cos \varphi & \mu_2 &= 0 & \nu_2 &= \sin \varphi \end{aligned}$$

e le due equazioni [10] divengono

$$[11] \quad (\cos^2 \psi + x^2 \sin^2 \psi) g_1^2 = (g_a \cos^2 \psi + x g_b \sin^2 \psi)^2$$

$$[12] \quad (\cos^2 \varphi + y^2 \sin^2 \varphi) g_2^2 = (g_a \cos^2 \varphi + y g_c \sin^2 \varphi)^2$$

quindi due equazioni indipendenti, l'una per determinare x , l'altra per determinare y . Inoltre ciascuna di queste equazioni è della forma della equazione, da noi discussa nel caso dell'ellissoide di rotazione, per determinarne lo schiacciamento.

La seconda delle equazioni precedenti coincide anche per quanto riguarda le costanti g_a, g_c coll'equazione considerata nella nostra Nota: *Sulla determinazione delle costanti del geoido mediante misure di gravità* in «Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino», vol. LXII, 1927. Possiamo quindi accettarne le conclusioni, cioè che quell'equazione ha sempre due radici reali, di cui una sola può essere minore dell'unità.

La determinazione del rapporto $c : a$ risulta così effettuata univocamente.

Per la determinazione analoga del secondo rapporto conviene considerare invece della equazione [11] l'equazione che si ottiene da una qualsiasi delle [10] supponendo ψ_1 o $\psi_2 = 90^\circ$. Si ottiene così

$$\lambda_1 = 0 \quad \mu_1 = \cos \varphi \quad \nu_1 = \sin \varphi.$$

Il punto scelto viene a trovarsi sul meridiano degli assi b , c e la prima delle [10] diviene, ponendo

$$z = \frac{y}{x} = \frac{c}{b},$$

un'equazione quadratica in z ,

$$(\cos^2 \varphi + z^2 \sin^2 \varphi) g^2 = (g_b \cos^2 \varphi + z g_c \sin^2 \varphi)^2$$

che è della stessa forma dell'equazione che determina y , soltanto compare la costante g_b invece della g_a . Questa circostanza non influisce sulla discussione e possiamo ammettere anche in questo caso i risultati già richiamati dalla nostra Nota del 1927, cioè che l'equazione ha sempre radici reali, di cui una sola può essere minore della unità.

Possiamo dunque concludere che la determinazione dei rapporti degli assi dell'ellissoide mediante i valori della gravità g_a , g_b , g_c è possibile ed in modo unico, quando si conoscano altri due valori della gravità.

L'esistenza delle due altre soluzioni, che hanno valore maggiore della unità, porta alla conclusione che, analiticamente, sarebbe possibile un ellissoide, per cui si abbia

$$c > a \quad c > b$$

cioè un ellissoide allungato al modo che lo ritenevano i Cassini. L'ipotesi degli astronomi francesi, esclusa dalle misure geodetiche e da considerazioni meccaniche, si ripresenta quindi come una possibilità analitica.

Vediamo ora come possa essere determinata la densità media k .

Dividendo l'una per l'altra le ultime due equazioni [1] otteniamo, introducendo le funzioni Ψ ,

$$4 \pi \gamma k (c g_b - b g_c) = \omega^2 (c g_b \Psi_a - b g_c \Psi_b)$$

ed altre due equazioni analoghe dalle altre due coppie di equazioni [1]

$$4 \pi \gamma k (a g_c - c g_a) = \omega^2 (a g_c \Psi_a - c g_a \Psi_c)$$

$$4 \pi \gamma k (b g_a - a g_b) = \omega^2 (b g_a \Psi_b - a g_b \Psi_a).$$

Queste tre relazioni sono omogenee rispetto ai semiassi a , b , c , quindi non dipendono che dai loro rapporti, come le funzioni Ψ . Sono quindi tre relazioni che determinano ciascuna linearmente k , come funzione di g_a , g_b , g_c , e dei due rapporti $a:b:c$. Questi rapporti sono noti per la determinazione precedentemente indicata, perciò il problema della determinazione della densità media può considerarsi come risoluto.

Delle tre formole precedenti la più opportuna per i calcoli sarà quella che contiene il rapporto $c : a$ meglio determinabile. Introducendo lo schiacciamento

$$\alpha = \frac{a - c}{a}$$

abbiamo così

$$k = \frac{\omega^2}{4 \pi \gamma} \frac{g_c \Psi_a - (1 - \alpha) g_a \Psi_c}{g_c - (1 - \alpha) g_a}.$$

Prendendo per le Ψ i loro valori approssimati

$$\Psi_a = \frac{9}{2} \quad \Psi_c = -3$$

si ha

$$k = \frac{3 \omega^2}{8 \pi \gamma} \frac{3 g_c + 2 (1 - \alpha) g_a}{g_c - (1 - \alpha) g_a}$$

formola che resta inalterata anche nel caso dell'ellissoide di rotazione.

Determinati così i rapporti degli assi e la densità media, tutto risulta noto nei secondi membri delle formole [3]. Esse dànno quindi immediatamente i valori di a, b, c .

Il problema della *determinazione analitica* dei semiassi dell'ellissoide geoiditica a tre assi mediante valori della gravità può considerarsi risoluto.

Geodesia. — *Sulla geometria d'un ellissoide a tre assi poco differente da un ellissoide di rotazione.* Nota di SALVATORE DI PISA, presentata ⁽¹⁾ da CORRADINO MINEO, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Il BOTEZ, nella sua dissertazione di laurea ⁽²⁾, ha voluto paragonare alla metrica d'un ellissoide di rotazione quella d'un ellissoide generale pochissimo differente, in particolare alla metrica dell'ellissoide di rotazione di HAYFORD quella d'un ellissoide generale, le cui dimensioni furono valutate da HEISKANEN nel 1924. Nel suo lavoro egli ha seguito le tracce d'una Memoria del prof. MINEO sulla geometria d'una superficie poco differente da un ellissoide rotondo ⁽³⁾. Ora, in questo classico problema, che ha tanta importanza nella Geodesia superiore, la superficie, poco differente da un determinato ellissoide rotondo, è incognita, supponendosi soltanto che essa si trovi in un certo ordine di vicinanza con l'ellissoide stesso; e le formole che si stabiliscono e che dipendono da due funzioni arbitrarie, sono affatto generali e valgono per una intera classe di superficie, per le quali, cioè, un limite superiore del modulo delle due funzioni sia quello prefissato.

Nella forma che il prof. MINEO ha dato al problema ⁽³⁾, le due funzioni arbitrarie definiscono una congruenza di rette, rispetto all'ellissoide rotondo, preso come superficie di partenza; e, posto che la congruenza sia normale, la superficie incognita si determina per quadrature. Ma se, oltre alla superficie di partenza, è nota anche quella di arrivo, il problema del

⁽¹⁾ Nell'Adunanza del 16 gennaio 1942-XX.

⁽²⁾ Vedi P. MIHAI BOTEZ. *Sulla geometria d'un ellissoide a tre assi poco differente da un ellissoide di rotazione, con applicazione al caso della terra.* Iasi, Tipografia « Presa Buna », 1938.

⁽³⁾ Cfr. MINEO. *Sulla geometria d'una superficie poco differente da un ellissoide con applicazione al caso della Terra.* « Annali di Matematica pura e applicata », serie IV, tomo XIV, 1935 36; vedi MINEO, *Sulle formole fondamentali per il confronto della superficie geoidica con l'Ellissoide Besselliano.* « Giornale di Matematiche di Battaglini », vol. XLIX, 1911. Vedi pure MINEO, *Lezioni di Geodesia per gli allievi ingegneri.* Palermo, Edizioni del G. U. F., Anno XII.

confronto delle due superficie, assumendo come corrispondenti, secondo si suole, punti delle superficie che si trovano sulle normali a una di esse, è un problema puramente algebrico, che si risolve immediatamente. Il BOTEZ, per contro, procedendo come se la superficie conosciuta fosse ignota, è stato costretto a ripetere, sopra un esempio particolare, tutta la Memoria del prof. MINEO, procurandosi per le funzioni fondamentali, che si possono trovare direttamente, equazioni differenziali, che deve poi integrare!

Senza volere scemare pregio allo studio del BOTEZ, accurato e corredato di molti calcoli e di tavole numeriche, faremo vedere, in questa Nota, come il problema si risolva agebricamente e rapidamente.

1. Presi come parametri le coordinate geografiche φ e ω , le equazioni parametriche dell'ellissoide di rotazione schiacciato sono:

$$[1] \quad x = \frac{a}{W} \cos \varphi \cos \omega, \quad y = \frac{a}{W} \cos \varphi \sin \omega, \quad z = \frac{a(1-e^2)}{W} \sin \varphi,$$

con

$$[2] \quad W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}.$$

E per quelle dell'ellissoide a tre assi, sul quale chiamiamo l e λ le coordinate geografiche, abbiamo:

$$[3] \quad x^* = \frac{a \left(1 + \frac{1}{2} \mu\right)^2}{W^*} \cos \frac{l}{2} \cos \lambda, \\ y^* = \frac{a \left(1 - \frac{1}{2} \mu\right)^2}{W^*} \cos l \sin \lambda, \quad z^* = \frac{a(1-e^2)}{W^*} \sin l,$$

con

$$[4] \quad W^* = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 l + \mu \left(\cos 2\lambda + \frac{1}{4} \mu \right) \cos^2 l}.$$

I due ellissoidi, concentrici e coassiali, hanno eguali i semiassi situati sull'asse z , mentre la media aritmetica dei due semiassi equatoriali

$$a \left(1 + \frac{1}{2} \mu\right), \quad a \left(1 - \frac{1}{2} \mu\right)$$

dell'ellissoide [3] è eguale al raggio equatoriale a dell'ellissoide rotondo [1].

Tra i due ellissoidi s'intende stabilita una corrispondenza puntuale biunivoca, tale che al punto P^* (x^* , y^* , z^*) dell'ellissoide [3] corrisponda

il punto più vicino $P(x, y, z)$ in cui l'ellissoide [1] è incontrato dalla normale al primo ellissoide in P . Epperò:

$$[5] \quad x^* = x + h \cos l \cos \lambda, \quad y^* = y + h \cos l \sin \lambda, \quad z^* = z + h \sin l,$$

essendo

$$[6] \quad h = \overline{PP^*}.$$

Secondo le valutazioni di HAYFORD e HEISKANEN, si ha

$$e^2 \cong 67 \times 10^{-4}, \quad \mu = 54 \times 10^{-6},$$

e i termini che hanno a fattore quantità dell'ordine di μ^2 vengono trascurati in questa ricerca (1).

Ora si vede subito dalle [1] e [3] che

$$[7] \quad \frac{x^* - x}{a}, \quad \frac{y^* - y}{a}, \quad \frac{z^* - z}{a}$$

sono dell'ordine di μ . Per conseguenza, dall'espressione della terza delle [7] è facile dedurre che $\sin l - \sin \varphi$ (e quindi $l - \varphi$) dev'essere dell'ordine di μ ; poi, dall'espressione della seconda delle [7], si deduce che anche $\cos l \sin \lambda - \cos \varphi \sin \omega$ (e quindi $\lambda - \omega$) dev'essere dell'ordine di μ . Dunque è legittimo scrivere

$$[8] \quad l - \varphi = \xi, \quad \lambda - \omega = \xi_1,$$

essendo ξ e ξ_1 dell'ordine di μ . Per mezzo delle [8], il sistema delle equazioni [5], con un semplice calcolo, si trasforma, nell'approssimazione predetta, nel seguente sistema di equazioni lineari in $\xi, \xi_1, \frac{h}{a}$.

$$\begin{aligned}
 & \xi (1 - e^2 \cos^2 \varphi) \tan \varphi + \xi_1 \tan \omega + \frac{h}{a} \left(1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \varphi \right) = \\
 & = \mu \left(1 - \frac{(1 + e^2 \sin^2 \varphi) \cos^2 \varphi \cos 2\omega}{2} \right), \\
 & \xi (1 - e^2 \cos^2 \varphi) \tan \varphi - \xi_1 \cotang \omega + \frac{h}{a} \left(1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \varphi \right) = \\
 & = -\mu \left(1 + \frac{(1 + e^2 \sin^2 \varphi) \cos^2 \varphi \cos 2\omega}{2} \right), \\
 & \xi (1 - e^2 \cos^2 \varphi) \cotang \varphi - \frac{h}{a} \left(1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \varphi \right) = \\
 & = \frac{1}{2} \mu (1 - e^2 \cos^2 \varphi) \cos^2 \varphi \cos 2\omega.
 \end{aligned}$$

(1) Come si vede, le deviazioni delle due superficie sono assai esigue e di molto inferiori alle quantità (dell'ordine di 10^{-8}) che si usa trascurare nelle deviazioni angolari e lineare tra ellissoide e geoide.

E da queste, data l'approssimazione stabilita, si trae *senz'altro* ⁽¹⁾:

$$[10] \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = \frac{1}{2} \mu \left(1 + \frac{1}{2} e^2 \cos^2 \varphi \right) \sin 2 \varphi \cos 2 \omega, \\ \xi_1 = \mu \sin 2 \omega, \\ \frac{h}{a} = \frac{1}{2} \mu \left(1 + \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \varphi \right) \cos^2 \varphi \cos 2 \omega. \end{array} \right.$$

Chiamando ε l'angolo delle due normali ai due ellissoidi in punti corrispondenti, si ha

$$\sin \varepsilon = \sqrt{\left\| \begin{array}{ccc} \cos \varphi \cos \omega & \cos \varphi \sin \omega & \sin \varphi \\ \cos l \cos \lambda & \cos l \sin \lambda & \sin l \end{array} \right\|^2},$$

e, nella approssimazione stabilita:

$$\varepsilon = \sqrt{\xi^2 + \xi_1^2 \cos^2 \varphi},$$

e, ponendo secondo l'uso,

$$\eta = \xi_1 \cos \varphi,$$

ξ ed η sono le solite componenti della deviazione totale. La seconda delle [10] può essere quindi sostituita da

$$[11] \quad \eta = \mu \cos \varphi \sin 2 \omega.$$

Si sono trovate così, direttamente e algebricamente, le formole ottenute dal BOTEZ e il problema è interamente risoluto. Non c'è che da specificare, come sopra, le funzioni ξ , η , $\frac{h}{a}$ nelle formule generali del professor MINEO per avere tutti gli elementi metrici di confronto tra i due ellissoidi.

⁽¹⁾ I termini in μe^2 sono, anzi, quasi trascurabili, nelle ipotesi del BOTEZ.

Zoologia. — *L'attività respiratoria della « Calliphora erythrocephala » durante il ciclo larvale e pupale* ⁽¹⁾. Nota di CELSO GUARESCHI e ALBERTO STEFANELLI, presentata ⁽²⁾ dall'Accademico FILIPPO SILVESTRI.

Nell'Istituto « Battista Grassi » della R. Università di Roma da anni si svolge una serie di ricerche mirante ad indagare le attività metaboliche dello sviluppo. Esponiamo in questa nota un primo gruppo di osservazioni ricavate dalla estensione agli Insetti degli studi che ALBERTO STEFANELLI ha già svolto su altri materiali embrionali (Anfibi, Petromizonti) ⁽³⁾, con lo scopo di integrare i risultati di altre esperienze fatte nell'Istituto sugli Insetti.

Era infatti necessario comparare l'andamento della attività di catalasi ⁽⁴⁾ durante la vita larvale e pupale della *Calliphora erythrocephala* con l'attività respiratoria durante lo stesso periodo, poichè l'attività di catalasi, pur sfuggendo ancora ad una piena identificazione, deve pur essere in qualche modo in relazione con i fenomeni di ossidoriduzione e di riduzione.

La presente ricerca, oltre al valore comparativo ora indicato, è risultata interessante anche per le particolarità della curva della assunzione di O₂ durante tale periodo della vita degli Insetti, che si sono potute mettere in evidenza grazie alla sensibilità del metodo usato (microrespirometro differenziale di STEFANELLI).

Molti punti della attività respiratoria nello sviluppo degli Insetti sono ancora oscuri e sono tuttora oggetto di controversie da parte dei numerosi autori che si sono occupati dell'argomento. In questa prima nota, noi, oltre a dare uno sguardo generale dell'attività respiratoria durante

(¹) Lavoro eseguito nell'Istituto « Battista Grassi » di Anatomia Comparata, della R. Università di Roma, diretto dal prof. GIULIO COTRONEI.

(²) Nell'Adunanza del 16 gennaio 1942-XX.

(³) Si rimanda per i dati bibliografici di queste ricerche ai lavori pubblicati in « Arch. Sc. Biol. », 27 (1941); « Boll. Soc. It. Biol. Sperim. », 16 (1941).

(⁴) C. GUARESCHI e DEL PIANTO, « Boll. Soc. It. Biol. Sperim. », vol. XVI, 1941; C. GUARESCHI, « Boll. Soc. It. Biol. Sperim. », vol. XVII, 1942, (in corso di stampa).

la vita larvale e pupale, ci proponiamo di esaminare più particolarmente il fenomeno della caduta dell'attività respiratoria nel periodo prepupale.

Ricordiamo come già lo SPALLANZANI avesse notato (pubblicazione postuma del 1807) che le crisalidi hanno respirazione meno elevata dei bruchi e delle farfalle e che essa decresce col decrescere della temperatura sino a ridursi a zero a 0 gradi (citazione da MONTALENTI). La maggior parte degli autori hanno notato come l'andamento della curva esprimente le variazioni dell'assunzione di O_2 , come dell'emissione di CO_2 , durante il periodo prepupale e pupale sia tipicamente ad U, con una decrescenza nel periodo prepupale e nella prima parte di quello pupale ed una risalita in seguito sino allo sfarfallamento (BATAILLON '93, SOSNOWSKI '00, WEINLAND '05, KROGH '23, FINK '25, TAYLOR '27, CLARE '25, BODINE e ORR '25, HELLER '25-'28, ORR '37).

BATAILLON ('93), e contemporaneamente, ma in modo molto più esatto, LUCIANI e LO MONACO ('93) ⁽¹⁾ hanno studiato l'attività respiratoria del *Bombix mori* constatando un aumento evidente della CO_2 emessa nel periodo di filatura del bozzolo che precede la muta crisallidale. Un leggero aumento della CO_2 emessa risulta anche dai dati di TANGL ⁽²⁾ in un Dittero, l'*Ophyura cadaverina*, all'inizio del periodo pupale: la CO_2 emessa in 24 ore varia da 62 mmg. nel giorno precedente l'impupamento a 66 nel primo giorno di vita pupale per scendere poi a 60 ed ancora meno nei giorni successivi. L'attività respiratoria prepupale del baco da seta è stata messa in relazione agli attivi movimenti nella filatura del bozzolo e, come pensa NEEDHAM, alla attività stessa dei seritteri per la produzione della seta. Di ben più difficile spiegazione appare l'aumento osservato da TANGL in un Dittero ove mancano questi processi e dove tale aumento risulta coincidere, secondo questo autore, non al periodo prepupale ma nel primo giorno del periodo pupale stesso.

Allo scopo di analizzare meglio l'attività respiratoria del periodo prepupale e pupale abbiamo scelto per queste prime esperienze un Dittero, la *Calliphora erythrocephala*, Insetto olometabolo di facile allevamento e rapido sviluppo. Tale materiale ci avrebbe permesso, oltre alle altre valutazioni, di osservare se era estendibile ad altri Ditteri l'aumento respiratorio osservato da TANGL, vagliandone l'intensità ed il preciso momento in cui si manifesta.

Le determinazioni sono state fatte su esemplari isolati, usando il microrespirometro di ALBERTO STEFANELLI la cui sensibilità ci ha permesso di misurare l'intensità respiratoria anche di una singola larveta appena sgusciata dall'uovo. Anzi anche lo stesso uovo ha potuto essere assoget-

⁽¹⁾ LUCIANI e LO MONACO, « Atti R. Accademia Georgofili », 18 (1893).

⁽²⁾ F. TANGL, « Arch. f. ges. Physiol. », 130 (1905).

tato all'esperienza, ma dei risultati ottenuti durante il periodo embrionale riferiremo altrove. Data la enorme differenza di intensità respiratoria che la *Calliphora* presenta nei vari periodi dello sviluppo, è stato necessario adottare un modello di microrespirometro a sensibilità variabile in modo da poter usare lo stesso strumento (il che è molto importante per la valutazione degli errori strumentali) durante tutto il ciclo di ogni esemplare ⁽¹⁾.

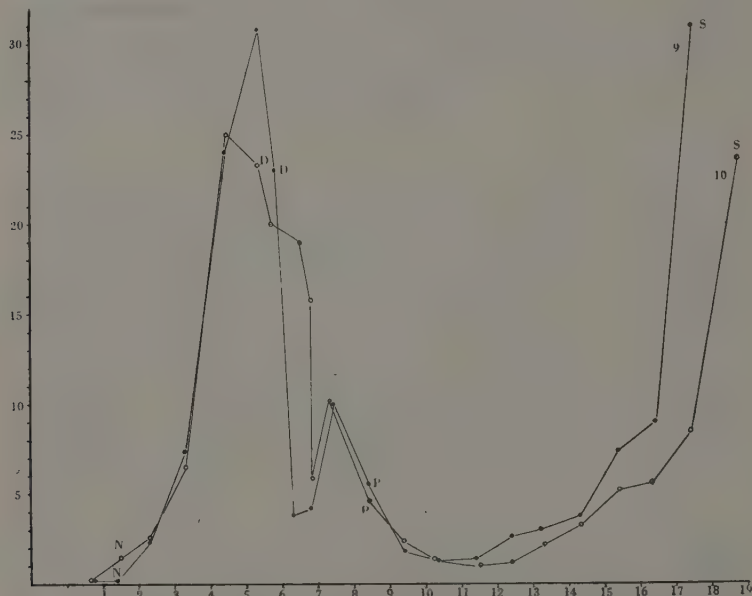


Fig. 1. — Grafici della assunzione di O_2 durante lo sviluppo larvale ed il periodo pupale di esemplari di *Calliphora erythrocephala* allevati a $25^\circ C$. Sulle ascisse sono indicati i giorni dalla nascita della larva, sulle ordinate i valori di O_2 , assunto in 1 minuto, in centesimi di centimetro cubico, ridotti a 0° e 760 mm Hg. N, nascita della larva; D, inizio del digiuno prepupale; P, inizio del periodo pupale; S, sfarfallamento. I due esemplari sono dello stesso lotto.

L'andamento generale della curva respiratoria (fig. 1), dalla nascita della larva allo sfarfallamento, si presenta con un rapida ascesa della curva durante la vita larvale con una caduta che si inizia *prima* della ninfosi, con una risalita durante il periodo di morfogenesi che si svolge durante la ninfosi e che porta alle strutture dell'adulto, con un apice allo

⁽¹⁾ Il microrespirometro manometrico differenziale di STEFANELLI è descritto nel vol. I A. VIII de « La Ricerca scientifica » (1937). La modificazione apportata sarà descritta da STEFANELLI in apposita nota tecnica.

sfarfallamento dopo il quale l'attività respiratoria tende a stabilizzarsi accennando però ad una leggera decrescenza (fig. 1).

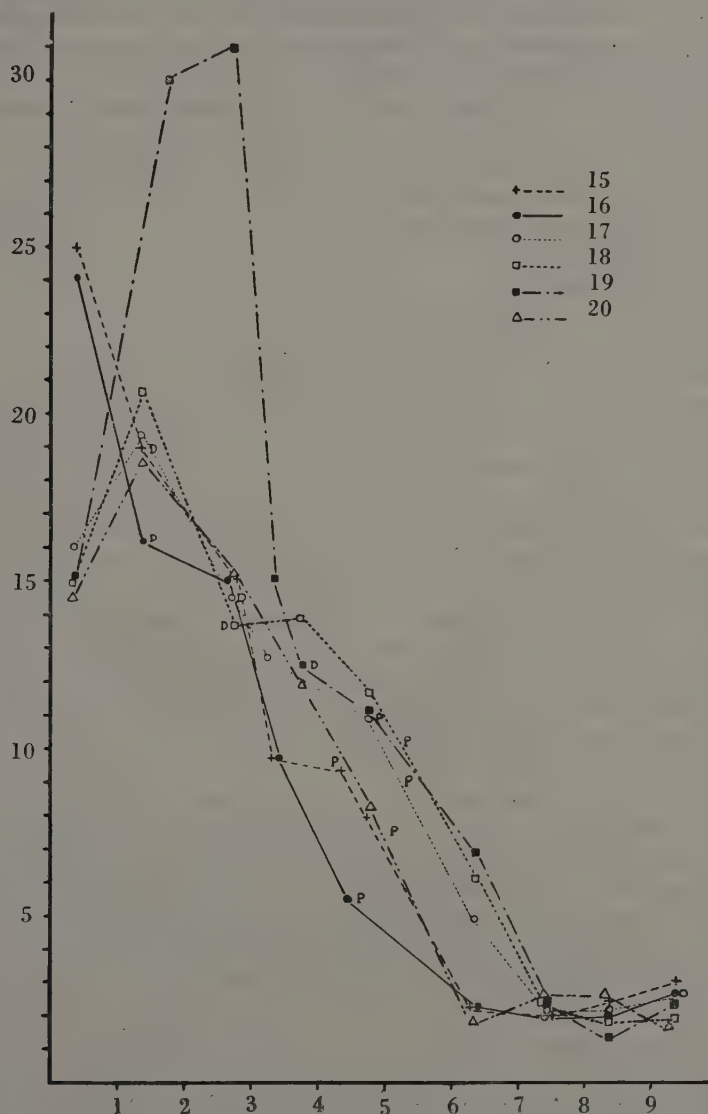


Fig. 2. - Grafici della assunzione di O_2 durante il periodo prepupale di 6 larve di *Calliphora erythrocephala* allevate a $25^\circ C$. Queste larve sino allo stadio iniziale dei grafici si sono sviluppate insieme alle consorelle con abbondante carne e non furono mai disturbate. Valori di O_2 sulle ordinate come nella figura 1; sulle ascisse giorni dall'inizio delle esperienze.

È risultato come la massima attività respiratoria del periodo larvale si verifichi non alla fine del periodo stesso ma circa tre giorni prima dell'impupamento, momento che è risultato coincidere con l'inizio del digiuno prepupale, caratterizzato dall'abbandono da parte della larva della carne che le serviva di nutrimento e dal suo vagare sul terriccio al fondo del cristallizzatore alla ricerca di un posto per l'impupamento. Da questo momento l'attività respiratoria va gradualmente raggiungendo valori sempre più bassi ma, circa *24 ore prima dell'impupamento*, è rilevabile una leggera risalita della curva che ricade però prima dell'inizio della muta ninfale. Avvenuto l'impupamento l'attività respiratoria diminuisce ancora per due, tre giorni.

Questo comportamento che può mettersi in relazione con le osservazioni di LUCIANI e LO MONACO e, con alcune riserve, con quelle di TANGEL, si è verificato in modo molto evidente negli esemplari cui si riferisce la figura 1. In altre larve che non sono state cimentate sin dalla nascita, ma che sono state prelevate dall'allevamento comune poco prima dell'inizio del periodo prepupale, l'aumento non si è verificato in modo così netto, ma, in un periodo corrispondente, si è avuto o un lieve aumento o un arresto o un rallentamento della velocità di caduta della assunzione di O_2 (fig. 2). Il che dimostra in questo momento l'esistenza di un qualche fenomeno influenzante la respirazione che può ricercarsi nella muta ninfale, per cui il tegumento dell'ultima età larvale si stacca dai tessuti sottostanti e si trasforma, nei Ditteri ortorafi, in pupario. È con tutta probabilità questa muta, la quale richiede indubbiamente un certo lavoro organico, che si traduce con una assunzione di ossigeno più intensa. Notiamo incidentalmente che nella specie da noi usata non esiste quel meccanismo di produzione della seta invocato da NEEDHAM per spiegare tale aumento nelle esperienze di LUCIANI e LO MONACO.

Le differenze riscontrate nelle varie larve possono trovare la spiegazione nelle diverse condizioni in cui le larve giungono alla metamorfosi. Se le larve sono ben nutrite e nelle migliori condizioni (larve lasciate insieme alle consorelle e con abbondante quantità di carne) si ha solo una diminuzione o al massimo un arresto della caduta del metabolismo respiratorio, mentre se sono deboli e denutrite (larve disturbate continuamente per le misurazioni e allevate isolatamente su piccoli pezzi di carne per necessità sperimentali) si mette in evidenza un netto aumento nella assunzione di ossigeno nel periodo della muta pupale. Molto istruttive a questo proposito sono le esperienze raffigurate nella figura 3. Due larve, sperimentate sin dalla nascita, erano così debilitate che, non appena avvenuta la muta pupale, sono morte. Le esperienze così interrotte sono state continuate con altre due larve dello stesso lotto, ma cresciute senza disturbi e insieme alle consorelle. Si può vedere come questi due esemplari presentino, allo stadio corrispondente ai primi cresciuti stentatamente, un consumo di

ossigeno notevolmente superiore. Ma, non ostante che questi ultimi si trovassero in simili condizioni di debilitamento, e questo è il punto importante della esperienza, nel momento precedente l'impupamento si manifesta l'arresto della caduta del consumo di ossigeno.

Consideriamo infine la curva della attività respiratoria della *Calliphora* in rapporto a quella della attività catalasica come è stata descritta

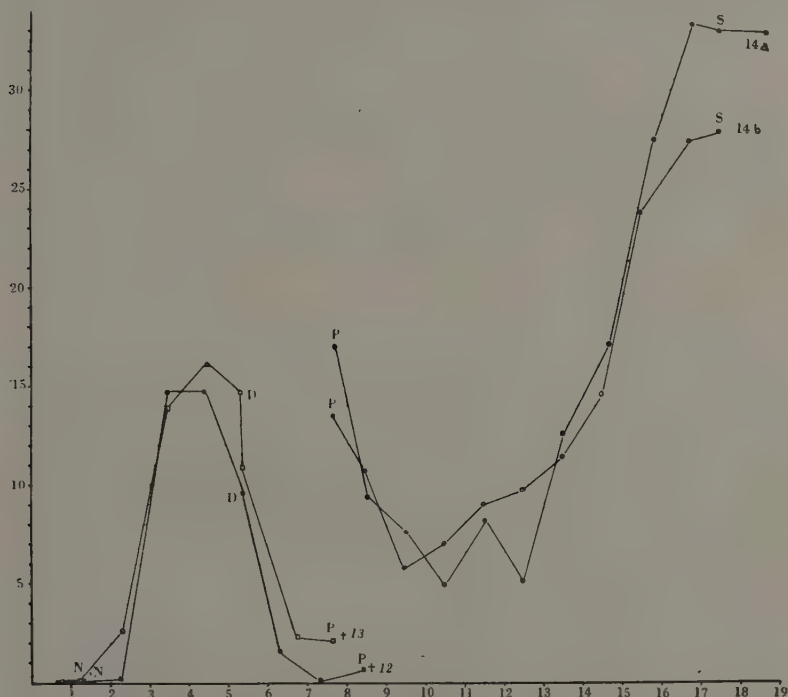


Fig. 3. - Grafici della assunzione di O₂ durante lo sviluppo larvale ed il periodo pupale di esemplari di *Calliphora erythrocephala* allevati a 25 C°. Le larve 12 e 13 sono decedute (†) appena avvenuto l'impupamento. Le esperienze sono proseguite con due Callifore dello stesso lotto ma che sino allo stadio di inizio delle misure sono vissute indisturbate con abbondante carne insieme a numerose consorelle. Valori e lettere come nella figura 1.

da GUARESCHI e DEL PIANTO. In un primo tempo della vita larvale sia l'attività respiratoria che quella di catalasi crescono, benchè la velocità di aumento della prima vada man mano crescendo e quella della seconda diminuendo. Ben presto la differenza tra i due fenomeni diviene ancora maggiore: mentre l'attività respiratoria comincia rapidamente ad abbassarsi quando l'animale cessa di nutrirsi, e cioè all'inizio del periodo prepu-

pale, quella catalasica continua ad aumentare sin dopo l'impupamento per poi decrescere anch'essa; poco dopo però, mentre l'attività respiratoria si mantiene ancora assai bassa, quella catalasica, misurata in cm^3 di O_2 svolti dall' H_2O_2 , si innalza nuovamente per raggiungere un nuovo massimo, che è anche maggiore a quello raggiunto subito dopo l'impupamento, ed al quale si arriva subito dopo il periodo pupale. A tal punto, mentre l'attività respiratoria comincia a crescere, quella di catalasi diminuisce e tale andamento continua sino allo sfarfallamento.

Con i dati che sin ora abbiamo sarebbe prematuro indicare l'essenza della relazione tra i due fenomeni. Nuove esperienze portate sui più diversi materiali e collegate con i risultati della letteratura, permetteranno di gettare una qualche luce sul complesso problema delle relazioni fra respirazione e catalasi negli Insetti.

Fisica. — *Il problema delle cause del magnetismo terrestre.*
Comunicazione⁽¹⁾ di QUIRINO MAJORANA, Aggregato alla
R. Accademia d'Italia.

Specialmente nel secolo XIX, il fisico è riuscito ad osservare ed ad inquadrare in leggi più o meno precise, fatti naturali numerosi, interessanti ammassi macroscopici di materia. Difficilmente, nell'ambito delle umane possibilità, altri fatti importanti, del genere, riguardanti i vari capitoli della Scienza naturale inorganica, restano a scoprire. Il secolo XX si sta occupando della fisica del microcosmo, o di quella degli sterminati spazi astronomici.

Ma tra i fatti macroscopici, se ne dovrebbero elencare altri, che all'uomo non sono accessibili, almeno per ora. Essi riguardano la materia in condizioni troppo differenti da quelle in cui essa si trova, quando noi siamo abituati a studiarla; e cioè: enormi pressioni, temperature, distanze, spazi, intervalli di tempo. Noi non sappiamo bene precisamente stabilire, tutto quanto si svolge nell'interno della Terra, non riuscendo noi a sperimentare con pressioni superiori a quelle corrispondenti a circa un centinaio di chilometri di profondità dal suolo (circa 20.000 atmosfere); ed a ben comprendere come la materia si comporti nell'interno degli astri luminosi, dove essa raggiunge milioni di gradi termici; che cosa avvenga a distanze superiori a milioni di anni-luce; od, infine, come possano verificarsi lentissime trasformazioni, attraverso enormi intervalli di tempo. In tutti questi casi, si osa talvolta formulare ardite ipotesi, grazie anche al recente progresso della fisica; ma esse non possono sicuramente venir controllate, dall'osservazione o dalla esperienza.

Ci rassegniamo a tale nostra ignoranza, che ha per naturale sfondo la limitatezza dei nostri mezzi di speculazione, e, sostanzialmente, quella del nostro intelletto.

Ma ciò ho voluto dire, per fissare la nostra attenzione su di un fenomeno naturale, che non parrebbe avere in prima indagine, quelle caratteristiche di incomprendibilità dei fenomeni citati: il magnetismo terrestre. Esso interessa tutta la massa del nostro globo; ma come noi siamo riusciti a comprendere tante caratteristiche di tale massa, è sorprendente rile-

(¹) Letta nell'Adunanza del 20 febbraio 1942-XX.

vare la nostra, si può dire, assoluta ignoranza delle vere cause di quel fenomeno.

Abituati a stabilire nei nostri laboratori, le modalità e le leggi a cui obbedisce la magnetizzazione di piccoli ammassi materiali, ci sorprende assai il non saperne render conto, del perchè il nostro pianeta appaia possedere due polarità magnetiche: un Sud fisico al Nord geografico, un Nord fisico al Sud geografico.

Alla nostra mente ripugna ammettere, che il senso di tali polarità sia puramente casuale. Quasi certamente, circostanze particolari a noi note od ignote, hanno dovuto determinare quel senso. Noi non sappiamo inoltre, se tali cause agirono solo una volta con particolare intensità, o se pur oggi continuano ad agire, in misura a quella paragonabile. Di esse, l'uomo è inutilmente in cerca, sin da quando questo primordiale fenomeno fu osservato. Anche oggi, malgrado il grande progresso della scienza sperimentale e teorica, non si vede una via sicura, che ci possa aiutare a risolvere simile problema.

Tali preliminari considerazioni fanno vedere quale suggestivo interesse debba avere per il fisico, lo studio del magnetismo terrestre.

Ho subito il fascino di tale quesito, in tutta la mia vita di ricerca sperimentale. Dirò anzi, che a volte, sin dal principio del secolo, ho realizzato dispositivi, tendenti a rintracciare quelle cause; nè mai prima d'ora, in causa dell'insuccesso di tale mia frammentaria attività, ne ho dato pubblica notizia. In particolare negli ultimi dieci anni, le cosiddette azioni giromagnetiche hanno fatto oggetto di simili speculazioni, da mia parte. Ma anche in tale campo, non posso dire di avere ottenuto risultati veramente conclusivi.

Da un anno a questa parte, ho ripreso lo studio in genere, delle possibili cause del magnetismo terrestre, spinto da un canto dalla scoperta fatta recentemente, di relazioni tra eruzioni solari, disturbi della radio e burrasche magnetiche; e, dall'altro, dal desiderio di utilizzare al massimo, i mezzi di un laboratorio di cui forse per poco tempo potrò ancora disporre. Al limite della mia attività scientifica, credo utile, non per mia vanità, ma al fine di richiamare ancora l'attenzione dei Colleghi sull'importante problema, di esporre quale sia stato il risultato di questo mio lavoro.

Non è mia intenzione di riferire con larghezza su tali ricerche. Ma ad esse mi piace accennare, anche nutrendo la speranza che la discussione dell'argomento con i competenti, possa costituire per me, utile guida, nell'eventuale sviluppo delle ricerche stesse.

Prima di iniziarne l'esposizione, sento tutto il dovere di ringraziare i colleghi ABETTI, BERNARDINI, GRAFFI, MEDI e VALLE, che hanno mostrato interesse per questa mia attività, fornendomi dati bibliografici o proponendomi studi quantitativi, per qualcuna delle ipotesi di cui dirò in fine.

* * *

Per esporre con la maggiore chiarezza e concisione tale argomento, dividerò il mio discorso in due parti. Riassumerò dapprima brevemente le notizie concernenti la struttura del magnetismo terrestre e le sue variazioni; ed accennerò poi ai tentativi fatti per dare di tutto il fenomeno, una plausibile spiegazione⁽¹⁾. Dirò successivamente di un nuovo esame da me fatto dell'argomento e di ricerche sperimentali connesse, sia pure non ultimate.

Come è noto, GILBERT supponeva semplicemente, che la Terra equivallesse ad una sfera calamitata. GAUSS precisò poi, che apparentemente la Terra contiene qualcosa come kg. 4,5 di acciaio saturo di magnetismo, per ogni mc. del suo volume; cioè circa il 2 ‰ della sua massa, in materiale ferromagnetico magnetizzato. Il campo osservabile è dell'ordine del gauss; noi sappiamo generare campi circa 100.000 volte più intensi.

Recentemente tale immagine è stata sostituita, paragonando il c. m. t., a quello di un magnete relativamente piccolo, sito nell'interno della Terra, con il polo Nord verso il Sud geografico, non assiale, cioè spostato verso il continente americano. Ma per ottenere una più approssimata rappresentazione, occorre esprimere il c. m. t. con una funzione armonica composta di almeno 13 termini.

La necessità di tanti termini deriva principalmente dalle *anomalie regionali* del m. t., che in certi casi possono essere assai cospicue. Così a Kursk, in Russia, la componente orizzontale varia da 0,2 a 0,8, fra punti non più lontani di km. 2. Tali fatti non sono spiegabili che ammettendo l'esistenza di materia magnetizzata nell'interno della Terra, e distribuita piuttosto irregolarmente.

Una simile immagine, dovuta in sostanza originariamente a GILBERT e a GAUSS, oggi non basta. Più accurate indagini fatte da SCHMIDT (1885) e da BAUER (1922), indicano che il c. m. t. è dato da tre sorgenti:

una prima corrispondente al 94 ‰ di tutto l'ammontare, si riferirebbe ad una causa interna;

una seconda, a causa esterna o dell'alta atmosfera;

una terza, detta *non potenziale*, sarebbe dovuta a correnti elettriche verticali, taglianti la superficie della Terra. Esse, concatenandosi con le linee di forza magnetica sulla superficie della Terra, darebbero luogo ad una circuitazione diversa da zero.

⁽¹⁾ Per le notizie riguardanti il magnetismo terrestre, cfr. «Physics of the Earth», vol. VIII, edited by J. A. FLEMING, 1939.

Ora l'esistenza del c. m. dovuto a cause interne, è fuori di dubbio. Così pure si può ritenere sicura l'ipotesi del secondo campo, dovuto a correnti elettriche nell'alta atmosfera. Ciò è anche confermato, dalla spiegazione che si dà delle burrasche magnetiche. Non così dicasi della parte *non potenziale*, la quale ipotesi potrebbe cadere, se si ammettessero notevoli errori di osservazione.

La sistematica osservazione delle grandezze caratterizzanti il m. t., fa inoltre vedere che esse variano col tempo. Si hanno perturbazioni diurne, annue e secolari. Le prime due dipendono dall'azione solare. Quanto alle perturbazioni secolari, esse sono in relazione con cambiamenti delle caratteristiche magnetiche dell'interno della Terra. Così sommariamente si spiegano le variazioni della declinazione, per la quale si hanno osservazioni in periodi dell'ordine di 3 o 4 secoli. Sempre a proposito di queste variazioni secolari, mi piace ricordare l'opera del compianto FOLGHERAITER (¹), qui in Roma. Egli, studiando la magnetizzazione di vasi etruschi di argilla, poté stabilire come la inclinazione abbia variato col tempo. Secondo i suoi rilievi, alenni secoli prima di Cristo, l'equatore magnetico sarebbe passato per l'Italia.

Altre variazioni del genere, sono state presunte, dallo studio del magnetismo di rocce magnetiche, dette talvolta anche *fossili magnetici*. Così, per esempio, per le lave dell'Etna (eruzione del 1284).

In tutti questi casi (compresi i vasi etruschi) si suppone che la materia, passando da un'alta temperatura a quella ordinaria, ha la proprietà di conservare le caratteristiche di orientamento del c. m. t. primitivo.

A proposito di così notevoli asserzioni, debbo dire che non manca chi, su di esse non nasconde il proprio scetticismo.

Come si è detto, la causa *interna* del m. t., dà ad esso il maggior contributo: circa il 94 %; ed anche questa cifra non è del tutto sicura, non conoscendosi bene la distribuzione della forza magnetica su tutta la superficie del globo, specialmente nelle regioni polari. Ad ogni modo, a tale parte si aggiunge un'azione che può valutarsi ad un qualche per cento, per sua natura fluttuante con periodo relativamente rapido, come quello diurno, od in modo repentino e brusco. È questa la causa parziale del magnetismo terrestre, che vogliamo chiamare *esterna*. Questa è dovuta all'azione delle radiazioni solari, od alla attività eccezionale del nostro maggiore astro. Nel primo caso, si osservano delle variazioni abbastanza regolari, con caratteristiche diverse, nelle varie località. L'attività solare, corri-

(¹) G. FOLGHERAITER, *Variazione secolare dell'inclinazione magnetica e ricerche connesse*. « Rend. R. Acc. Lincei », V, 2° sem., 1896, pag. 66, 127, 199, 242, 293; VI, 1° sem., 1897, pag. 64; VI, 2° sem., 1897, pag. 368; VIII, 1° sem., 1899, pag. 69, 121, 176, 269.

spondente alle macchie, alle eruzioni brillanti, ecc., si riverbera sul m. t. con le cosiddette burrasche magnetiche; queste possono distinguersi in due tipi differenti. Un primo tipo è conosciuto da maggior tempo; esso consiste in violente perturbazioni dell'ago magnetico, manifestantisi di solito uno o due giorni dopo l'inizio di eccezionale attività solare. Da ciò si deduce che debba trattarsi di particelle o corpuscoli, atomi, ioni, elettroni, proiettati dal Sole e che viaggiano con la velocità di 1000 e 2000 km/sec, e che arrivando sull'atmosfera terrestre, vi producono forti ionizzazioni, con conseguenti correnti elettriche, dalle quali prendono origine le perturbazioni magnetiche e, frequentemente, le aurore polari. A proposito di queste ultime, ricordo che BIRKELAND ne ha costruito un modello sperimentale.

L'altro tipo di burrasche magnetiche è stato osservato più recentemente; ed è caratterizzato dalla relativa contemporaneità della attività solare con i fenomeni perturbatori del m. t. Sono interessanti, al riguardo, le constatazioni del cosiddetto effetto DELLINGER ⁽¹⁾ e delle evanescenze radio, rilevate da MACNISH ⁽²⁾ e da altri. Questi fenomeni sono infatti accompagnati di solito da disturbi nelle trasmissioni o recezioni radio, specialmente od esclusivamente nel campo delle onde corte. Tali fatti avvengono più spiccatamente, se al momento in cui si osserva la perturbazione, il Sole si trova allo zenit; non durano al più che qualche decina di minuti primi.

Simili fatti possono interpretarsi, ammettendo un'azione sugli aghi magnetici e sulla radio, di un agente proveniente dal Sole, che si propaga all'incirca con la velocità della luce. E poichè tali azioni non sono sempre accompagnate da una visibile contemporanea attività solare, se ne deduce che debba trattarsi, almeno in parte, di radiazioni ultraviolette spinte, quali forse noi non sappiamo generare nei nostri laboratori. Secondo il mio personale avviso, è però possibile che anche particelle elettroniche, eccitate dalle violente convulsioni solari, possano viaggiare con velocità, se non eguale, abbastanza prossima a quella della luce. I fatti osservati dovrebbero attribuirsi promiscuamente alle due cause.

⁽¹⁾ J. H. DELLINGER, *Sudden disturbance of the ionosphere*, « Journal of app. Physics », Nov. 1937, pagg. 731-751.

⁽²⁾ A. G. MACNISH, *Terrestrial « Magnetic variations and the ionosphere »*, « Id. », pagg. 718-731.

* * *

La complessità del fenomeno del m. t. rende, di per sè, arduo qualsiasi tentativo di una sua spiegazione. Si può pensare che la Terra sia, come certamente è, in buona parte un corpo con caratteristiche ferromagnetiche. Esso ci apparisce magnetizzato, in conseguenza di una certa azione misteriosa, passata e forse in parte presente. Nella ricerca di una interpretazione di tale fenomeno, si può, per semplicità, distinguere la causa della magnetizzazione interna, da quella della esterna. Ciò dicasi, quantunque i due fatti possono essere intimamente legati, specialmente nel processo evolutivo della nostra terra, per noi sostanzialmente sconosciuto ed insondabile.

Quanto al primo fatto, i geofisici ed i geologi ammettono che nell'interno della Terra esista un nucleo sferico di circa km. 3500 di raggio, costituito da ferro e nichel. Ma poichè non si sa bene quale temperatura domini al centro della Terra, si ignora se essa sia lì, più alta o più bassa del punto di Curie. D'altra parte, non sappiamo se, alle enormi pressioni che debbono esistere al centro della Terra, il punto di Curie, per i singoli ferromagnetici sia quello conosciuto. Noi sappiamo solo che sino a 2000 atmosfere, esso non varia per il ferro. Nel dubbio, si può pensare che soltanto la crosta terrestre, dello spessore di una quindicina di km, sia quella che dia origine alle manifestazioni magnetiche della Terra, quantunque in media, il tenore di ferro in essa contenuto, sia piuttosto scarso.

In mancanza di successo di una semplice teoria ferromagnetica, si è pensato da taluno, all'effetto di correnti elettriche nella massa solida o liquida terrestre. Tali correnti realmente esistono, ma fatti i conti, ad esse non può, se mai, attribuirsi che circa $1/4$ di tutto il valore del m. t.

Maggiore insuccesso hanno avuto i tentativi di spiegare il m. t. con un effetto alla ROWLAND, di cariche elettriche sostenute sulla superficie esterna della Terra, e che insieme con questa ruotano. Anche qui, fatti i conti, si trova un disaccordo, che è ben maggiore: qualcosa come 10^{-8} del valore osservato.

Così pure, non hanno avuto successo, tentativi per spiegare l'apparente momento magnetico della Terra, con principi di altra natura, quali quello di NERNST ed ETTINGHAUSEN (incrocio di un gradiente termico con un campo magnetico); od un principio introdotto da LORENTZ in una teoria della gravitazione (secondo cui, cariche eteronime si respingono un po' meno di quanto si attirino le omonime); od ancora, estendendo alla Terra, i fenomeni di recente studio, detti giromagnetici.

Il mistero che avvolge l'origine del campo magnetico terrestre, in quanto questo sia attribuibile alla materia del sottosuolo, non dovrebbe persistere nello studio della parte di magnetismo dovuto ad azione esterna

alla Terra. Ma così non è, sebbene in tale altro caso, gli elementi in giuoco appaiano più accessibili all'osservazione, ed eventualmente all'esperienza.

I tentativi fatti per spiegare il magnetismo esterno si basano, come è già stato accennato, sull'ammissione di movimenti ionici nell'alta atmosfera (ionosfera); o su effetti dovuti all'incrocio di campi magnetico ed elettrico; od ancora a movimenti disordinati di ioni, secondo la teoria cinetica, trasformantisi in moti a spirale, per la presenza del c. m. interno. Infine, *per disperazione*, come dice un noto studioso dell'argomento, si sono fatti inutilmente tentativi, proponendo modificazioni alle classiche leggi dell'elettromagnetismo.

* * *

La precedente esposizione, per sua natura molto sommaria, è ben lungi dall'essere completa. Alla ricerca delle cause dei m. t., hanno dedicato la loro opera appassionata, fisici di tutto il mondo. Forse l'accento a qualche altra idea o risultato più o meno interessante, mi manca, poichè il consultare tutta la letteratura dell'argomento, è cosa difficile e sotto certi riguardi impossibile, specialmente in questo momento, per la difficoltà di aver sottomano le relative pubblicazioni. Ma una simile deficienza non menoma l'asserzione che oggi, una esauriente teoria del m. t., manca.

Una tale conclusione anzichè far desistere il ricercatore, può acuirne il desiderio di continuare il suo assillante lavoro, tendente alla scoperta del vero. Ciò è successo per me. E per quanto io non pretenda affatto di esser riuscito a sciogliere l'interessante enigma del m. t., mi piace accennare al contributo da me apportato, nello studio del difficile problema.

In tanta molteplicità di fatti inspiegati, di idee e teorie, di solito non logicamente collegate, tendenti a dare di quelli, una plausibile spiegazione, ho, negli ultimi anni cercato di orientarmi, tenendo presenti le particolari contingenze fisiche del nostro globo terracqueo. In base a tale esame, si può concludere che forse non tutte le possibili cause del m. t. sieno state prese in considerazione. Intendo dir ciò, soltanto in senso qualitativo; senza tener conto cioè, del valore di un eventuale campo magnetico che ciascuna di queste nuove cause da intravedere, possa originare. E tale affermazione muove dal concetto, di sgombrare l'opera del ricercatore da una preventiva superflua preoccupazione. Infatti, questa non ci deve essere, giacchè non sappiamo, fra l'altro, quale effetto possa avere il fattore *tempo* nella manifestazione di particolari effetti. Una piccola causa magnetizzante che agisce per secoli, millenni, milioni e persino centinaia di milioni di anni, quanti se ne ammettono nella valutazione dell'età della Terra, potrebbe avere avuto effetti, a priori insospettati, su corpi ferromagnetici, che per giunta sono stati sottoposti a complicati ed incogniti cicli di trasformazioni meccaniche e termiche.

Ciò posto, si rileva che nello studio in questione, le varie contingenze in cui si trova la nostra Terra, possono distinguersi in esterne ed interne.

Cominciamo a considerare quelle esterne, che a prima vista dovrebbero apparire più accessibili. Esse sono: Le radiazioni ed i corpuscoli di varia natura che dal Sole arrivano sulla Terra, o passano in vicinanza di essa; il moto di rotazione della Terra; il suo moto di traslazione. Di queste contingenze, le prime due sono state tenute, almeno in parte, presenti da vari autori, nei loro tentativi di formulazione di teorie del m. t.

Del moto di traslazione della Terra, mi pare che nessuno si sia occupato.

Che le radiazioni del Sole influenzino il m. t., è cosa indubbia. Se ne ha la prova più diretta, nelle perturbazioni giornaliere, osservabili con esatto periodo diurno, in ogni parte del globo. Ma, come è già stato accennato, il Sole, oltre a tali perturbazioni regolari, dà luogo ad altre che si chiamano burrasche magnetiche, dovute all'azione di corpuscoli viaggianti con velocità relativamente moderata. In complesso, si tratta dunque di un'azione promiscua, di onde elettromagnetiche e di corpuscoli.

Ora, per quanto concerne l'azione vera e propria della luce solare (visibile od invisibile), non si comprende come possa manifestarsi, sia pure attraverso l'effetto fotoelettrico. Per ragioni di simmetria, delle radiazioni cadenti dal Sole sulla Terra, o dei corpuscoli elettrizzati non possono dar luogo a correnti elettriche concordi, che possano aver originato il c. m. t. Soltanto se si suppone che questo campo già esista per un'altra causa, i corpuscoli elettrizzati, o quelli generati dall'effetto fotoelettrico, possono descrivere traiettorie le cui caratteristiche sono previste dalle leggi dell'elettromagnetismo.

Posto così il problema, e prescindendo da tale presumibile azione del c. m. preesistente, si può sospettare che la dissimetria necessaria alla generazione di correnti elettriche concordi da parte delle radiazioni solari possa ricercarsi nel moto della Terra intorno al Sole.

Senza addentrarmi in ulteriori spiegazioni di una possibilità di tal genere, comunico di aver realizzato un esperimento, tendente a mettere in evidenza un'eventuale azione della luce ultravioletta (come quella parte delle radiazioni solari che più presumibilmente possano essere responsabili di un'azione del tipo sospettato), su di un conduttore capace di assorbirla, posto in rapida rotazione. Il conduttore è costituito da argento depositato catodicamente, su dischi o cilindri di vetro, ruotanti alla velocità di circa 100 giri al secondo. Sull'argento è tracciata una spirale od un'elica; ed in ogni caso la sua superficie viene intensamente illuminata da potenti lampade a mercurio di quarzo. Speciali collettori dovrebbero raccogliere la corrente formantesi per l'effetto promiscuo delle radiazioni u. v. e della rotazione. Realmente ho osservato per velocità non eccessive, tali correnti,

che cambiano di segno con la rotazione. Ma a grandi velocità, l'effetto scompare. Ciò fa supporre l'esistenza di qualche causa perturbatrice, che occorrerebbe eliminare. Purtroppo non è da escludersi a priori, che alla stessa causa, si debba l'apparente successo dell'esperienza. Occorre attendere dunque la sua ripetizione in condizioni più opportune, prima di giudicarne il valore.

Con maggiore spirito di comprensione, sono poi passato, da qualche tempo, ad uno studio di altra indole. Esso si fonda sulla formulazione di una ipotesi nuova, che sotto certi riguardi può presentare qualche caratteristica di attendibilità. Il Sole, come è noto, può emettere corpuscoli di varia natura fra cui, può darsi che predominino gli elettroni. Secondo me, l'idea per cui particelle elettrizzate dei due sensi viaggino, senza riunirsi per dar luogo a corpuscoli neutri, per tutta la distanza fra Sole e Terra, va accettata con grande cautela.

La sovrabbondanza degli elettroni può essere una immediata conseguenza di certe teorie moderne, secondo cui l'energia irradiata dal Sole, risulta da trasformazioni di quella atomica. I nuclei atomici, nell'interno della massa solare, alla temperatura di una ventina di milioni di gradi, ed alla pressione di una diecina di miliardi di atmosfere, sarebbero in progressivo disfacimento, in conseguenza dei loro reciproci urti. Gli elettroni che prima formavano parte integrante degli atomi, violentemente accelerati, verrebbero così espulsi fuori dalla massa solare, insieme a ioni di idrogeno, elio, ecc. Essi possono pervenire a distanze notevoli: le dimensioni della corona solare, costituita da un miscuglio di tutte codeste particelle, è una prova di ciò. Ma si può supporre che la pura aureola elettronica sia di dimensioni assai maggiori. Gli elettroni, così vaganti intorno al Sole, sarebbero in una specie di equilibrio dinamico, fra la attrazione su di essi esercitantesi dalla massa residua del Sole carica positivamente, e gli impulsi ricevuti per l'attività solare.

Ritengo una simile concezione conforme alle vedute della fisica moderna. Ed a questo punto, avanzo l'ipotesi che l'aureola elettronica intorno al Sole possa estendersi molto al di là della corona visibile durante le eclissi: anzi, che essa arrivi ancora, con notevole densità o carica spaziale, fin presso la Terra, od ancora più lontano. Si tratta di un'ipotesi di lavoro, formulata per ora, nel solo intento di esaminare a quali conseguenze essa porterebbe, se realmente potesse verificarsi.

Secondo tale ipotesi, dunque, la Terra verrebbe così a trovarsi immersa in una nuvola elettronica, che sarebbe costretta a tagliare col suo moto di traslazione. Necessariamente, essa deve assumere una carica negativa tale, da impedirle di captare altri elettroni. Soltanto nel caso di burrasche magnetiche, questo fatto potrebbe avvenire; ed il bilancio dovrebbe ristabilirsi con un processo di difficile comprensione, ma che a noi ora non interessa.

Per prevedere quanto potrebbe avvenire in simili contingenze, supporremo dapprima la Terra ferma. Essa produrrebbe una repulsione sugli elettroni molto più efficiente, dalla parte opposta al Sole, dalla quale la carica spaziale può anche mancare del tutto. Ma realmente, la Terra è animata dai due moti di rotazione e di traslazione. La rotazione non muta la conformazione della zona perturbata. La traslazione ha per effetto un progressivo spostamento della zona, che così segue la Terra nel suo movimento lungo la eclittica.

Un osservatore sito sul polo Nord geografico della Terra, che guardi il Sole, vede fuggire gli elettroni verso la sua sinistra. Se egli guarda verso la parte opposta al Sole, il fenomeno inverso è molto più sparuto, giacchè gli elettroni, lì, sono rarefatti, per la ragione anzidetta. Conseguentemente, per tale osservatore, e perciò per la Terra intiera, gli elettroni in sovrabbondanza dal lato del Sole, debbono dar luogo alla formazione di un campo magnetico, che come è facile vedere, ha lo stesso senso di quello esistente sulla Terra.

Si deve aggiungere che la considerazione del moto di rotazione della Terra intorno al suo asse, porterebbe alla previsione di un c. m. di segno contrario, a quello corrispondente al moto di traslazione. Ma la superiorità della velocità di questo (circa 60 volte maggiore), rende quell'effetto trascurabile.

Un calcolo di orientamento può farsi, per stabilire l'ordine di grandezza della carica spaziale prossima alla Terra, necessaria per produrre un campo dell'ordine di 1 gauss, nell'interno della massa di questa. Si prescinde per semplicità, dalla circostanza per cui l'induzione magnetica in tale località, possa essere molto maggiore del campo, in conseguenza della presenza di sostanze ferromagnetiche, in condizioni fisiche e chimiche imprecisabili.

Da tale calcolo risulta un valore dell'ordine di qualche migliaio di elettroni per cmc. Esso non tiene conto della lontana presenza del Sole; la cui carica positiva tenderebbe a dare un effetto contrario, anche per considerazioni relativistiche. Si ritiene però, che un effetto del genere debba del tutto mancare.

All'ipotesi avanzata, si può fare l'obiezione di dover ammettere l'esistenza di una carica spaziale eccessiva; della cui presenza si dovrebbe avere qualche altra prova fisica. Realmente, se anche si ammettesse che la densità elettronica fosse dell'ordine di 10^4 elettr./cmc; tale valore sarebbe pur sempre inferiore a quello voluto dalla teoria della ionosfera (10^5 a 10^6 ioni cmc.). Per cui nessun effetto potrebbe avere, una simile densità, nelle trasmissioni radio.

Ma l'obiezione potrebbe molto valorizzarsi, con la considerazione della enorme carica elettronica complessiva, che si dovrebbe ammettere, come esistente, fra la Terra ed il Sole. Questa osservazione sarebbe tanto

più grave, in quanto la densità dovrebbe accrescersi, forse con legge esponenziale, man mano che ci si avvicina al Sole. Si risponde a tale quesito, rilevando che non si hanno anzitutto dati sperimentali sull'assorbimento delle radiazioni da parte di una nuvola elettronica. Soltanto se tali dati si possedessero, si potrebbe fissare un limite ammissibile di quella densità, perchè le radiazioni solari non sieno, come non lo sono, offuscate, nel propagarsi verso di noi.

Ma a parte tale considerazione, va rilevato che non è necessario stabilire una precisa interdipendenza, tra l'effetto sospettato ed ora proposto, ed il valore del campo magnetico terrestre. Questo in conseguenza di progressiva azione, nel lungo volger del tempo, potrebbe essere assai maggiore.

Seguendo un simile ordine d'idee, si può ancora rilevare che il proposto effetto possa costituire in fondo, anche la causa delle variazioni diurne. Infatti, la sospettata corrente elettronica manca nell'emisfero non illuminato dal Sole, perchè lì gli elettroni sarebbero stati respinti dalla carica della Terra.

Le ipotesi ora avanzate hanno un così suggestivo carattere, da avermi indotto a tentarne una verifica sperimentale. Nel vuoto più spinto, un filo circolare di tungsteno, del diametro di 15 cm., è concentrico e complanare con una placca cilindrica di 20 cm. di diametro. Su di un asse concentrico a tale sistema sono calettate due piccole bobine con nucleo di ferro, parallelo all'asse. Le bobine possono così ruotare alla velocità di 90 giri/sec., su di una circonferenza intermedia tra la placca ed il filamento di tungsteno. Il dispositivo, completato da accessori evidenti, può permettere dunque di far muovere le due bobine, in uno spazio riempito di atmosfera elettronica. Si sarebbe così dovuto realizzare un modello sperimentale del nostro sistema Sole-Terra, secondo l'ipotesi più sopra avanzata. Tale modello ne differirebbe però per il fatto che gli elettroni, accelerati dalla carica positiva della placca (un migliaio di volt), sarebbero in moto progressivo e non in equilibrio statistico, come si è supposto nel caso del Sole. Ma questa differenza non deve impedire la formazione del cono d'ombra elettronica, tra bobine e placca.

Si comprende ora il modo di sperimentare con un simile apparecchio. Se la carica spaziale con esso ottenibile intorno alle bobine fosse stata sufficientemente elevata, i loro nuclei avrebbero dovuto magnetizzarsi in modo apprezzabile. Ciò sarebbe stato rilevabile, per la formazione di correnti indotte nelle bobine, al momento in cui per queste, si verificava un cambiamento di velocità.

Purtroppo però la carica spaziale che io ho potuto generare in un simile apparecchio, non supera i 10^8 elettr./cmc., insufficiente per dare un sicuro effetto alla detta velocità di rotazione di 90 giri/sec. Se qualche cosa ho talvolta creduto di rilevare, si è trattato assai probabilmente di errori

di osservazione. L'apparecchio deve dunque venire laboriosamente perfezionato.

Ma mi sembra che l'insuccesso, nulla tolga alla presumibile validità delle ipotesi più sopra avanzate, nei tentativi di ricerca della causa del magnetismo terrestre.

* * *

Le due ricerche più sopra descritte, riguardano quella parte del m. t. che può dirsi causata da azioni esterne. A parte la supposizione che azioni del genere di quelle su cui le ricerche stesse si imperniano, abbiano in qualche modo originato la magnetizzazione interna della terra, si può fare qualche altra ipotesi riguardante la eventuale formazione spontanea di tale magnetizzazione. Si pensa con ciò, che il fatto possa essere stato originato da una causa del tutto interna.

Per andare in cerca di una simile spiegazione, è più semplice appoggiarsi all'ipotesi che il fenomeno magnetico si sia manifestato nell'evoluzione della Terra, in quelle parti della massa terrestre contenenti materiali ferromagnetici, che sieno pervenuti nel raffreddamento, ad una temperatura inferiore al punto di Curie. Come si è già detto, si deve ritenere che ciò avvenga nello spessore della crosta terrestre, dell'ordine di qualche decina di km.

Nelle sconosciute, ma solo presumibili fasi di quella evoluzione, le rocce della crosta terrestre debbono aver subito trasformazioni imponenti, di carattere termico e meccanico. Mentre esse furono agitate violentemente in conseguenza dell'assestamento oggi assunto dalla crosta terrestre, si sono andate altresì progressivamente raffreddando. Processi difficilmente precisabili, di magnetizzazione spontanea, di magnetostrizione ed effetti giromagnetici possono essersi, in conseguenza, manifestati. Simili processi debbono essere stati particolarmente imponenti a temperature convenientemente più basse del punto di Curie, al quale la magnetizzazione spontanea può incominciare a manifestarsi. In conseguenza di tutto ciò, il materiale ferromagnetico in parola può aver assunto magnetizzazione abbastanza stabile, sì da resistere all'enorme successivo volger del tempo.

La stabilità del magnetismo delle rocce ferromagnetiche può venire validamente confermata da quello residuo, conservato sia da particolari sostanze ferromagnetiche, come la magnetite, sia da rocce ignee come lave o fossili magnetici; sia ancora dalle terre cotte studiate dal FOLGHERAITER. In tutti questi casi però potrebbe trattarsi di magnetismo indotto sul materiale citato, dal preesistente magnetismo terrestre.

Particolari contingenze dinamiche e termiche possono aver favorito o determinato il senso della magnetizzazione spontanea, il cui residuo, noi oggi, dopo millenni o milioni di anni o periodi ancora più lunghi, possiamo constatare. Il processo in parola che qui si sospetta, se vero, dev'essere stato determinato da caratteristiche di simmetria atte a favorire il senso

della magnetizzazione. Fra tali caratteristiche, quella che più presumibilmente può avere agito, è il senso di rotazione della terra intorno al suo asse, con velocità eventualmente assai diversa dall'attuale. È anche da pensare che reciproci scorrimenti fra vari strati o parti della Terra (analogamente a quanto avviene, sia pure in condizioni di temperatura molto più elevate, nel Sole) possano aver contribuito a stabilire il senso della magnetizzazione terrestre. Seguendo questo terzo ordine d'idee, ho ancora iniziato ricerche sperimentali, saggiando materiale ferromagnetico (ferro od acciaio) posto in rapida rotazione e soggetto a contemporanee variazioni termiche, tra il punto di Curie e la temperatura ambiente. Esperienze di tal genere si differenziano da quelle giromagnetiche di BARNETT, per l'azione termica, che qui viene introdotta. Esse sono particolarmente difficili per i detti materiali, ferro ed acciaio, che presentano grande suscettività e piccola forza coercitiva.

Ma qualcosa che presenta caratteri di relativamente maggior sicurezza sperimentale, ho potuto rilevare, sperimentando con campioni di magnetite. Questa sostanza, come è noto, caratterizzata da notevolissima forza coercitiva, è capace di conservare assai bene il magnetismo in essa indotto nel periodo di raffreddamento. Disgraziatamente essa, per le sue caratteristiche meccaniche, e la mancanza di resistenza a replicati riscaldamento, si presta male a prove numerose e facili.

Se errori sperimentali, sinora non controllati non sono intervenuti, sembra che la magnetite, posta rapidamente in rotazione e lasciata raffreddare, mentre la sua velocità va progressivamente decrescendo, assuma una magnetizzazione, sia pur debolissima, che è dello stesso segno di quella terrestre. Ma tutto ciò merita ulteriore laboriosa conferma sperimentale.

* * *

Ho condotto queste ricerche guidato dalla suggestione dell'importante problema. Non so se l'ulteriore loro sviluppo mi porterà sicuramente a risultati più conclusivi. Comunque, sono stato lieto di indicare vie di ricerca sperimentale, che non mi risulta siano state in precedenza da altri battute.

Mentre questo mio modesto lavoro si aggiunge a quello di numerosissimi altri sperimentatori di tutto il mondo, non posso dire che il problema delle cause del magnetismo terrestre si avvii finalmente alla sua risoluzione.

E se lo sperimentatore dovesse continuare a lavorare inutilmente in tale campo, può darsi che egli sia costretto a ricercare fuori della Terra, le cause del magnetismo terrestre. In ciò, egli può essere indotto, dalla considerazione del fatto che il Sole possiede una magnetizzazione dello stesso senso di quella della Terra, quantunque cinquanta volte più intensa. Il fatto, come è noto, fu scoperto da HALE nel 1908, servendosi dell'osservazione dell'effetto Zeeman.

Può dunque pensarsi, con sommario criterio analogico, che la causa del magnetismo terrestre e di quello solare possa essere la stessa. In tale sospetto si può essere indotti, anche perchè è inammissibile che il primo di questi due stati magnetici sia una conseguenza del secondo. Infatti, per le comuni leggi dell'elettromagnetismo, nessuna sensibile influenza può avere la forza magnetica del Sole sulla Terra, in causa dell'enorme distanza (150.000.000 di km.). E se mai, il magnetismo indotto sulla Terra dal Sole dovrebbe avere segno contrario e non concorde.

In conseguenza, si potrebbe ammettere che negli spazi celesti esista un campo magnetico dominante unico, che imponga il segno di magnetizzazione a tutti gli astri. Secondo simile concezione, anche la Luna e gli altri pianeti dovrebbero presentare polarità magnetiche concordi con Terra e Sole. Per tali astri, che non sono dotati di luce propria, appare difficile od impossibile la verifica del fatto, dalla superficie della Terra, non potendosi su di essi osservare l'effetto Zeeman. Generalizzando una simile considerazione, si può essere anche tentati di affermare la possibilità, secondo cui in avvenire si potrà osservare la magnetizzazione delle stelle fisse. In ciò si potrebbe essere guidati da delicatissimi studi spettroscopici, per quanto non sia da attendersi formidabile aumento nel potere risolutivo degli strumenti astronomici.

Ma tutto ciò si è affermato, prescindendo da una difficoltà di principio. Infatti, come già si è rilevato, può essere presumibile che alla temperatura degli astri dotati di luce propria, non possa più esistere alcun corpo dotato di proprietà ferromagnetiche; a meno che le enormi pressioni esistenti negli astri stessi, non mutino quella legge.

A parte tale dubbio, sarebbe interessante essere informati delle caratteristiche magnetiche degli spazi celesti. Evidentemente un tale desiderio non potrebbe venir soddisfatto, che quando l'uomo potrà riuscire a staccarsi dalla Terra, ed a navigare in quelli spazi. Ma anche se tale sogno di un lontano avvenire potrà realizzarsi (il che non è assurdo credere, se il progresso della tecnica seguirà incalzante e sicuro come è avvenuto negli ultimi tempi), il mistero della causa ultima del magnetismo terrestre perdurerà. Infatti, rimarrebbe allora a comprendere il perchè di questa magnetizzazione non solo terrestre, ma universale!

E termino questo mio discorso, per la cui lunghezza chiedo venia, ricordando, a proposito della precedente scettica battuta, un monito del Duce: Egli assistendo in Bologna nel 1925, all'inaugurazione della Riunione annuale della Società italiana per il Progresso delle Scienze, rivolgendosi ai convenuti così si esprese: « Signori Scienziati! Ricordatevi che quando con tutte le vostre forze vi sarete affannati a scrutare i segreti della natura, Vi dovrete ad un certo punto fermare: perchè Vi incontrerete con Dio! ».

Matematica (Geometria). — *Sulle calotte del 2° ordine appartenenti a una data striscia.* Nota di PIERO BUZANO, presentata ⁽¹⁾ da ENRICO BOMPIANI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

In una Nota sulle *Caratteristiche semplici di un'equazione a derivate parziali in due variabili* ⁽²⁾ G. SANNIA dimostra il seguente teorema: « *Il birapporto delle curvatures normali delle sezioni di 4 superficie integrali uscenti da una stessa caratteristica, fatte con piani paralleli a un piano fisso, è costante lungo tutta la caratteristica* ».

In una Nota successiva ⁽³⁾ il risultato viene messo in relazione con un noto teorema di DARBOUX ⁽⁴⁾ secondo cui *il birapporto dei piani tangenti di 4 superficie di una congruenza di curve che passano per una medesima curva della congruenza è costante lungo tale curva*.

Ora, mentre è chiaro il significato proiettivo del teorema di DARBOUX, quello di SANNIA sembra celare sotto un linguaggio metrico una relazione proiettiva fra le calotte del 2° ordine appartenenti a superficie integrali passanti per una stessa caratteristica: allo stato attuale della teoria degli elementi curvilinei e superficiali, tenuto conto delle più recenti ricerche de BOMPIANI sull'argomento ⁽⁵⁾, tale relazione può essere più facilmente avvertita di quanto non fosse possibile all'epoca a cui risalgono le note suddette. Col presente lavoro ci proponiamo di metterla in luce. A tale scopo, lasciando per ora da parte le striscie caratteristiche di un'equazione a derivate parziali e le relative superficie integrali, premetteremo alcune considerazioni sulle calotte del 2° ordine appartenenti a una data striscia.

Consideriamo una *striscia*, ossia un sistema ∞^1 di elementi del 1° ordine costituiti ciascuno da una coppia punto-piano (*centro e faccia*)

⁽¹⁾ Nell'Adunanza del 20 febbraio 1942-XX.

⁽²⁾ « C. R. », t. 155, pag. 636 (1912).

⁽³⁾ « C. R. » t. 156, pag. 605 (1913).

⁽⁴⁾ *Leçons sur la théorie générale des surfaces.* (Paris, Gauthier-Villars, 1889), t. II, pag. 3.

⁽⁵⁾ *Invarianti proiettivi di calotte.* « Rend. Acc. d'Italia », ser. VII, vol. II, pagg. 888-895 (1941). *Invarianti proiettivi e topologici di calotte di superficie e di ipersuperficie tangenti in un punto.* « Rend. di Mat. e delle sue appl. », ser. V, vol. II, pagg. 261-291 (1941).

appartenentisi e tali che: ciascuna faccia contenga la retta che unisce il suo centro al centro infinitamente vicino, ovvero ciascun centro appartenga alla retta intersezione della sua faccia con la faccia infinitamente vicina (le due condizioni sono una conseguenza dell'altra essendo la nozione di striscia autoduale ⁽¹⁾). Le due rette sono rispettivamente la tangente alla curva luogo dei centri e la generatrice della sviluppabile luogo delle facce. Supporremo che le due rette (dette anche *tangenti coniugate*) siano generalmente distinte, escludendo quindi le *striscie asintotiche* ⁽²⁾.

Fissato un sistema di coordinate cartesiane non omogenee x, y, z e rappresentata in esso la curva luogo dei centri con le equazioni:

$$[1] \quad y = y(x) \quad , \quad z = z(x) ,$$

le facce si rappresenteranno con equazioni (nelle coordinate correnti $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$) del tipo:

$$[2] \quad \bar{z} - z(x) = p(x) [\bar{x} - x] + q(x) [\bar{y} - y(x)] .$$

Dare la sviluppabile delle facce equivale a dare le funzioni $p(x)$, $q(x)$, che però non si potranno assegnare ad arbitrio dovendo ciascun piano [2] contenere la corrispondente tangente alla curva [1] ossia dovendo aversi ⁽³⁾:

$$z' = p + qy'$$

per cui data ad arbitrio la funzione $q(x)$, la $p(x)$ resta determinata dalla condizione:

$$[3] \quad p = z' - qy' .$$

Supposta verificata la [3], se si vuole che la striscia così definita non sia una striscia asintotica, vale a dire che il piano [2] non sia il piano osculatore alla curva [1] si deve avere (come subito si verifica tenuto conto di [3]):

$$[4] \quad z'' - qy'' \neq 0 .$$

Se si considera poi una superficie:

$$[5] \quad z = f(x, y)$$

⁽¹⁾ Cfr. P. BUZANO, *Interpretazione geometrica delle caratteristiche di un'equazione a derivate parziali del 1° ordine*. « Rend. Acc. d'It. », ser. VII, vol. III, fasc. 9 (1941).

⁽²⁾ Cfr. W. BLASCHKE, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*. (Berlin, Springer, 1930), I, 3 Kap., § 35.

⁽³⁾ Qui e in seguito indichiamo con apici le derivazioni totali rispetto a x .

passante per la curva [1] e quindi tale da aversi:

$$z' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'$$

e se si assume come piano [2] il piano tangente alla superficie ponendo:

$$[6] \quad p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y},$$

allora la [3] è verificata e la striscia è costituita dai punti di una curva della superficie in esame e dai relativi piani tangenti. Posto poi:

$$[7] \quad r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

si consideri la calotta del 2° ordine (x, y, z, p, q, r, s, t) avente il centro sulla curva [1]: diremo che tale calotta *appartiene* alla striscia considerata.

Da [7] e [6], considerando x e y come variabili indipendenti si ha:

$$dp = rdx + sdy, \quad dq = sdx + tdy$$

e quindi nei punti della curva [1]:

$$r = p' - sy', \quad s = q' - ty',$$

ma derivando totalmente la [3] rispetto a x si ha:

$$p' = z'' - qy'' - q'y'$$

e quindi in definitiva:

$$[8] \quad \begin{cases} r = (z'' - qy'' - 2q'y') + ty'^2 \\ s = q' - ty'. \end{cases}$$

L'involuzione di tangenti coniugate in un punto della superficie [5] è data dall'equazione:

$$r\delta x \delta x + s(\delta x \delta y + \delta y \delta x) + t\delta y \delta y = 0,$$

la quale se il punto appartiene alla curva [1], tenuto conto delle [8], diventa:

$$[9] \quad \frac{\delta y}{\delta x} = - \frac{(z'' - qy'' - 2q'y' + ty'^2) + (q' - ty') \frac{dy}{dx}}{(q' - ty') + t \frac{dy}{dx}}.$$

La [9], posto $\frac{dy}{dx} = y'$ dà la tangente coniugata alla tangente della curva [1]; indicando con m il valore assunto in tal caso da $\frac{\delta y}{\delta x}$, si ha:

$$[10] \quad m = \frac{qy'' - z''}{q'} + y'.$$

La [10] conferma che, avendo escluso con la [4] le striscie asintotiche, è certo $m \neq y'$. Le rette autoconiugate nell'involuzione [9] ossia le *tangenti principali* della calotta, per le quali $\frac{dy}{dx} = \frac{\delta y}{\delta x} = \mu$ sono date dall'equazione:

$$[11] \quad t\mu^2 + 2(q' - ty')\mu + (z'' - qy'' - 2q'y' + ty'^2) = 0$$

il cui discriminante cambiato di segno è:

$$[12] \quad rt - s^2 = t(z'' - qy'') - q'^2.$$

A questo punto si può proseguire lo studio prescindendo dalle [5], [6], [7] e considerando le [8], [9], [10], [11], [12], come definenti il sistema di tutte le calotte del 2° ordine appartenenti a una data striscia rappresentata dalle [1], [2], [3], [4]. Per dare una calotta del 2° ordine in un punto della striscia occorre dare, oltre all'elemento del 1° ordine col centro in quel punto, anche le quantità r, s, t legate dalle [8]: cosicchè, data ad arbitrio una funzione $t(x)$, le [8] definiscono per ciascun punto della striscia una corrispondente calotta del 2° ordine i cui elementi geometrici sono dati dalle [9], [10], [11], [12]. Perciò il sistema di tutte le calotte del 2° ordine appartenenti a una data striscia dipende da una funzione arbitraria $t(x)$.

Poichè le [8] esprimono r, s linearmente mediante t , possiamo anche dire che le calotte del 2° ordine appartenenti a una striscia e aventi dato centro formano fascio. I fasci di calotte tangenti sono stati per la prima volta considerati dal BOMPIANI nei lavori citati. Ivi le calotte del 2° ordine aventi centro e piano tangente assegnato si rappresentano sui punti (x_1, x_2, x_3, x_4) di uno spazio proiettivo, assumendo $x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 1 : r : s : t$. In tale spazio è fissato un « assoluto » costituito da un cono quadrico T e da un piano ω non passante per il vertice di T : i punti di T rappresentano le calotte *paraboliche* per cui $rt - s^2 = 0$ e i punti di ω rappresentano le calotte *coniche* per cui $rt - s^2 = \infty$ ($x_4 = 0$). Una retta dello spazio rappresentativo è l'immagine di un fascio di calotte che nel caso più generale può definirsi come insieme di calotte tali che l'intersezione di due qualunque di esse abbia sempre la stessa coppia di tangenti nodali. Il fascio che si presenta in questo lavoro è di tipo *particolare* poichè contiene una sola calotta parabolica (come si vede dalla [12]) ed è quindi

rappresentato da una retta *tangente* al cono T . La calotta conica e la calotta parabolica del fascio corrispondono a valori di t che per la [12] risultano essere rispettivamente:

$$[13] \quad t_{\infty} = \infty, \quad t_0 = \frac{q'^2}{z'' - qy''}.$$

Consideriamo ora 4 calotte (r_i, s_i, t_i) ($i = 1, 2, 3, 4$) appartenenti alla striscia e aventi lo stesso centro: chiameremo *birapporto* delle 4 calotte il birapporto dei corrispondenti 4 punti rappresentativi (allineati). È manifesto che tale birapporto è un invariante proiettivo di contatto delle 4 calotte ed è uguale al birapporto delle corrispondenti 4 coppie di tangenti principali (appartenenti a un'involuzione). Tenuto conto della [11] e delle [8], il valore di tale birapporto è dato da:

$$[14] \quad (t_1, t_2, t_3, t_4) = (s_1, s_2, s_3, s_4) = (r_1, r_2, r_3, r_4).$$

Confrontando tale espressione con quella data da SANNIA per il già citato birapporto si riconosce che il birapporto di SANNIA coincide con quello ora definito: ne rimane di conseguenza chiarito il significato proiettivo.

A complemento del risultato raggiunto possiamo cercare, partendo dalle [14], un'espressione metrica del nostro invariante. Supposto di riferirci a coordinate cartesiane *ortogonali* e pensando le calotte in esame definite attraverso equazioni del tipo [5], [6], [7], ossia come appartenenti a determinate superficie, dette K_1, K_2, K_3, K_4 le curvature totali di quelle superficie nel punto considerato, si ha immediatamente per la [12] ⁽¹⁾:

$$[15] \quad (t_1, t_2, t_3, t_4) = (K_1, K_2, K_3, K_4).$$

La [15] fornisce già un significato metrico del nostro invariante. Per giungere invece a quello di SANNIA consideriamo una tangente comune alle 4 calotte, avente i coseni direttori $\alpha, \beta, \gamma = \alpha p + \beta q$ e osserviamo che le curvature delle 4 sezioni normali delle 4 calotte fatte con un piano passante per quella tangente, sono date da:

$$\frac{1}{R_i} = \frac{r_i \alpha^2 + 2s_i \alpha \beta + t_i \beta^2}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

ossia tenuto conto di [3] e [8]

$$[16] \quad \frac{1}{R_i} = \frac{[(z'' - qy'' - 2q'y')\alpha^2 + 2q'\alpha\beta] + t_i(y'\alpha - \beta)^2}{\sqrt{(1 + z'^2) - 2q'z' + q^2(1 + y'^2)}} \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

⁽¹⁾ Bisogna tener conto del fatto che nel punto considerato le 4 superficie si toccano e quindi p, q , hanno lo stesso valore nelle 4 espressioni delle curvature totali.

Da [16] si ha subito:

$$[17] \quad (t_1, t_2, t_3, t_4) = \left(\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}, \frac{1}{R_3}, \frac{1}{R_4} \right).$$

Risulta dalla [17] che il birapporto delle 4 calotte è uguale al birapporto delle curvature delle loro sezioni normali fatte con uno stesso piano. Tale è appunto il significato metrico che interviene nel lavoro di SANNIA. Alle sezioni normali si possono tuttavia sostituire sezioni qualunque (fatte sempre con un medesimo piano), tenuto presente che le curvature di queste (per il teorema di MEUSNIER) differiscono dalle corrispondenti curvature normali per uno stesso fattore che non altera il birapporto suddetto. Infine si possono sostituire alle 4 sezioni piane 4 curve qualunque giacenti rispettivamente sulle 4 calotte e aventi in comune (oltre al centro delle calotte e alla tangente) il piano osculatore.

Supposte date le 4 funzioni $t_1(x)$, $t_2(x)$, $t_3(x)$, $t_4(x)$ e determinate le corrispondenti r_i , s_i in base alle [8], resta determinato il birapporto [14] come funzione di x , variabile quindi in generale al variare del centro comune alle 4 calotte. Ci si può chiedere qual'è la condizione perchè tale birapporto resti *costante* lungo tutta la curva [1]; annullando la sua derivata logaritmica si perviene ad una condizione che si riconosce essere equivalente alla seguente:

$$[18] \quad \begin{vmatrix} t'_1 & t_1^2 & t_1 & 1 \\ t'_2 & t_2^2 & t_2 & 1 \\ t'_3 & t_3^2 & t_3 & 1 \\ t'_4 & t_4^2 & t_4 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

ciò equivale a dire che le 4 funzioni $t_i(x)$ sono integrali di una stessa equazione del tipo di RICCATI:

$$[19] \quad t' = At^2 + Bt + C.$$

Tale è appunto il caso delle calotte di superficie integrali appartenenti a una striscia caratteristica, che si presenta nel citato lavoro di SANNIA.

Si può anche dire che l'equazione [19] definisce una legge proiettiva di trasporto delle calotte del 2° ordine lungo la striscia considerata; il caso considerato dal SANNIA non è che un particolare esempio.

Ritenendo con ciò chiarito il significato proiettivo delle affermazioni del SANNIA passiamo a considerare un caso particolare in cui il precedente birapporto si riduce al noto *invariante* di MEHMKE per due calotte del 2° ordine fra loro tangenti. Supponiamo che le calotte (r_3, s_3, t_3) e (r_4, s_4, t_4) siano rispettivamente la calotta conica e quella parabolica del fascio,

tali cioè da avere $t_3 = t_\infty$, $t_4 = t_0$ e allora il birapporto delle 4 calotte diventa:

$$[20] \quad (t_1, t_2, t_\infty, t_0) = (K_1, K_2, \infty, 0) = \frac{K_2}{K_1}$$

ossia coincide con l'invariante di MEHMKE delle calotte (r_1, s_1, t_1) e (r_2, s_2, t_2) . Ne deriva un significato proiettivo che rientra come caso particolare in quello da noi dato per l'analogo invariante relativo a due ipersuperficie di S_n fra loro tangenti ⁽¹⁾. Nella rappresentazione del BOMPIANI le due calotte hanno per immagini due punti la cui congiungente è tangente al cono T : l'unico invariante proiettivo delle due calotte si presenta allora nel modo più spontaneo come birapporto dei due punti rappresentativi e di quelli ove la loro congiungente tocca T e sega ω . Può infine interessare la seguente altra proprietà ⁽²⁾: *l'invariante di MEHMKE per due calotte aventi lo stesso centro O , tangenti lungo una curva C uscente da O , coincide con l'invariante di MEHMKE delle loro sezioni fatte con un piano qualunque per la tangente coniugata alla tangente di C in O* . Per vederlo indichiamo con φ l'angolo che la tangente a C in O forma con la tangente coniugata e con ψ l'angolo che il piano delle sezioni forma col piano tangente alle due calotte in O . Dette poi $\frac{1}{\rho_1}$, $\frac{1}{\rho_2}$ le curvature delle due sezioni in O e dette $\frac{1}{R_1}$ e $\frac{1}{R_2}$, $\frac{1}{R_2}$ le curvature delle sezioni normali fatte con piani per la tangente a C e per la tangente coniugata, si ha per il teorema di MEUSNIER:

$$[21] \quad \frac{1}{R_1} = \frac{\text{sen } \psi}{\rho_1} \quad , \quad \frac{1}{R_2} = \frac{\text{sen } \psi}{\rho_2} \quad ,$$

e per un teorema di APOLLONIO applicato alle coniche di DUPIN delle due calotte:

$$[22] \quad \frac{1}{\sqrt{K_1}} = \sqrt{R_1} \sqrt{R_2} \text{sen } \varphi \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{K_2}} = \sqrt{R_1} \sqrt{R_2} \text{sen } \varphi.$$

Da [22] segue:

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{R_1}{R_2}$$

⁽¹⁾ Interpretazione proiettiva dell'invariante di Mehmke. « Boll. U. M. I. », fasc. 4 (1936).

⁽²⁾ Analoga in certo senso a quella data dal BOMPIANI per due calotte tangenti aventi le stesse tangenti asintotiche: cfr. : *Determinazioni proiettivo-differenziali relative ad una superficie dello spazio ordinario*. « Atti. R. Acc. Torino », vol. 59, (1924), pagg. 409-429.

e quindi per [21]

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad c. d. d.$$

Attraverso la [20] si possono caratterizzare le coppie di calotte per cui l'invariante di MEHMKE rimane *costante* al variare del centro lungo la curva [1]. Deve essere, tenuto conto di [13]:

$$\frac{t_2 - t_0}{t_1 - t_0} = c \text{ (costante)}$$

ossia:

$$t_2(x) = c t_1(x) + (1 - c) \frac{q'^2}{x' - qy''};$$

data $t_1(x)$ questa relazione determina $t_2(x)$ in termini finiti.

Matematica. — *Ricerche asintotiche per una classe di sistemi di equazioni differenziali ordinarie non lineari* ⁽¹⁾.
Nota di RENATO CACCIOPPOLI e ALDO GHIZZETTI, presentata ⁽²⁾ da MAURO PICONE, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

In una ricerca proposta all'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo, interessante un impianto idroelettrico, si è presentato un sistema di equazioni differenziali del 2° ordine non lineari per il quale sono stati compiuti nell'Istituto taluni studi concernenti la stabilità e la periodicità delle soluzioni. Occorreva anche un'indagine analitica che consentisse l'ottenimento di criteri generali atti ad assicurare, anche senza calcolo, la stabilità e l'eventuale periodicità delle soluzioni, nonché una delimitazione delle ampiezze delle oscillazioni di queste, per sistemi di equazioni differenziali del tipo considerato.

Ho affidato tali indagini al prof. RENATO CACCIOPPOLI che è riuscito a conseguire i sopradetti criteri e delimitazioni estendendo opportunamente il metodo già da lui seguito in una precedente ricerca per l'Istituto e che è stato esposto nella Nota dal titolo: *Ricerche asintotiche per una particolare equazione differenziale non lineare* da me presentata all'Accademia nella seduta del 16 gennaio scorso ⁽³⁾.

L'analisi del CACCIOPPOLI rivolta ad un'estesa classe di sistemi di equazioni differenziali lineari ordinarie, alla quale appartiene, come particolarissimo caso, il sistema sopradetto, è stata rielaborata dal prof. ALDO GHIZZETTI (consulente ordinario presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo) al quale è dovuta altresì la redazione della presente Nota.

MAURO PICONE.

1. La nozione di *contrazione* introdotta al n. 1 di $[N]$ ⁽⁴⁾, nel caso del piano, si estende immediatamente a quello di uno spazio S_n ad un numero qualunque n di dimensioni. E con dimostrazione identica a quella ivi riportata si prova che, se la trasformazione

$$\mathcal{T}) \quad x_i^* = x_i^*(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

⁽²⁾ Nell'Adunanza del 20 febbraio 1942-XX.

⁽³⁾ Questi « Rendiconti », Adunanza del 16 gennaio 1942-XX.

⁽⁴⁾ Con $[N]$ indichiamo il nostro precedente lavoro: *Ricerche asintotiche per una particolare equazione differenziale non lineare*.

differenziabile con continuità, dello spazio S_n in sè stesso, è una contrazione, allora, detto P_0 un punto qualsiasi dello spazio e considerata la successione P_0, P_1, P_2, \dots delle sue immagini iterate in \mathfrak{T} , due soli casi sono possibili:

1) o nessuno degli insiemi (P_0, P_1, P_2, \dots) è limitato, ed allora \mathfrak{T} non ammette punti uniti;

2) o tali insiemi sono tutti limitati, ed allora \mathfrak{T} ammette un solo punto unito verso cui convergono tutte le successioni di immagini iterate ⁽¹⁾.

Per includere un caso d'eccezione, abbiamo potuto ammettere in $[N]$ che la proprietà caratteristica di \mathfrak{T} venga a mancare in un punto unito; un risultato più completo si ottiene introducendo, accanto alle contrazioni già definite (che chiameremo *contrazioni in senso stretto*), delle *contrazioni in senso largo*, in base alla condizione che soltanto per due lunghezze finite corrispondenti l, l^* (lunghezze di due archi di curva corrispondenti) si abbia sempre $\frac{l^*}{l} < 1$; in tal caso, per gli elementi lineari corrispondenti, si ha solo $\frac{ds^*}{ds} \leq 1$.

Per queste contrazioni in senso largo, sostituiremo alla precedente proposizione la seguente: *se una contrazione in senso largo ammette un punto unito, esso è unico ed è limite di tutte le successioni di immagini iterate*. Infatti, se M è il punto unito (evidentemente unico) e P_0 è un punto qualunque, la successione $\overline{MP}_0, \overline{MP}_1, \overline{MP}_2, \dots$ tende decrescendo ad un limite $\lambda \geq 0$. Ed è certamente $\lambda = 0$, chè altrimenti, sull'ipersfera di centro M e raggio λ , esisterebbe almeno un punto Q avente il corrispondente Q^* sull'ipersfera stessa, donde l'assurdo $\overline{MQ} = \overline{MQ}^*$.

I precedenti risultati valgono ancora se, assegnata una forma quadratica $\sum_{i,k} a_{ik} \xi_i \xi_k$ definita positiva, si assume come distanza di due punti $P(x_1, \dots, x_n), Q(y_1, \dots, y_n)$ di S_n l'espressione

$$\overline{PQ} = \sqrt{\sum_{i,k} a_{ik} (x_i - y_i)(x_k - y_k)},$$

e si pone come definizione di contrazione in senso stretto quella di trasformazione tale che, per due elementi lineari corrispondenti qualunque, risulti sempre

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{\sqrt{\sum_{i,k} a_{ik} dx_i^* dx_k^*}}{\sqrt{\sum_{i,k} a_{ik} dx_i dx_k}} < 1,$$

e analogamente per le contrazioni in senso largo.

⁽¹⁾ Che possa effettivamente presentarsi il primo caso, lo prova il seguente semplice esempio di contrazione sulla retta:

$$x^* = 1 + x - \tanh x.$$

Basta infatti introdurre in S_n un opportuno sistema di coordinate oblique.

2. Consideriamo ora il seguente sistema di n equazioni differenziali del 2° ordine nelle n funzioni incognite u_1, u_2, \dots, u_n della variabile indipendente t :

$$[1] \quad \mu_i \frac{d^2 u_i}{dt^2} + \sum_1^n A_{ik} u_k + \varphi_i \left(\frac{du_1}{dt}, \dots, \frac{du_n}{dt} \right) = f_i(t), \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

facendo le seguenti ipotesi:

1) le μ_i sono costanti positive;

2) le A_{ik} sono costanti che godono della proprietà di simmetria

$A_{ik} = A_{ki}$, e sono tali che la forma quadratica $\sum_1^n A_{ik} \xi_i \xi_k$ è definita positiva;

3) le $\varphi_i(u'_1, \dots, u'_n)$ sono funzioni definite in tutto lo spazio (u'_1, \dots, u'_n) ed ivi dotate di derivate parziali del 1° ordine continue;

4) le $f_i(t)$ sono funzioni continue e periodiche con un comune periodo ω .

Posto $\frac{\partial \varphi_i}{\partial u'_k} = \varphi_{ik}(u'_1, \dots, u'_n)$, sussiste per i sistemi del tipo [1] il seguente:

TEOREMA I. — Se per tutti i valori di u'_1, \dots, u'_n la forma quadratica $\sum_1^n A_{ik} \varphi_{ik}(u'_1, \dots, u'_n) \xi_i \xi_k$ ⁽¹⁾ risulta definita positiva, allora due soli casi sono possibili:

1) o nessuno degli integrali del sistema [1] è stabile;

2) oppure tutti gli integrali sono stabili; il sistema [1] ammette allora uno e un solo integrale periodico, di periodo ω , a cui tutti gli altri sono asintotici per $t \rightarrow \infty$ ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Questa forma quadratica non è scritta in forma simmetrica, perchè non si suppone $\varphi_{ik} = \varphi_{ki}$.

⁽²⁾ Come in [N], dire che un integrale $[u_1(t), \dots, u_n(t)]$ di [1] è stabile significa che le funzioni $u_1(t), \dots, u_n(t); u'_1(t), \dots, u'_n(t)$ si conservano limitate per $t \rightarrow \infty$, e dire che due integrali $[u_1(t), \dots, u_n(t)], [v_1(t), \dots, v_n(t)]$ sono fra loro asintotici per $t \rightarrow \infty$ significa che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [u_i(t) - v_i(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} [u'_i(t) - v'_i(t)] = 0, \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Il primo caso previsto dal teorema è effettivamente possibile come prova l'esempio:

$$u'' + u + \varphi(u') = \sin t, \quad \left(\frac{d\varphi}{du'} > 0, \quad |\varphi| \leq L < \frac{\pi}{4} \right)$$

già studiato in [N], n. 2.

Dim. — Fissato comunque un punto $t = a$, consideriamo un qualsiasi integrale $[u_1(t), \dots, u_n(t)]$ di [1], individuato dalle condizioni iniziali

$$[2] \quad u_i(a) = x_i, \quad u'_i(a) = y_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

e supponiamo che, comunque si scelgano le x_i, y_i , tale integrale esista finito in tutto l'intervallo $(a, +\infty)$ ⁽¹⁾. Detto poi h un arbitrario numero positivo, poniamo, per il considerato integrale

$$[2'] \quad u_i(a+h) = x_i^*, \quad u'_i(a+h) = y_i^*, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Evidentemente le x_i^*, y_i^* sono funzioni differenziabili con continuità delle x_i, y_i , e noi possiamo interpretare la corrispondenza fra le x_i, y_i e le x_i^*, y_i^* come una trasformazione $\mathcal{T}_{a,h}$ nello spazio S_{2n} .

Osserviamo ora che, per le ipotesi fatte sul sistema [1], la forma quadratica

$$\Delta(\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n) \equiv \sum_1^n \mu_i \eta_i^2 + \sum_{i,k} A_{ik} \xi_i \xi_k$$

è definita positiva. Vogliamo dimostrare che, se nello spazio S_{2n} si assume come distanza di due punti $P(x_1^{(1)}, \dots, y_n^{(1)}), Q(x_1^{(2)}, \dots, y_n^{(2)})$ l'espressione

$$\overline{PQ} = \sqrt{\Delta(x_1^{(1)} - x_1^{(2)}, \dots, x_n^{(1)} - x_n^{(2)}, y_1^{(1)} - y_1^{(2)}, \dots, y_n^{(1)} - y_n^{(2)})},$$

allora la trasformazione $\mathcal{T}_{a,h}$ risulta essere una contrazione in senso stretto.

Infatti, per delle variazioni $\delta x_i, \delta y_i$ dei valori iniziali [2], si hanno nell'integrale considerato delle variazioni δu_i , non tutte identicamente nulle in $(a, a+h)$, che verificano il sistema di equazioni

$$[3] \quad \mu_i \delta u_i'' + \sum_1^n A_{ik} \delta u_k + \sum_1^n \varphi_{ik} \delta u_k' = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

dalle quali, moltiplicando per $\delta u_i'$ e sommando rispetto all'indice i , si trae

$$[4] \quad \frac{d}{dt} \left[\sum_1^n \mu_i (\delta u_i')^2 + \sum_{i,k} A_{ik} \delta u_i \delta u_k \right] = -2 \sum_{i,k} \varphi_{ik} \delta u_i' \delta u_k'.$$

Per l'ipotesi fatta, il secondo membro è non positivo. Inoltre esso non può essere identicamente nullo in $(a, a+h)$ perchè, se fosse tale, dovrebbe necessariamente essere $\delta u_i' \equiv 0$ e quindi, per le [3], $\sum_1^n A_{ik} \delta u_k \equiv 0$ vale a dire $\delta u_i \equiv 0$.

⁽¹⁾ Su questo punto ritorneremo al n. 3.

Dalla [4] segue allora che la funzione

$$[5] \quad \sum_1^n \mu_i (\delta u_i')^2 + \sum_1^n A_{ik} \delta u_i \delta u_k$$

è decrescente in $(a, a + h)$; si ha quindi

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{\sqrt{\sum_1^n \mu_i (\delta y_i^*)^2 + \sum_1^n A_{ik} \delta x_i^* \delta x_k^*}}{\sqrt{\sum_1^n \mu_i (\delta y_i)^2 + \sum_1^n A_{ik} \delta x_i \delta x_k}} < 1$$

e ciò prova che $\mathcal{C}_{a,h}$ è una contrazione in senso stretto.

Dopo ciò, con un ragionamento del tutto analogo a quello fatto in [N], n. 2, si arriva alla dimostrazione del teorema.

Convieni ora osservare che la deduzione, dalla [4], del fatto che la funzione [5] è decrescente in $(a, a + h)$ rimane manifestamente valida anche se si suppone soltanto che, per tutti i valori di u_1, \dots, u_n , la forma quadratica $\sum_1^n \varphi_{ik} \xi_i \xi_k$ risulti definita o semidefinita positiva, purchè si faccia l'ulteriore ipotesi che, per ogni integrale $u_i(t), \dots, u_n(t)$ di [1], gli eventuali valori di t che rendono semidefinita la forma

$$[6] \quad \sum_1^n \varphi_{ik} [u_i'(t), \dots, u_n'(t)] \xi_i \xi_k$$

non riempiono un intervallo. Possiamo quindi enunciare quest'altro teorema:

TEOREMA II. — *Valgono ancora le conclusioni del Teorema I se, per tutti i valori di u_1, \dots, u_n la forma quadratica $\sum_1^n \varphi_{ik}(u_1, \dots, u_n) \xi_i \xi_k$ risulta definita o semidefinita positiva e se, per ogni integrale di [1], gli eventuali valori di t che rendono semidefinita la forma [6] non riempiono un intervallo.*

Se invece esistono degli integrali di [1] che non soddisfano alla condizione ora enunciata, dalla [4] possiamo solo trarre che la funzione [5] è non crescente in $(a, a + h)$ ed arrivare quindi soltanto alla $\frac{ds^*}{ds} \leq 1$. Ma se supponiamo che la totalità di siffatti integrali non comprenda una famiglia dipendente da un parametro continuo, l'uguaglianza $\frac{ds^*}{ds} = 1$ non potrà mai verificarsi per tutti gli elementi ds di una curva dello spazio S_{2n} e quindi per le lunghezze finite corrispondenti l, l^* varrà sempre la $\frac{l^*}{l} < 1$.

La trasformazione $\mathcal{T}_{a,h}$ sarà una contrazione in senso largo, e quindi, tenendo presente la seconda proposizione del n. 1, possiamo enunciare il seguente:

TEOREMA III. — *Se per tutti i valori di u'_1, \dots, u'_n la forma quadratica $\sum_{i,k}^n \varphi_{ik}(u'_1, \dots, u'_n) \xi_i \xi_k$ risulta definita o semidefinita positiva, se gli integrali di [1] per cui tale forma risulta semidefinita in un intervallo non comprendono una famiglia dipendente da un parametro continuo, e se il sistema [1] ammette un integrale periodico, questo è unico ed è asintotico a tutti gli altri integrali.*

3. Al n. precedente abbiamo ammesso che, fissate comunque le condizioni iniziali [2], il corrispondente integrale del sistema [1] sia prolungabile in tutto $(a, +\infty)$. Vogliamo ora ritornare su questo punto, coll'ipotesi che per il sistema [1] siano verificate le condizioni di uno qualunque dei teoremi I, II, III (per quest'ultimo, senza tener conto dell'esistenza di un integrale periodico).

Supponiamo che per un generico integrale $u_1(t), \dots, u_n(t)$ di [1] sia assicurata l'esistenza in un certo intervallo finito $a \leq t \leq b$, ed inoltre di sapere che esiste un integrale particolare $\bar{u}_1(t), \dots, \bar{u}_n(t)$ indefinitamente prolungabile.

Per ogni t dell'intervallo (a, b) , posto $t = a + h$, possiamo considerare la trasformazione $\mathcal{T}_{a,h}$, che risulta essere una contrazione (in senso stretto o largo). Essa trasforma i punti

$$P[u_1(a), \dots, u_n(a), u'_1(a), \dots, u'_n(a)], \quad Q[\bar{u}_1(a), \dots, \bar{u}_n(a), \bar{u}'_1(a), \dots, \bar{u}'_n(a)]$$

rispettivamente nei punti

$$P^*[u_1(t), \dots, u_n(t), u'_1(t), \dots, u'_n(t)], \quad Q^*[\bar{u}_1(t), \dots, \bar{u}_n(t), \bar{u}'_1(t), \dots, \bar{u}'_n(t)]$$

onde la $\overline{P^*Q^*} < \overline{PQ}$ fornisce per l'integrale $u_1(t), \dots, u_n(t)$ la limitazione seguente:

$$[7] \quad \sum_1^n \mu_i [u'_i(t) - \bar{u}'_i(t)]^2 + \sum_1^n A_{ik} [u_i(t) - \bar{u}_i(t)] [u_k(t) - \bar{u}_k(t)] < \\ < \sum_1^n \mu_i [u'_i(a) - \bar{u}'_i(a)]^2 + \sum_1^n A_{ik} [u_i(a) - \bar{u}_i(a)] [u_k(a) - \bar{u}_k(a)].$$

Questa disuguaglianza mostra che le funzioni $u_1(t), \dots, u_n(t), u'_1(t), \dots, u'_n(t)$ si mantengono limitate in (a, b) , e perciò l'integrale $u_1(t), \dots, u_n(t)$ è prolungabile oltre il punto $t = b$. Si ha dunque:

TEOREMA IV. — *Nelle ipotesi del teorema I oppure del teorema II, oppure del teorema III, (prescindendo, in quest'ultimo caso, dall'esistenza o*

meno di un integrale periodico), ogni integrale del sistema [1] è indefinitamente prolungabile per $t \rightarrow \infty$, se è tale uno di essi ⁽¹⁾.

4. I precedenti risultati sono stati applicati, presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo, allo studio delle oscillazioni dell'acqua in un impianto idraulico dotato di due pozzi piezometrici. I livelli $z_1(t)$, $z_2(t)$ in questi pozzi sono definiti dalle

$$[8] \quad z_1(t) = \frac{a'}{a_1} u_1(t) - \frac{a''}{a_1} u_2(t) \quad , \quad z_2(t) = \frac{a''}{a_2} u_2(t)$$

colle $u_1(t)$, $u_2(t)$ soddisfacenti al seguente sistema di equazioni differenziali

$$[9] \quad \begin{cases} \left(\frac{a'}{a''} \frac{L'}{g} \frac{d^2 u_1}{dt^2} + \frac{a'}{a''} \frac{a'}{a_1} u_1 - \frac{a'}{a_1} u_2 + \frac{a'}{a''} \frac{L'}{\lambda'} \left(\frac{du_1}{dt} + \frac{Q}{a'} \right) \right) \left| \frac{du_1}{dt} + \frac{Q}{a'} \right| = 0, \\ \left(\frac{L''}{g} \frac{d^2 u_2}{dt^2} - \frac{a'}{a_1} u_1 + \left(\frac{a''}{a_1} + \frac{a''}{a_2} \right) u_2 + \frac{L''}{\lambda''} \left(\frac{du_2}{dt} + \frac{Q}{a''} \right) \right) \left| \frac{du_2}{dt} + \frac{Q}{a''} \right| = 0, \end{cases}$$

ed a certe condizioni iniziali

$$[10] \quad u_1(0) = \bar{u}_1 \quad , \quad u_2(0) = \bar{u}_2 \quad , \quad \left(\frac{du_1}{dt} \right)_{t=0} = \bar{u}'_1 \quad , \quad \left(\frac{du_2}{dt} \right)_{t=0} = \bar{u}'_2.$$

Nelle [8], [9] $a_1, a_2, a', a'', L', L'', \lambda', \lambda''$ denotano costanti positive che caratterizzano l'impianto in questione; Q è una costante non negativa che rappresenta la quantità d'acqua che dall'impianto viene erogata nell'unità di tempo; g è l'accelerazione di gravità.

Il sistema [9] è del tipo [1] ed è subito visto che sono verificate le quattro ipotesi fondamentali che al n. 2 abbiamo posto per tali sistemi. Nel caso attuale le $f_i(t)$ sono costanti (nulle) ed il periodo ω è indeterminato; integrale periodico significa dunque integrale costante, ed evidentemente il sistema [9] ammette un tale integrale dato da

$$[11] \quad \begin{cases} u_1(t) = -\frac{a_1 + a_2}{a'} \frac{L'}{\lambda'} \left(\frac{Q}{a'} \right)^2 - \frac{a_2}{a'} \frac{L''}{\lambda''} \left(\frac{Q}{a''} \right)^2 = U_1, \\ u_2(t) = -\frac{a_2}{a''} \frac{L'}{\lambda'} \left(\frac{Q}{a'} \right)^2 - \frac{a_2}{a''} \frac{L''}{\lambda''} \left(\frac{Q}{a''} \right)^2 = U_2. \end{cases}$$

⁽¹⁾ Aggiungiamo che, se per il sistema [1] valgono le ipotesi del n. 2 (anche senza supporre che le $f_i(t)$ siano periodiche) ed inoltre la forma quadratica $\Sigma \varphi_{ik} \xi_i \xi_k$ è definita positiva o semidefinita positiva, allora tutti i suoi integrali sono indefinitamente prolungabili. Vedi L. AMERIO, *Un preliminare teorema di Analisi per lo studio dei moti con resistenza passiva*. (Questi « Rendiconti », Adunanza del 16 gennaio 1942-XX).

La forma quadratica $\sum \varphi_{ik} \xi_i \xi_k$ si riduce in questo caso alla

$$2 \frac{a'}{a''} \frac{L'}{\lambda'} \left| \frac{du_1}{dt} + \frac{Q}{a'} \right| \xi_1^2 + 2 \frac{L''}{\lambda''} \left| \frac{du_2}{dt} + \frac{Q}{a''} \right| \xi_2^2$$

che è in generale definita positiva, e semidefinita solo se $\frac{du_1}{dt} = -\frac{Q}{a'}$ oppure $\frac{du_2}{dt} = -\frac{Q}{a''}$. Ora è evidente che, per un integrale di [9], nessuna di queste due uguaglianze può verificarsi in tutto un intervallo, a meno che non sia $Q = 0$, nel quale caso ciò avviene per l'unico integrale $u_1 = u_2 = 0$. Se $Q \neq 0$, possiamo dunque applicare al nostro sistema il teorema II; siccome già ci siamo assicurati dell'esistenza dell'integrale periodico [11], dei due casi previsti dal teorema, si verifica certamente il secondo. Se $Q = 0$, siamo invece in condizioni di applicare il teorema III. Concludiamo che *tutti gli integrali del sistema [9] sono stabili e asintotici all'unico integrale costante definito dalle [11]*.

Si ha cioè

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_1(t) = U_1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u_2(t) = U_2$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{du_1}{dt} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{du_2}{dt} = 0.$$

Inoltre, applicando la [7], possiamo dire che *ogni integrale di [1] verifica per $t > 0$ la limitazione*

$$\begin{aligned} [12] \quad & \frac{a'}{a''} \frac{L'}{g} \left(\frac{du_1}{dt} \right)^2 + \frac{L''}{g} \left(\frac{du_2}{dt} \right)^2 + \\ & + \frac{a'}{a''} \frac{a'}{a_1} [u_1(t) - U_1]^2 - 2 \frac{a'}{a_1} [u_1(t) - U_1] [u_2(t) - U_2] + \\ & + \left(\frac{a''}{a_1} + \frac{a''}{a_2} \right) [u_2(t) - U_2]^2 < \frac{a'}{a''} \frac{L'}{g} \bar{u}_1^2 + \frac{L''}{g} \bar{u}_2^2 + \\ & + \frac{a'}{a''} \frac{a'}{a_1} (\bar{u}_1 - U_1)^2 - 2 \frac{a'}{a_1} (\bar{u}_1 - U_1) (\bar{u}_2 - U_2) + \left(\frac{a''}{a_1} + \frac{a''}{a_2} \right) (\bar{u}_2 - U_2)^2, \end{aligned}$$

col secondo membro funzione dei valori iniziali [10].

Passando ora ai livelli z_1, z_2 mediante le [8], possiamo dire che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z_1(t) = \frac{a'}{a_1} U_1 - \frac{a''}{a_1} U_2 = Z_1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} z_2(t) = \frac{a''}{a_2} U_2 = Z_2,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dz_1}{dt} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dz_2}{dt} = 0,$$

le quali mostrano che nell'impianto considerato si raggiunge un regime permanente.

Di più, se nella [12] trascuriamo i primi due termini a primo membro ed esprimiamo le u colle z , troviamo

$$[13] \quad a_1 [z_1'(t) - Z_1]^2 + a_2 [z_2'(t) - Z_2]^2 < \frac{a'}{a''} \frac{L'}{g} \left(\frac{a_1}{a'} \bar{z}_1' + \frac{a_2}{a'} \bar{z}_2' \right)^2 + \\ + \frac{L''}{g} \left(\frac{a_2}{a''} \bar{z}_2' \right)^2 + a_1 (\bar{z}_1 - Z_1)^2 + a_2 (\bar{z}_2 - Z_2)^2$$

avendo introdotto i valori iniziali $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_1', \bar{z}_2'$ delle z e delle loro derivate prime. La [13] è di notevole importanza pratica, perchè dà una soluzione del problema di limitare le z nel periodo iniziale (cioè quando esse si discostano ancora molto dai loro valori di regime) in quanto limita direttamente gli scarti da tali valori.

Matematica (Analisi). — *Una proprietà degli integrali delle equazioni ellittico-paraboliche del secondo tipo misto.* Nota di MARIA CINQUINI-CIBRARIO, presentata ⁽¹⁾ da ENRICO BOMPIANI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. — In un lavoro precedente ⁽²⁾ si era dimostrata, per gli integrali di una particolare equazione ellittico-parabolica del secondo tipo misto:

$$(a) \quad x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

una proprietà notevole; precisamente si era dimostrato ⁽³⁾ che se un integrale della (a) è analitico nell'intorno di un punto dell'asse y (che è la retta parabolica dell'equazione e la sua unica caratteristica reale), esso è analitico nell'intorno di ogni altro punto dell'asse y . La dimostrazione era fondata sul fatto che la (a) ammette i due sistemi di integrali particolari:

$$(a') \quad x^n \cos \sqrt{n(n-1)} y \quad ; \quad x^n \sin \sqrt{n(n-1)} y \quad (n = 2, 3, \dots)$$

e sulla risoluzione del problema di CAUCHY per la (a), quando la curva portante i dati sia un segmento dell'asse x . Nel presente lavoro si estende il teorema alla equazione ellittico-parabolica più generale del secondo tipo misto:

$$(A) \quad \frac{x^{2(k+1)}}{k^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots),$$

già studiata nel lavoro citato ⁽⁴⁾. Per giungere a tale estensione è opportuno introdurre due sistemi di integrali particolari della (A), analoghi

⁽¹⁾ Nell'Adunanza del 20 febbraio 1942-XX.

⁽²⁾ M. CIBRARIO, *Sulle equazioni del secondo tipo misto ellittico-paraboliche.* « Rend. del Circolo Matematico di Palermo », to. LIX, anno 1935, pagg. 347-372.

⁽³⁾ M. CIBRARIO, loc. cit., § 3, pag. 370.

⁽⁴⁾ M. CIBRARIO, loc. cit., §§ 1 e 2.

Il caso $k = 1$ è studiato a parte nei due lavori: M. CIBRARIO, *Il problema di Dirichlet in domini infiniti e le equazioni del secondo tipo misto ellittico-para-*

agli integrali (a') per la (a). La conoscenza di tali integrali particolari della (A) è utilizzata nello studio del problema di CAUCHY per la (A), quando la curva portante i dati è un segmento di uno degli assi coordinati. Dai risultati ottenuti segue immediatamente la proprietà fondamentale, accennata in principio; tale proprietà ha varie conseguenze notevoli circa l'andamento di un integrale della (A) in un dominio attraversato dall'asse y , che, anche per la (A), è la *retta parabolica e l'unica caratteristica reale*.

2. — Per giungere ai due sistemi di integrali particolari della (A), a cui si è accennato sopra, mediante la posizione:

$$[1] \quad z(x, y) = x^n u(x, y) \quad (n \text{ intero positivo}),$$

si muti la (A) nella:

$$[2] \quad \frac{x^{2(k+1)}}{k^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2n \frac{x^{2k+1}}{k^2} \frac{\partial u}{\partial x} + n(n-1) \frac{x^{2k}}{k^2} u = 0,$$

e si ricerchino due integrali particolari della [2], $U_{n,k}(x, y)$, $V_{n,k}(x, y)$, che siano definiti e siano funzioni analitiche di x, y , almeno per $|x|, |y|$ abbastanza piccoli, e soddisfino le condizioni:

$$[3] \quad \left\{ \begin{array}{l} U_{n,k}(x, 0) = 1 \\ \left[\frac{\partial U_{n,k}(x, y)}{\partial y} \right]_{y=0} = 0 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} V_{n,k}(x, 0) = 0 \\ \left[\frac{\partial V_{n,k}(x, y)}{\partial y} \right]_{y=0} = 1 \end{array} \right.$$

Si trova subito che è:

$$[4] \quad \left\{ \begin{array}{l} U_{n,k}(x, y) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r L_r \frac{x^{2kr} y^{2r}}{k^{2r} \cdot (2r)!} \\ V_{n,k}(x, y) = y \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r L_r \frac{x^{2kr} y^{2r}}{k^{2r} \cdot (2r+1)!} \end{array} \right.$$

dove è:

$$[5] \quad L_0 = 1 \quad ; \quad L_r = \prod_{s=0}^{r-1} [4k^2 s^2 - 2ks + 4kns + n(n-1)],$$

e le serie convergono per $|x^k y| < 1^{(5)}$.

boliche. « Annali di Matematica », serie IV, to. XIV (1935-36), pagg. 215-247; M. CINQUINI-CIBRARIO, *Un complemento allo studio del problema di Dirichlet in domini infiniti*. « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. 76 (1940-41), pagg. 105-124.

⁽⁵⁾ Si noti che è $U_{n,k}(x, y) = \frac{\partial V_{n,k}(x, y)}{\partial y}$.

Una espressione semplice delle funzioni $U_{n,k}(x, y)$, $V_{n,k}(x, y)$ si ottiene, cercando un integrale della [2], che sia funzione solo del prodotto $x^k y$. Ponendo $x^k y = \lambda$, e indicando con $G_{n,k}(\lambda)$ l'integrale richiesto della [2], si trova l'equazione:

$$[6] \quad (1 + \lambda^2) \frac{d^2 G_{n,k}(\lambda)}{d\lambda^2} + \frac{2n+k-1}{k} \lambda \frac{dG_{n,k}(\lambda)}{d\lambda} + \frac{n(n-1)}{k^2} G_{n,k}(\lambda) = 0,$$

che, col cambiamento di variabili:

$$[7] \quad \tau = \frac{1 + i\lambda}{2},$$

diviene:

$$[8] \quad \tau(1-\tau) \frac{d^2 G_{n,k}}{d\tau^2} + \left(\frac{2n+k-1}{2k} - \frac{2n+k-1}{k} \tau \right) \frac{dG_{n,k}}{d\tau} - \frac{n(n-1)}{k^2} G_{n,k} = 0,$$

che è soddisfatta dalla funzione ipergeometrica ⁽⁶⁾:

$$F_1(\tau) = F\left(\frac{n-1}{k}, \frac{n}{k}, \frac{2n+k-1}{2k}, \tau\right);$$

tenendo conto della posizione [7] e del fatto che la [6] non muta, cambiando λ in $-\lambda$, si trova che la [6] ammette gli integrali particolari:

$$[9] \quad \left\{ \begin{aligned} G_{n,k}^{(1)}(\lambda) &= \frac{F_1\left(\frac{1+i\lambda}{2}\right) + F_1\left(\frac{1-i\lambda}{2}\right)}{2F_1\left(\frac{1}{2}\right)} \\ G_{n,k}^{(2)}(\lambda) &= \frac{k(2n+k-1)}{n(n-1)} \frac{F_1\left(\frac{1+i\lambda}{2}\right) - F_1\left(\frac{1-i\lambda}{2}\right)}{2iF\left(\frac{n-1}{k} + 1, \frac{n}{k} + 1, \frac{2n+k-1}{2k} + 1, \frac{1}{2}\right)}, \end{aligned} \right.$$

dove nella seconda formula si è anche supposto $n > 1$.

3. - Si supponga, in primo luogo, $k > 1$, si sostituiscano alle funzioni ipergeometriche le loro espressioni mediante integrali ⁽⁷⁾ e si ponga:

$$[10] \quad \left\{ \begin{aligned} U_{n,k}(x, y) &= G_{n,k}^{(1)}(x^k y) \\ V_{n,k}(x, y) &= \frac{1}{x^k} G_{n-k,k}^{(2)}(x^k y). \end{aligned} \right.$$

⁽⁶⁾ Per le proprietà della funzione ipergeometrica v. per esempio: APPEL et KAMPÉ DE FÉRIET, *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques*. Première Partie, chap. I, § 1. Per l'equazione [8] v. pag. 4 form. [7].

⁽⁷⁾ APPEL et KAMPÉ DE FÉRIET, loc. cit., pag. 2, form. [3].

Si trova così subito, posto:

$$\alpha = \cos \frac{n-1}{k} \operatorname{arctg} \frac{tx^k y}{2-t}$$

$$\beta = \operatorname{sen} \frac{n-k-1}{k} \operatorname{arctg} \frac{tx^k y}{2-t},$$

che è:

$$U_{n,k}(x, y) = \frac{\int_0^1 t^{\frac{n-k}{k}} (1-t)^{-\frac{k+1}{2k}} \left[\left(1-\frac{t}{2}\right)^2 + \frac{t^2 x^{2k} y^2}{4} \right]^{-\frac{n-1}{2k}} \alpha dt}{\int_0^1 t^{\frac{n-k}{k}} (1-t)^{-\frac{k+1}{2k}} \left(1-\frac{t}{2}\right)^{-\frac{n-1}{k}} dt},$$

$$V_{n,k}(x, y) = \frac{2k}{n-k-1} \frac{\int_0^1 t^{\frac{n-2k}{k}} (1-t)^{-\frac{k+1}{2k}} \left[\left(1-\frac{t}{2}\right)^2 + \frac{t^2 x^{2k} y^2}{4} \right]^{-\frac{n-k-1}{2k}} \beta dt}{x^k \int_0^1 t^{\frac{n-k}{k}} (1-t)^{-\frac{k+1}{2k}} \left(1-\frac{t}{2}\right)^{-\frac{n-1}{k}} dt},$$

in cui si suppone di avere presa la determinazione di $\operatorname{arctg} \varphi$, nulla per $\varphi = 0$.

Da quanto si è detto sopra, la funzione $G_{n-k,k}^{(2)}(x^k y)$ risulta definita solo per $n > k+1$; si vede però subito che il secondo membro della seconda delle [11] definisce $V_{n,k}(x, y)$ anche per $n = 1, 2, 3 \dots k, k+1$; per $n = k+1$ si ha, in particolare, il caso limite:

$$[12] \quad V_{k+1,k}(x, y) = \frac{2 \int_0^1 t^{-\frac{k-1}{k}} (1-t)^{-\frac{k+1}{2k}} \operatorname{arctg} \frac{tx^k y}{2-t} dt}{x^k \int_0^1 t^{\frac{1}{k}} (1-t)^{-\frac{k+1}{2k}} \left(1-\frac{t}{2}\right)^{-1} dt}.$$

Le funzioni $U_{n,k}(x, y)$, $V_{n,k}(x, y)$, così ottenute, sono definite per tutti i valori, reali o complessi, di x, y , sono integrali della [2], per il modo in cui sono state costruite⁽⁸⁾ e soddisfano le condizioni [3], come si verifica subito; quindi i loro sviluppi in serie di potenze di $x^k y$, con-

⁽⁸⁾ Il risultato è immediato per la funzione $U_{n,k}(x, y)$; in quanto alla $V_{n,k}(x, y)$, si osservi che $G_{n-k,k}^{(2)}(x^k y)$ è un integrale dell'equazione, che si ottiene dalla [2], scrivendo in essa $n-k$ al posto di n , e quindi $\frac{1}{x^k} G_{n-k,k}^{(2)}(x^k y)$ è un integrale della [2].

vergenti per $|x^k y| < 1$, sono dati proprio dai secondi membri delle [4]. Si vede subito che:

$$[13] \quad U_{n,k}(0, y) = 1 \quad ; \quad V_{n,k}(0, y) = y,$$

e che, per x, y reali, è:

$$[14] \quad |U_{n,k}(x, y)| \leq 1 \quad ; \quad |V_{n,k}(x, y)| \leq |y|.$$

Con facile calcolo, per x, y reali, si trovano inoltre le diseguaglianze:

$$[15] \quad \left| \frac{\partial U_{n,k}(x, y)}{\partial y} \right| \leq \frac{n-1}{k} |x|^k \quad ; \quad \left| \frac{\partial V_{n,k}(x, y)}{\partial y} \right| \leq 1.$$

Si verifica pure che, anche per valori complessi di x, y , purchè tali che sia $|x^k y| < 1$, è sempre:

$$[16] \quad |U_{n,k}(x, y)| \leq \frac{1}{2} \left[1 + (1 - |x^k y|)^{-\frac{n-1}{k}} \right] \quad ;$$

$$|V_{n,k}(x, y)| \leq \frac{|y|}{2} \left[1 + (1 - |x^k y|)^{-\frac{n-1}{k}} \right].$$

Si trovano così i due sistemi di integrali particolari della (A):

$$[17] \quad x^n U_{n,k}(x, y) \quad , \quad x^n V_{n,k}(x, y) \quad (n=0, 1, 2, 3 \dots),$$

dove si è posto:

$$[18] \quad U_{0,k}(x, y) = U_{1,k}(x, y) = 1 \quad ; \quad V_{0,k}(x, y) = V_{1,k}(x, y) = y,$$

perchè, come si verifica immediatamente, le funzioni: $1, y, x, xy$ sono integrali particolari della (A).

4. - Si supponga ora $k = 1$; dalle [9], tenendo conto che

$$F\left(n-1, n, n, \frac{1+i\lambda}{2}\right) = \left(\frac{1-i\lambda}{2}\right)^{-(n-1)} \quad (^{\circ}),$$

e ragionando in modo analogo a quello tenuto sopra, si ottengono subito gli integrali dell'equazione [2], soddisfacenti le condizioni [3]:

$$[11'] \quad \begin{cases} U_{n,1}(x, y) = \frac{1 - \binom{n-1}{2} x^2 y^2 + \binom{n-1}{4} x^4 y^4 - \dots}{(1 + x^2 y^2)^{n-1}} \\ V_{n,1}(x, y) = y \frac{n-2 - \binom{n-2}{3} x^2 y^2 + \binom{n-2}{5} x^4 y^4 - \dots}{(n-2)(1 + x^2 y^2)^{n-2}}, \end{cases}$$

di cui la seconda vale solo per $n > 2$.

(^o) APPEL et KAMPÉ DE FÉRIET, loc. cit. pag. 2.

Queste formule si possono anche scrivere nel modo seguente, che vale per ogni valore intero positivo di n , e anche per $n = 0$:

$$[11''] \quad \left\{ \begin{aligned} U_{n,1}(x, y) &= \frac{\cos(n-1) \operatorname{arctg} xy}{(1+x^2 y^2)^{\frac{n-1}{2}}} \\ V_{n,1}(x, y) &= \frac{\operatorname{sen}(n-2) \operatorname{arctg} xy}{(n-2)x(1+x^2 y^2)^{\frac{n-2}{2}}} \end{aligned} \right.$$

in cui si suppone di avere presa la determinazione di $\operatorname{arctg} \varphi$, nulla per $\varphi = 0$. E, al limite:

$$[12'] \quad V_{2,1}(x, y) = \frac{\operatorname{arctg} xy}{x}$$

Si prova subito che le relazioni [13] — [16] precedenti valgono anche per le $U_{n,1}(x, y)$, $V_{n,1}(x, y)$, e che per $n = 0$, $n = 1$ dalle [11''] seguono le [18]. Si hanno così per l'equazione (A), anche nel caso in cui sia $k = 1$, i due sistemi di integrali particolari [17], che, nel caso particolare $k = 1$, si erano ottenuti per altra via in un lavoro precedente⁽¹⁹⁾.

5. — Dimostriamo ora il seguente teorema:

TEOREMA I: « Esiste uno e un solo integrale della (A), che è definito in ogni punto interno alla striscia $|x| < R$, è ivi funzione analitica di x, y e soddisfa le condizioni ai limiti:

$$[19] \quad z(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n; \quad \left[\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} \right]_{y=0} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

nell'ipotesi che tali serie convergano per $|x| < R$. Tale integrale ha la forma:

$$[20] \quad z(x, y) = a_0 + b_0 y + a_1 x + b_1 y + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} [a_n x^n U_{n,k}(x, y) + b_n x^n V_{n,k}(x, y)],$$

dove la serie a secondo membro converge assolutamente e uniformemente in ogni campo interno alla striscia $|x| < R$.

Le disequaglianze [14] e [15] assicurano senz'altro che la serie [20] e la serie ottenuta da questa derivando termine a termine rispetto a y convergono assolutamente e uniformemente in ogni campo interno alla striscia $|x| < R$; le condizioni [3] assicurano che la funzione $z(x, y)$, rappresentata dalla serie [20], soddisfa le condizioni ai limiti [19]. Poichè nei punti, in cui è $x \neq 0$, l'equazione (A) è del tipo ellittico, per teo-

⁽¹⁹⁾ Cfr. l'ultimo lavoro citato nella nota (4), pag. 107; vi è qualche differenza di notazioni tra tale lavoro e la presente Nota.

remi generali sulle equazioni lineari del tipo ellittico segue che, in ogni campo δ interno alla striscia $|x| < R$ e senza punti a comune coll'asse y , la funzione $z(x, y)$, rappresentata dalla serie [20], è un integrale della equazione (A) ⁽¹¹⁾; da risultati classici segue subito che $z(x, y)$ è funzione analitica di x, y in ogni punto interno alla striscia $|x| < R$ e non appartenente all'asse y .

Occorre provare ancora che $z(x, y)$ soddisfa la (A) anche nei punti dell'asse y , e che è funzione analitica di x, y anche nell'intorno di ogni punto dell'asse y , cioè che $z(x, y)$ è sviluppabile in serie di potenze di x e di $y - y_0$ nell'intorno di un qualunque punto $(0, y_0)$ dell'asse y . A tale scopo si ricordino le disuguaglianze [16], a cui soddisfano le funzioni $U_{n,k}(x, y)$, $V_{n,k}(x, y)$, comunque siano x, y , reali o complessi, purchè sia $|x^k y| < 1$; dalle [16] segue che se $|y| < L$ è un segmento dell'asse y , comunque sia grande L , si può determinare un numero M , in modo che per tutti i valori reali o complessi di x, y , tali che sia $|x| < M$, $|y| < L$, la serie [20] converga uniformemente; allora la serie [20] per $|x| < M$, $|y| < L$ è una funzione analitica di x, y , è derivabile termine a termine, ed è dunque un integrale della (A).

L'unicità dell'integrale $z(x, y)$ della (A), che soddisfa il teorema, segue da risultati classici.

Poichè l'equazione (A) non muta, mutando y in $y - y_1$, il TEOREMA I resta valido, se alle condizioni ai limiti [19] si sostituiscono le:

$$z(x, y_1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n ; \quad \left[\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} \right]_{y=y_1} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n ;$$

basta sostituire $y - y_1$ a y nel secondo membro della [20].

6. - Dal TEOREMA I segue immediatamente il risultato fondamentale enunciato al principio del lavoro.

TEOREMA II: « Se un integrale dell'equazione (A) è analitico nell'intorno di un qualsiasi punto $y = y_0$ dell'asse y , esso è analitico nell'intorno di ogni altro punto dell'asse y , e risulta definito, come funzione analitica di x, y , in tutti i punti interni ad una striscia avente l'asse y come mediana ».

Il TEOREMA II ha conseguenze notevoli: un integrale $z(x, y)$ della (A) sia definito ⁽¹²⁾ in un dominio D , attraversato dall'asse y e avente

⁽¹¹⁾ V. per es.: L. LICHTENSTEIN, *Neuere Entwicklung der Theorie partieller Differentialgleichungen vom elliptischen Typus*. « Enc. d. Math. Wiss. », II, 3, C 12, pagg. 1277-1334. Cfr. per questo il cap. II. *Lineare Differentialgleichungen*, I, 2 b), pag. 1285.

⁽¹²⁾ Col dire che un integrale della (A) è definito in un dominio D , si intende dire che esso è finito e continuo in tutti i punti di D , contorno incluso, e che nei punti interni a D ha derivate prime e seconde finite e continue e soddisfa la (A).

per contorno una curva chiusa σ ; ebbene, se la curva σ è analitica e se la successione dei valori assunti da $z(x, y)$ su σ non costituisce una funzione analitica, allora l'integrale $z(x, y)$ della (A) non può essere analitico nei punti dell'asse y interni al dominio D , nel senso che, se $(0, y_0)$ è uno di tali punti, $z(x, y)$ non è sviluppabile in serie di potenze di x e di $y - y_0$ nell'intorno del punto $(0, y_0)$ e si riduce, in generale, a due funzioni analitiche distinte nelle due parti di D , poste rispettivamente nei semipiani $x > 0$ e $x < 0$ ⁽¹³⁾.

7. — Se un integrale della (A) è definito e ha derivate prime e seconde finite e continue anche nei punti dell'asse y , esso, come si vede subito, si riduce ivi a una funzione lineare di y . Si può anche provare che, nelle stesse ipotesi, le derivate $\frac{\partial z(x, y)}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x^2}$ si riducono, per $x = 0$, a funzioni lineari di y .

Segue di qui e dall'esistenza dei due sistemi di integrali $x^n U_{n,k}(x, y)$, $x^n V_{n,k}(x, y)$ della (A) che il problema di CAUCHY, quando la curva portante i dati è un segmento dell'asse y , è impossibile o indeterminato. Il problema è impossibile, se le due funzioni, a cui devono ridursi $z(x, y)$ e $\frac{\partial z(x, y)}{\partial x}$ per $x = 0$, non sono lineari. Se questa condizione è soddisfatta, cioè se sono date le condizioni:

$$[21] \quad z(0, y) = a_0 + b_0 y \quad ; \quad \left[\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} \right]_{x=0} = a_1 + b_1 y,$$

il problema è risolto da una qualsiasi funzione della forma:

$$[22] \quad z(x, y) = a_0 + b_0 y + x(a_1 + b_1 y) + \\ + \sum_{n=2}^h [a_n x^n U_{n,k}(x, y) + b_n x^n V_{n,k}(x, y)],$$

dove h è un qualunque numero intero positivo, e a_n e b_n sono costanti arbitrarie.

8. — Da queste considerazioni segue che, se un integrale $z(x, y)$ della (A) è definito in un dominio, posto per esempio nel semipiano $x \geq 0$, se del contorno del dominio fa parte un segmento dell'asse y , e se

Il teorema di esistenza dimostrato nel lavoro citato in ⁽²⁾ (v. § 2, T. V, pag. 363) assicura, sotto ipotesi molto larghe, l'esistenza di un integrale della (A), definito nel dominio D , e che, sul contorno σ di D , si riduce ad una funzione continua assegnata. Sull'argomento contiamo di tornare in una prossima Nota.

⁽¹³⁾ Quest'ultimo risultato era stato già ottenuto, per altra via, nel lavoro citato in ⁽²⁾ (§ 2, T. V, pag. 363).

$z(x, y)$ ha derivate prime e seconde continue anche nei punti di tale segmento, l'integrale $z(x, y)$ si può prolungare in infiniti modi al di là di quel segmento dell'asse y , cioè, come si vede subito, tenendo conto della formula [22], si può costruire, in infiniti modi, un integrale $z_1(x, y)$ della (A), definito in un campo conveniente posto nel semipiano $x \leq 0$ e limitato da quel segmento dell'asse y , in modo che sia:

$$[23] \quad z_1(0, y) = z(0, y) \quad ; \quad \left[\frac{\partial z_1(x, y)}{\partial x} \right]_{x=0} = \left[\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} \right]_{x=0} ;$$

$$\left[\frac{\partial^2 z_1(x, y)}{\partial x^2} \right]_{x=0} = \left[\frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x^2} \right]_{x=0} .$$

Può darsi però che nessuno di questi integrali $z_1(x, y)$ sia il prolungamento analitico di $z(x, y)$ per $x < 0$, e che quindi $z(x, y)$ non sia prolungabile analiticamente al di là dell'asse y , cioè della retta parabolica dell'equazione.

9. - Per una equazione analitica del tipo ellittico è ben noto il teorema ⁽¹⁴⁾, che un suo integrale è prolungabile analiticamente attraverso a un arco analitico del contorno del campo, in cui tale integrale è definito, quando i valori assunti dall'integrale sull'arco stesso costituiscono una funzione analitica.

Le considerazioni precedenti mostrano che tale teorema può non valere per l'equazione (A), ellittico-parabolica del secondo tipo misto, quando l'arco considerato sia un segmento della retta parabolica, cioè dell'asse y . Vi è dunque una differenza notevole tra l'equazione (A) del secondo tipo misto e l'equazione ellittico-parabolica del primo tipo misto:

$$[24] \quad k^2 y^{2k-2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad (k = 2, 3, \dots)$$

per la quale, come si è visto altrove ⁽¹⁵⁾, il teorema relativo al prolungamento analitico vale in ogni caso, anche se l'arco in questione è un segmento dell'asse x , che è la retta parabolica dell'equazione [24].

⁽¹⁴⁾ M. GEVREY, *Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles*. 1er Mémoire, « Ann. Éc. Norm. », 3^e ser., to. 35^e (1918), pagg. 129-190. Cfr. per questo il § 4, n. 8, pag. 186.

⁽¹⁵⁾ M. CINQUINI-CIBRARIO, *Sull'analiticità degli integrali di alcune equazioni del primo tipo misto*. « Ann. di Mat. », ser. IV, to. XIX (1940), pagg. 51-79. V. per questo il § 4, Teorema V, pag. 69.

Matematica. — *Un teorema generale sulla struttura delle funzioni iperarmoniche* ⁽¹⁾. Nota di GAETANO FICHERA, presentata ⁽²⁾ da MAURO PICONE, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Il problema della rappresentazione di una funzione iperarmonica u in n variabili a mezzo delle funzioni armoniche è completamente risolto quando il campo A , ove si considera definita la u , è un iperstrato sferico o una ipersfera. In tali ipotesi per A , valgono, per $n = 2$ ed $n = 3$, i teoremi stabiliti dal prof. PICONE ⁽³⁾ e per n qualunque quelli che trovansi in un mio recente lavoro ⁽⁴⁾. A quanto mi consta, però, tale problema non ha ancora avuto una completa soluzione, quando per il campo A si facciano ipotesi più generali sulla sua forma e sull'ordine di connessione. Vi è soltanto, per $n = 2$ e nell'ipotesi che A sia semplicemente connesso, un teorema del prof. PICONE, la cui elegante dimostrazione, poggiante sulla variabile complessa, non è però ulteriormente estendibile a casi $n > 2$ ⁽⁵⁾, e vi sono, per n qualunque, alcuni risultati dovuti a COLUCCI, sempre relativi, però, a campi semplicemente connessi di forma particolare ⁽⁶⁾.

⁽¹⁾ Lavoro del Laboratorio di Analisi superiore dello R. Università di Roma, eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

⁽²⁾ Nell'Adunanza del 20 febbraio 1942-XX.

⁽³⁾ Cfr. M. PICONE, *Nuovi indirizzi di ricerca nella teoria e nel calcolo delle soluzioni di talune equazioni lineari delle derivate parziali della Fisica-matematica*. « Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa », vol. V, serie II (1936-XIV).

⁽⁴⁾ Cfr. G. FICHERA, *Sviluppi in serie e teoremi di decomposizione in somma per le funzioni iperarmoniche*. « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », to. LXIII (1941-XIX); cfr. anche M. NICOLESCO, *Nouvelles recherches sur les fonctions polyharmoniques*, « Disquisitiones Mathematicae et Physicae », to. I (1940).

⁽⁵⁾ Cfr. M. PICONE, loc. cit., pag. 247.

⁽⁶⁾ Cfr. A. COLUCCI, *Sopra una particolare rappresentazione delle funzioni iperarmoniche in due variabili*. « Atti del 1° Congresso dell'Unione Matematica Italiana »; *Teoremi e problemi sulle funzioni iperarmoniche trattati col metodo degli operatori lineari e Sulla rappresentazione delle funzioni iperarmoniche a mezzo di armoniche*. « Rend. della R. Accademia delle Scienze fisiche e Matematiche della Società Reale di Napoli » (1937).

Mi propongo, nelle righe che seguono, di far conoscere un metodo la cui applicazione conduce a stabilire un generale teorema sulla rappresentazione delle funzioni iperarmoniche a mezzo delle armoniche, nelle più larghe ipotesi per il campo A . Non è mia intenzione dimostrare qui per esteso tale teorema. Ciò farò invece in un prossimo lavoro ove saranno completamente trattati i problemi relativi alla rappresentazione delle funzioni iperarmoniche, e mediante le funzioni armoniche, e mediante le formole del tipo di POINCARÉ. A me preme, per adesso, dare soprattutto un saggio di detto metodo, e mi limiterò, pertanto, ad applicarlo nel caso particolare di funzioni bi-iperarmoniche in due variabili.

* * *

Sia A un insieme aperto del piano (x, y) , C una curva continua, regolare ⁽¹⁾, semplice e chiusa contenuta in A , e $u(x, y)$ e $v(x, y)$ due funzioni continue in A assieme a tutte quelle derivate parziali di cui faremo uso.

Poniamo, detto n un fissato ⁽²⁾ asse normale a C :

$$\Phi_1[u, v; C] = \frac{1}{8\pi} \int_C \left(v \frac{du}{dn} - u \frac{dv}{dn} \right) ds,$$

$$\Phi_2[u, v; C] = \frac{1}{8\pi} \int_C \left(v \frac{d\Delta_2 u}{dn} - \Delta_2 u \frac{dv}{dn} \right) ds + \frac{1}{8\pi} \int_C \left(\Delta_2 v \frac{du}{dn} - \Delta_2 u \frac{dv}{dn} \right) ds.$$

Si vede subito che:

$$\Phi_2[u, v; C] = \Phi_1[\Delta_2 u, v; C] + \Phi_1[u, \Delta_2 v; C].$$

Ricordiamo alcuni teoremi ben noti nella teoria delle funzioni armoniche e iperarmoniche.

1) Se u e v sono funzioni armoniche (bi-iperarmoniche) regolari in A , il valore di

$$\Phi_1[u, v; C] \quad (\Phi_2[u, v; C])$$

⁽¹⁾ Per curva regolare, intendesi una curva composta di un numero finito di archi regolari, ciascuno dei quali, cioè, ha tangente in ogni punto la quale varia con continuità al variare del punto.

⁽²⁾ In seguito intenderemo sempre che n sia diretto verso l'interno del dominio della cui frontiera C fa parte.

rimane costante al variare di C in A , se rimane invariato l'insieme:

$$DC \cdot FA \text{ (}^1\text{)}.$$

In particolare si ha:

$$\Phi_1[u, v; C] = 0 \quad (\Phi_2[u, v, C] = 0)'$$

se $DC \cdot FA$ è vuoto.

II) (Teorema di BOGGIO). Se u è bi-iperarmonica regolare nell'insieme aperto A , e T è un dominio regolare $(^2)$ contenuto in A , che ha per completa frontiera la curva esterna C_0 e le curve interne C_1, C_2, \dots, C_m , si ha, per ogni punto P di T :

$$\begin{aligned} u(P) &= \Phi_2[u, \overline{PQ}^2 \log \overline{PQ}; C_0] - \sum_{i=1}^m \Phi_2[u, \overline{PQ}^2 \log \overline{PQ}; C_i] = \\ &= \Phi_1[\Delta_2 u, \overline{PQ}^2 \log \overline{PQ}; C_0] + \Phi_1[u, \Delta_2(\overline{PQ}^2 \log \overline{PQ}); C_0] - \\ &- \sum_{i=1}^m \{\Phi_1[\Delta_2 u, \overline{PQ}^2 \log \overline{PQ}; C_i] + \Phi_1[u, \Delta_2(\overline{PQ}^2 \log \overline{PQ}); C_i]\} \text{ (}^3\text{)}. \end{aligned}$$

Con Q si è indicato il punto corrente su FT , mentre l'operatore Δ_2 si intende applicato a $\overline{PQ}^2 \log \overline{PQ}$ come funzione del punto P .

Osserviamo adesso alcune proprietà dell'operatore Φ_1 , che, in modo analogo, valgono anche per Φ_2 , le quali seguono subito dalla definizione di detto operatore:

III) Se $v = v_1 + v_2$, si ha:

$$\Phi_1[u, v; C] = \Phi_1[u, v_1; C] + \Phi_1[u, v_2; C].$$

IV) Se $v = \lambda v_0$ con λ costante, si ha:

$$\Phi_1[u, v; C] = \lambda \Phi_1[u, v_0; C].$$

V) Se la funzione $v(P, Q)$, per ogni posizione del punto Q su C , risulta funzione di P analitica regolare in un certo campo B , tale risulta ivi la funzione:

$$f(P) = \Phi_1[u, v(P, Q); C]$$

(¹) Con DC si suole indicare il dominio limitato dalla curva C , con FA la frontiera di A e con $DC \cdot FA$ l'insieme dei punti comuni a DC e a FA .

(²) La cui frontiera è costituita, cioè, da curve regolari.

(³) Cfr. T. BOGGIO, *Sulle funzioni di Green d'ordine m.* « Rend. del Circolo Matematico di Palermo », to. XX (1905).

e, detta D una qualsivoglia operazione di derivazione parziale, si ha:

$$Df(P) = \Phi_1[u, Dv(P, Q); C].$$

In particolare, quindi, se $v(P, Q)$ è funzione iperarmonica regolare del punto P in B , è anche iperarmonica regolare in B la funzione $f(P)$.

Si può anche facilmente dimostrare che:

VI) Se $v(P, Q)$ è funzione armonica di P in B ed ha, per ogni posizione di Q su C , un polo di ordine p in un punto P_0 di B , la funzione $f(P)$ ha ivi un polo d'ordine $\leq p$.

* * *

Sia B_0 un insieme aperto semplicemente connesso ⁽¹⁾, limitato o no, del piano (x, y) e B_1, B_2, \dots, B_m insiemi chiusi e limitati, a due a due privi di punti in comune, contenuti in B_0 , tali che esistano $m+1$ successioni di curve regolari, continue semplici e chiuse, contenute nell'insieme aperto $A = B_0 - B_1 - B_2 - \dots - B_m$:

$$[C_0^{(v)}], [C_1^{(v)}], \dots, [C_m^{(v)}]$$

e che godono delle seguenti proprietà:

1) comunque si prendano due curve, della medesima successione o di successioni diverse, esse non hanno punti in comune, e, comunque si prenda v , le curve $C_1^{(v)}, \dots, C_m^{(v)}$, risultano esterne l'una all'altra e son contenute in $DC_0^{(v)}$;

2) ogni insieme B_k ($k = 1, 2, \dots, m$) è contenuto, qualunque sia v , in $DC_k^{(v)}$;

3) il dominio regolare T_v , la cui completa frontiera è costituita dalle curve $C_0^{(v)}, C_1^{(v)}, \dots, C_m^{(v)}$, invade ⁽²⁾, al divergere di v , l'insieme aperto A .

Andiamo adesso a dimostrare il seguente generale teorema di decomposizione per le funzioni bi-iperarmoniche in due variabili:

Se la funzione $u(P)$ è bi-iperarmonica regolare nell'insieme aperto $A = B_0 - B_1 - B_2 \dots - B_m$, scelto arbitrariamente nel piano il punto O

⁽¹⁾ Dicendo che B_0 è semplicemente connesso, intendiamo che, comunque si consideri una curva semplice e chiusa C contenuta in B_0 , il dominio DC è contenuto in B_0 .

⁽²⁾ Dicesi che T_v invade, al divergere di v , l'insieme aperto A , se T_v è contenuto in T_{v+1} , e per ogni insieme chiuso contenuto in A si può prendere l'indice v abbastanza alto in modo che tale insieme risulti contenuto in T_v .

di coordinate (a, b) , e fissati comunque i punti O_1, O_2, \dots, O_m rispettivamente in B_1, B_2, \dots, B_m , si ha in A la seguente formola di decomposizione del tipo di PICONE:

$$u(P) = \sum_{i=1}^m [(\alpha_i + a\gamma_i)x + (\beta_i + b\gamma_i)y] \log \overline{O_i P} + u_0(P) + \overline{OP}^2 u_1(P),$$

con $u_0(P)$ e $u_1(P)$ funzioni armoniche regolari in A e $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ costanti ben determinate, che non dipendono dai punti O, O_1, O_2, \dots, O_m , ed aventi le seguenti espressioni

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{1}{4\pi} \int_{C_i} \left(\Delta_2 u \frac{dx}{dn} - x \frac{d\Delta_2 u}{dn} \right) ds, & \gamma_i &= \frac{1}{4\pi} \int_{C_i} \frac{d\Delta_2 u}{dn} ds, \\ \beta_i &= \frac{1}{4\pi} \int_{C_i} \left(\Delta_2 u \frac{dy}{dn} - y \frac{d\Delta_2 u}{dn} \right) ds, \end{aligned}$$

ove con C_i s'è indicata una qualsivoglia curva continua regolare semplice e chiusa che racchiuda B_i ed escluda gli insiemi B_j con $j \neq i$ ⁽¹⁾.

Le funzioni armoniche $u_0(P)$ e $u_1(P)$ riescono univocamente determinate se O è contenuto in A , mentre se O non è in A , la loro determinazione dipende dalla scelta di due costanti arbitrarie e precisamente dei coefficienti dei termini $x-a$ e $y-b$ di un polinomio di primo grado in $x-a, y-b$ componente di $u_0(P)$.

Dimostrazione. — In ogni punto P interno al dominio T_v , si ha, conformemente al teorema II di pag. 513:

$$\begin{aligned} [1] \quad u(P) &= \Phi_1[\Delta_2 u, \overline{PQ}^2 \log \overline{PQ}; C_0^{(v)}] + \Phi_1[u, \Delta_2(\overline{PQ}^2 \log \overline{PQ}); C_0^{(v)}] - \\ &- \sum_{i=1}^m \{ \Phi_1[\Delta_2 u, \overline{PQ}^2 \log PQ; C_i^{(v)}] + \Phi_1[u, \Delta_2(\overline{PQ}^2 \log \overline{PQ}); C_i^{(v)}] \}. \end{aligned}$$

Fissato comunque nel piano il punto $O \equiv (a, b)$ diciamo ρ e ρ_0 le distanze dei punti P e Q da O , e θ e θ_0 gli angoli che i raggi vettori \vec{OP} e \vec{OQ} formino con il semiasse positivo delle x , poniamo cioè:

$$\overline{OP} = \rho, \quad \overline{OQ} = \rho_0, \quad (\vec{x}, \vec{OP}) = \theta, \quad (\vec{x}, \vec{OQ}) = \theta_0.$$

Consideriamo, in un primo momento, O contenute in B_0 , e supponiamo d'aver preso l'indice v convenientemente alto in modo che detto punto risulti interno alla curva $C_0^{(v)}$.

⁽¹⁾ In base al teorema I) di pag. 512 i valori di $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ non dipendono dalla curva C_i .

Si ha:

$$\overline{PQ}^2 = \rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\theta - \theta_0),$$

e quindi:

$$\begin{aligned} \Phi_1[\Delta_2 u, \overline{PQ}^2 \log \overline{PQ}; C_0^{(v)}] &= \Phi_1[\Delta_2 u, (\rho + \rho_0 - 2\rho\rho_0 \cos(\theta - \theta_0)) \log \overline{PQ}; C_0^{(v)}] = \\ &= \rho^2 \Phi_1[\Delta_2 u, \log \overline{PQ}; C_0^{(v)}] + \Phi_1[\Delta_2 u, \rho_0^2 \log \overline{PQ}; C_0^{(v)}] - \\ &\quad - 2\Phi_1[\Delta_2 u, \rho\rho_0 \cos(\theta - \theta_0) \log \overline{PQ}; C_0^{(v)}]. \end{aligned}$$

Essendo $\rho_0 \neq 0$, possiamo intanto scrivere:

$$\log \overline{PQ} = \frac{1}{2} \log \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} e^{i(\theta - \theta_0)} \right) + \frac{1}{2} \log \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} e^{-i(\theta - \theta_0)} \right) + \log \rho_0,$$

e, avendosi anche:

$$2\rho\rho_0 \cos(\theta - \theta_0) = \rho\rho_0 e^{i(\theta - \theta_0)} + \rho\rho_0 e^{-i(\theta - \theta_0)},$$

otteniamo:

$$\begin{aligned} &2\Phi_1[\Delta_2 u, \rho\rho_0 \cos(\theta - \theta_0) \log \overline{PQ}; C_0^{(v)}] = \\ &= \Phi_1 \left[\Delta_2 u, \rho\rho_0 e^{i(\theta - \theta_0)} \log \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} e^{i(\theta - \theta_0)} \right) + \rho\rho_0 e^{-i(\theta - \theta_0)} \log \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} e^{-i(\theta - \theta_0)} \right); C_0^{(v)} \right] + \\ &+ \rho^2 \left\{ \Phi_1 \left[\Delta_2 u, \frac{\rho_0}{\rho} e^{i(\theta - \theta_0)} \log \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} e^{-i(\theta - \theta_0)} \right) - \frac{\rho_0}{\rho} e^{-i(\theta - \theta_0)} \log \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} e^{i(\theta - \theta_0)} \right); C_0^{(v)} \right] \right\} + \\ &+ 2\rho \cos \theta \Phi_1[\Delta_2 u, \rho_0 \cos \theta_0 \log \rho_0; C_0^{(v)}] + 2\rho \sin \theta \Phi_1[\Delta_2 u, \rho_0 \sin \theta_0 \log \rho_0; C_0^{(v)}]. \end{aligned}$$

Poniamo:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 &= -2\Phi_1[\Delta_2 u, \rho_0 \cos \theta_0 \log \rho_0; C_0^{(v)}] - 2\Phi_1[u, \Delta_2(\rho_0 \cos \theta_0 \log \rho_0); C_0^{(v)}] = \\ &= -2\Phi_2[u, \rho_0 \cos \theta_0 \log \rho_0; C_0^{(v)}]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_0 + b_1 &= -2\Phi_1[\Delta_2 u, \rho_0 \sin \theta_0 \log \rho_0; C_0^{(v)}] - 2\Phi_1[u, \Delta_2(\rho_0 \sin \theta_0 \log \rho_0); C_0^{(v)}] = \\ &= -2\Phi_2[u, \rho_0 \sin \theta_0 \log \rho_0; C_0^{(v)}]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{0,0}^{(v)}(P) &= \Phi_1[u, \Delta_2(\overline{PQ}^2 \log \overline{PQ}); C_0^{(v)}] + \Phi_1[\Delta_2 u, \rho_0^2 \log \overline{PQ}; C_0^{(v)}] - \\ &- \Phi_1[\Delta_2 u, \rho\rho_0 e^{i(\theta - \theta_0)} \log \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} e^{i(\theta - \theta_0)} \right) + \rho\rho_0 e^{-i(\theta - \theta_0)} \log \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} e^{-i(\theta - \theta_0)} \right); C_0^{(v)}] + \\ &+ \{ 2\Phi_1[u, \Delta_2(\rho_0 \cos \theta_0 \log \rho_0); C_0^{(v)}] + a_0 \} \rho \cos \theta + \\ &+ \{ 2\Phi_1[u, \Delta_2(\rho_0 \sin \theta_0 \log \rho_0); C_0^{(v)}] + b_0 \} \rho \sin \theta; \\ u_{1,0}^{(v)}(P) &= \Phi_1[\Delta_2 u, \log \overline{PQ}; C_0^{(v)}] - \\ &- \Phi_1 \left[\Delta_2 u, \frac{\rho_0}{\rho} e^{i(\theta - \theta_0)} \log \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} e^{-i(\theta - \theta_0)} \right) + \frac{\rho_0}{\rho} e^{-i(\theta - \theta_0)} \log \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} e^{i(\theta - \theta_0)} \right); C_0^{(v)} \right] + \\ &\quad + \frac{a_1 \cos \theta}{\rho} + \frac{b_1 \sin \theta}{\rho}. \end{aligned}$$

Nelle posizioni fatte conveniamo di prendere $a_1 = b_1 = 0$, se il punto O è contenuto in A .

Si vede subito, in base al teorema I di pag. 512, che le costanti $a_0 + a_1$ e $b_0 + b_1$ non dipendono da v . Le funzioni $u_{0,0}^{(v)}(P)$ e $u_{1,0}^{(v)}(P) - \frac{a_1 \cos \theta}{\rho} - \frac{b_1 \sin \theta}{\rho}$ sono armoniche regolari nell'interno di $C_0^{(v)}$, perchè (teorema V) ivi son tali le funzioni del punto P :

$$\Delta_2(\overline{PQ}^2 \log \overline{PQ}) \quad , \quad \rho_0^2 \log \overline{PQ} \quad , \quad \log \overline{PQ} ,$$

$$\rho \rho_0 e^{i(\theta - \theta_0)} \log \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} e^{i(\theta - \theta_0)} \right) + \rho \rho_0 e^{-i(\theta - \theta_0)} \log \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} e^{-i(\theta - \theta_0)} \right) ,$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} e^{i(\theta - \theta_0)} \log \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} e^{-i(\theta - \theta_0)} \right) + \frac{\rho_0}{\rho} e^{-i(\theta - \theta_0)} \log \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} e^{i(\theta - \theta_0)} \right) .$$

Esse riescono univocamente determinate se O è contenuto in A , mentre se ciò non accade, esse variano rispettivamente in due sistemi ∞^2 di funzioni $\{u_{0,0}^{(v)}\}$ e $\{u_{1,0}^{(v)}\}$ in corrispondenza biunivoca, nel senso che fissata una funzione in uno dei due sistemi ne rimane determinata una nell'altro, e viceversa. La determinazione di una coppia di funzioni corrispondenti nei due sistemi dipende dalla scelta di due costanti arbitrarie, e, precisamente, dei coefficienti dei termini $\rho \cos \theta$ e $\rho \sin \theta$ di $u_{0,0}^{(v)}$.

Posto:

$$\begin{aligned} v_0^{(v)}(P) &= \Phi_1[\Delta_2 u, \overline{PQ}^2 \log \overline{PQ}; C_0^{(v)}] + \Phi_1[u, \Delta_2(\overline{PQ}^2 \log \overline{PQ}); C_0^{(v)}] = \\ &= \Phi_2[u, \overline{PQ}^2 \log \overline{PQ}; C_0^{(v)}] , \end{aligned}$$

si ha:

$$[2] \quad v_0^{(v)}(P) = u_{0,0}^{(v)}(P) + \rho^2 u_{1,0}^{(v)}(P) .$$

per ogni punto P interno a $C_0^{(v)}$. Se ora supponiamo fisso il punto P interno a $C_0^{(v)}$, e diciamo μ un qualsivoglia intero positivo, in base al teorema I, si ha:

$$[3] \quad v_0^{(v+\mu)}(P) = v_0^{(v)}(P) ,$$

pertanto, al divergere di v , la funzione $v_0^{(v)}(P)$ converge ad una funzione $v_0(P)$ bi-iperarmonica regolare in ogni punto di B_0 . Analogamente poiché

$$\Delta_2 u(Q) \quad , \quad \log \overline{PQ} ,$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} e^{i(\theta - \theta_0)} \log \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} e^{-i(\theta - \theta_0)} \right) + \frac{\rho_0}{\rho} e^{-i(\theta - \theta_0)} \log \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} e^{i(\theta - \theta_0)} \right)$$

sono funzioni armoniche del punto Q e regolari ⁽¹⁾ nel dominio che ha per completa frontiera le curve $C_0^{(v)}$ e $C_0^{(v+\mu)}$, segue, sempre per il teorema I:

$$[4] \quad u_{1,0}^{(v+\mu)}(P) = u_{0,0}^{(v)}(P).$$

E ciò equivale ad affermare la convergenza della funzione $u_{1,0}^{(v)}(P)$, per $v \rightarrow \infty$, verso una funzione $u_{1,0}(P)$, armonica e regolare in B_0 privato del punto O . Infine dalla [2], che risulta verificata qualunque sia v , e dalla [3] e dalla [4], segue:

$$u_{0,0}^{(v+\mu)}(P) = u_{0,0}^{(v)}(P).$$

Pertanto anche la $u_{0,0}^{(v)}(P)$ converge, per $v \rightarrow \infty$, verso una funzione $u_{0,0}(P)$ armonica regolare in B_0 . Le due funzioni $u_{0,0}(P)$ e $u_{1,0}(P)$ riescono ben determinate se O è contenuto in A , mentre, in caso contrario, la loro determinazione dipende dalla scelta dei coefficienti dei termini $\rho \cos \theta = x - a$, e $\rho \sin \theta = y - b$ di $u_{0,0}(P)$.

Dalla [2], passando al limite, per $v \rightarrow \infty$, si ottiene:

$$[2'] \quad v_0(P) = u_{0,0}(P) + \rho^2 u_{1,0}(P).$$

Se si suppone ora il punto O non contenuto in B_0 , la dimostrazione seguita per dimostrare la convergenza di $u_{1,0}^{(v)}(P)$ e quindi di $u_{0,0}^{(v)}(P)$ verso funzioni armoniche regolari cade in difetto, poiché viene a mancare la regolarità nel dominio che ha per completa frontiera $C_0^{(v)}$ e $C_0^{(v+\mu)}$, della funzione armonica del punto Q :

$$\frac{\rho_0}{\rho} e^{i(\theta-\theta_0)} \log \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} e^{-i(\theta-\theta_0)} \right) + \frac{\rho_0}{\rho} e^{-i(\theta-\theta_0)} \log \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} e^{i(\theta-\theta_0)} \right).$$

Occorre pertanto procedere diversamente.

⁽¹⁾ L'ultima funzione del punto Q scritta è regolare all'esterno di ogni curva C cui non siano esterni i punti O e P . Si può dimostrare ciò facilmente, facendo vedere che risultano regolari all'esterno di detta curva C le funzioni:

$$\log \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} e^{i(\theta-\theta_0)} \right) \quad ; \quad \log \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} e^{-i(\theta-\theta_0)} \right).$$

Considerando la trasformazione:

$$\rho'_0 e^{i\theta'_0} = \frac{\rho e^{i\theta}}{\rho_0 e^{i\theta_0}}$$

ai punti del piano (ρ_0, θ_0) non interni a C , corrispondono quelli del piano (ρ'_0, θ'_0) non esterni ad una curva C' cui è interna l'origine, ma che esclude il punto $(1, 0)$. E poiché

$$\log (1 - \rho'_0 e^{i\theta'_0})$$

è regolare nell'interno di C' , la seconda delle ultime due funzioni scritte è regolare all'esterno di C . Lo stesso si dimostra per la prima.

Scegliamo in B_0 il punto M , che supporremo altresì interno a $C_0^{(v)}$, e poniamo:

$$\overline{MP} = r \quad , \quad \overline{MQ} = r_0 \quad , \quad (\vec{x}, \vec{MP}) = \tau \quad , \quad (\vec{x}, \vec{MQ}) = \tau_0.$$

Si ha:

$$\log \overline{PQ} = \frac{1}{2} \log \left(1 - \frac{r}{r_0} e^{i(\tau - \tau_0)} \right) + \frac{1}{2} \log \left(1 - \frac{r}{r_0} e^{-i(\tau - \tau_0)} \right) + \log r_0.$$

Come per il caso precedente poniamo:

$$a_0 + a_1 = -2 \Phi_2 [u, \rho_0 \cos \theta_0 \log r_0; C_0^{(v)}];$$

$$b_0 + b_1 = -2 \Phi_2 [u, \rho_0 \sin \theta_0 \log r_0; C_0^{(v)}];$$

$$\begin{aligned} u_{0,0}^{(v)}(P) &= \Phi_1 [u, \Delta_2 (\overline{PQ}^2 \log \overline{PQ}); C_0^{(v)}] + \Phi_1 [\Delta_2 u, \rho_0^2 \log \overline{PQ}; C_0^{(v)}] - \\ &- \Phi_1 \left[\Delta_2 u, \rho \rho_0 e^{i(\theta - \theta_0)} \log \left(1 - \frac{r}{r_0} e^{i(\tau - \tau_0)} \right) + \rho \rho_0 e^{-i(\theta - \theta_0)} \log \left(1 - \frac{r}{r_0} e^{-i(\tau - \tau_0)} \right); C_0^{(v)} \right] + \\ &+ \{ 2 \Phi_1 [u, \Delta_2 (\rho_0 \cos \theta_0 \log r_0); C_0^{(v)}] + a_0 \} \rho \cos \theta + \\ &+ \{ 2 \Phi_1 [u, \Delta_2 (\rho_0 \sin \theta_0 \log r_0); C_0^{(v)}] + b_0 \} \rho \sin \theta \\ u_{1,0}^{(v)}(P) &= \Phi_1 [\Delta_2 u, \log \overline{PQ}; C_0^{(v)}] - \\ &- \Phi_1 \left[\Delta_2 u, \frac{\rho_0}{\rho} e^{i(\theta - \theta_0)} \log \left(1 - \frac{r}{r_0} e^{-i(\tau - \tau_0)} \right) + \frac{\rho_0}{\rho} e^{-i(\theta - \theta_0)} \log \left(1 - \frac{r}{r_0} e^{i(\tau - \tau_0)} \right); C_0^{(v)} \right] + \\ &+ \frac{a_1 \cos \theta}{\rho} + \frac{b_1 \sin \theta}{\rho}. \end{aligned}$$

Anche in questo caso le costanti $a_0 + a_1$ e $b_0 + b_1$ non dipendono da v , e le funzioni $u_{0,0}^{(v)}(P)$ e $u_{1,0}^{(v)}(P)$ riescono armoniche e regolari nell'interno di $C_0^{(v)}$, perchè ivi son tali le funzioni del punto P :

$$\begin{aligned} &\rho \rho_0 e^{i(\theta - \theta_0)} \log \left(1 - \frac{r}{r_0} e^{i(\tau - \tau_0)} \right) + \rho \rho_0 e^{-i(\theta - \theta_0)} \log \left(1 - \frac{r}{r_0} e^{-i(\tau - \tau_0)} \right), \\ &\frac{\rho_0}{\rho} e^{i(\theta - \theta_0)} \log \left(1 - \frac{r}{r_0} e^{-i(\tau - \tau_0)} \right) + \frac{\rho_0}{\rho} e^{-i(\theta - \theta_0)} \log \left(1 - \frac{r}{r_0} e^{i(\tau - \tau_0)} \right). \end{aligned}$$

Le funzioni $u_{0,0}^{(v)}$ e $u_{1,0}^{(v)}$ variano in due sistemi ∞^2 , $\{u_{0,0}^{(v)}\}$ e $\{u_{1,0}^{(v)}\}$, posti in corrispondenza biunivoca. La determinazione di una coppia di funzioni corrispondenti dipende dalla scelta dei coefficienti dei termini $x - a$ e $y - b$ di $u_{0,0}^{(v)}$. Per una tale coppia di funzioni si ha in ogni punto P interno a $C_0^{(v)}$:

$$[2] \quad v_0^{(v)}(P) = u_{0,0}^{(v)}(P) + \rho^2 u_{1,0}^{(v)}(P).$$

Dimostriamo, cosa essenziale, che i due sistemi di funzioni $\{u_{0,0}^{(v)}\}$ e $\{u_{1,0}^{(v)}\}$ non dipendono dalla scelta del punto M , e, cioè, che, cambiando M in un altro punto M' di B_0 , ciascuno dei due sistemi si muta in sé. Per far vedere ciò, basta dimostrare che:

$$[5] \quad u_{0,0}^{(v)}(M', P) = u_{0,0}^{(v)}(M, P) + p \rho \cos \theta + q \rho \sin \theta,$$

essendo p e q due costanti.

Poniamo a tal uopo:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M'P} = r' \quad , \quad \overrightarrow{M'Q} = r'_0 \quad , \quad (\vec{x}, \overrightarrow{M'P}) = \tau' \quad , \quad (\vec{x}, \overrightarrow{M'Q}) = \tau'_0 \\ \overrightarrow{MM'} = l \quad , \quad (\vec{x}, \overrightarrow{MM'}) = \varphi. \end{aligned}$$

Tenendo conto che:

$$r' e^{i\tau'} = r e^{i\tau} - l e^{i\varphi} \quad , \quad r'_0 e^{i\tau'_0} = r_0 e^{i\tau_0} - l e^{i\varphi},$$

si ricava subito:

$$\log \left(1 - \frac{r}{r_0} e^{\pm i(\tau - \tau_0)} \right) = \log \left(1 - \frac{r'}{r'_0} e^{\pm i(\tau' - \tau'_0)} \right) - \log \left(1 + \frac{l}{r'} e^{\pm i(\varphi - \tau'_0)} \right).$$

Abbiamo pertanto:

$$\begin{aligned} \Phi_1 \left[\Delta_2 u, \rho \rho_0 e^{i(\theta - \theta_0)} \log \left(1 - \frac{r}{r_0} e^{i(\tau - \tau_0)} \right) + \rho \rho_0 e^{-i(\theta - \theta_0)} \log \left(1 - \frac{r}{r_0} e^{-i(\tau - \tau_0)} \right); C_0^{(v)} \right] = \\ = \Phi_1 \left[\Delta_2 u, \rho \rho_0 e^{i(\theta - \theta_0)} \log \left(1 - \frac{r'}{r'_0} e^{i(\tau' - \tau'_0)} \right) + \rho \rho_0 e^{-i(\theta - \theta_0)} \log \left(1 - \frac{r'}{r'_0} e^{-i(\tau' - \tau'_0)} \right); C_0^{(v)} \right] - \\ - \Phi_1 \left[\Delta_2 u, \rho \rho_0 e^{i(\theta - \theta_0)} \log \left(1 + \frac{l}{r'_0} e^{i(\varphi - \tau'_0)} \right) + \rho \rho_0 e^{-i(\theta - \theta_0)} \log \left(1 + \frac{l}{r'_0} e^{-i(\varphi - \tau'_0)} \right); C_0^{(v)} \right]. \end{aligned}$$

E poiché l'ultima funzione scritta è della forma $p \rho \cos \theta + q \rho \sin \theta$, si vede facilmente, ove si tenga presente la definizione della funzione $u_{0,0}^{(v)}$, che sussiste la [5]. Pertanto la determinazione di $u_{0,0}^{(v)}$ e della corrispondente funzione $u_{1,0}^{(v)}$ dipende unicamente dalla scelta dei coefficienti dei termini $x - a$ e $y - b$ di $u_{0,0}^{(v)}$.

Poiché è armonica e regolare nei punti non interni alla curva $C_0^{(v)}$, la funzione del punto Q :

$$\frac{\rho_0}{\rho} e^{i(\theta - \theta_0)} \log \left(1 - \frac{r}{r_0} e^{-i(\tau - \tau_0)} \right) + \frac{\rho_0}{\rho} e^{-i(\theta - \theta_0)} \log \left(1 - \frac{r}{r_0} e^{i(\tau - \tau_0)} \right),$$

procedendo perfettamente come nel caso di O interno a B_0 , si dimostra che le funzioni $u_{0,0}^{(v)}(P)$ e $u_{1,0}^{(v)}(P)$ convergono, per $v \rightarrow \infty$, verso due funzioni $u_{0,0}(P)$ e $u_{1,0}(P)$ armoniche e regolari in B_0 , la cui determinazione dipende dalla scelta dei coefficienti dei termini $x - a$ e $y - b$ di $u_{0,0}(P)$.

Anche in tal caso, quindi, dalla [2], passando al limite, per $\nu \rightarrow \infty$, si deduce:

$$[2'] \quad v_0(P) = u_{0,0}(P) + \rho^2 u_{1,0}(P).$$

Si fissi ora comunque il punto O_j in B_j e si ponga:

$$\overrightarrow{O_j P} = \rho_j, \quad \overrightarrow{O_j Q} = \rho_{0,j}, \quad (\vec{x}, \overrightarrow{O_j P}) = \theta_j, \quad (\vec{x}, \overrightarrow{O_j Q}) = \theta_{0,j}.$$

Si ha, essendo sempre $\rho_j \neq 0$ al variare di P nel complementare di B_j :

$$\log \overline{PQ} = \frac{1}{2} \log \left(1 - \frac{\rho_{0,j}}{\rho_j} e^{i(\theta_j - \theta_{0,j})} \right) + \frac{1}{2} \log \left(1 - \frac{\rho_{0,j}}{\rho_j} e^{-i(\theta_j - \theta_{0,j})} \right) + \log \rho_j.$$

Poniamo allora:

$$u_{0,j}^{(\nu)}(P) = \Phi_1[u, \Delta_2(\overline{PQ}^2 \log \overline{PQ}); C_j^{(\nu)}] + \Phi_1[\Delta_2 u, \rho_0^2 \log \overline{PQ}; C_j^{(\nu)}] +$$

$$\Phi_1[\Delta_2 u, \rho_0 e^{i(\theta - \theta_0)} \log \left(1 - \frac{\rho_{0,j}}{\rho_j} e^{-i(\theta_j - \theta_{0,j})} \right) + \rho_0 e^{-i(\theta - \theta_0)} \log \left(1 - \frac{\rho_{0,j}}{\rho_j} e^{i(\theta_j - \theta_{0,j})} \right); C_j^{(\nu)}]$$

$$u_{1,j}^{(\nu)}(P) = \Phi_1[\Delta_2 u, \log \overline{PQ}; C_j^{(\nu)}] +$$

$$\Phi_1[\Delta_2 u, \frac{\rho_0}{\rho} e^{i(\theta - \theta_0)} \log \left(1 - \frac{\rho_{0,j}}{\rho_j} e^{i(\theta_j - \theta_{0,j})} \right) + \frac{\rho_0}{\rho} e^{-i(\theta - \theta_0)} \log \left(1 - \frac{\rho_{0,j}}{\rho_j} e^{i(\theta_j - \theta_{0,j})} \right); C_j^{(\nu)}]$$

$$\alpha'_j = -2 \Phi_1[\Delta_2 u, \rho_0 \cos \theta_0; C_j^{(\nu)}], \quad \beta'_j = -2 \Phi_1[\Delta_2 u, \rho_0 \sin \theta_0; C_j^{(\nu)}].$$

Le costanti α_j e β_j non dipendono da ν e le funzioni $u_{0,j}^{(\nu)}$ e $u_{1,j}^{(\nu)}$ riescono univocamente determinate. Mentre la $u_{0,j}^{(\nu)}(P)$ riesce funzione armonica e regolare del punto P all'esterno della curva $C_j^{(\nu)}$, lo stesso avviene della $u_{1,j}^{(\nu)}(P)$, solo se O è contenuto in B_j , mentre diversamente, supposto che la curva $C_j^{(\nu)}$ lasci all'esterno O , la funzione $u_{1,j}^{(\nu)}$ è bensì armonica all'esterno di $C_j^{(\nu)}$, ma ha in O un polo del prim'ordine, perché così avviene (teorema VI) della funzione:

$$\frac{\rho_0}{\rho} e^{i(\theta - \theta_0)} \log \left(1 - \frac{\rho_{0,j}}{\rho_j} e^{i(\theta_j - \theta_{0,j})} \right) + \frac{\rho_0}{\rho} e^{-i(\theta - \theta_0)} \log \left(1 - \frac{\rho_{0,j}}{\rho_j} e^{i(\theta_j - \theta_{0,j})} \right).$$

Posto:

$$v_j^{(\nu)}(P) = \Phi_2[u, \overline{PQ}^2 \log \overline{PQ}; C_j^{(\nu)}]$$

riesce all'esterno di $C_j^{(\nu)}$:

$$[6] \quad v_j^{(\nu)}(P) = [\alpha'_j(x - a) + \beta'_j(x - b)] \log \rho_j + u_{0,j}^{(\nu)}(P) + \rho^2 u_{1,j}^{(\nu)}(P).$$

Con procedimento analogo a quello seguito sopra, si dimostra che, mentre $v_j^{(\nu)}(P)$ converge, per $\nu \rightarrow \infty$, verso una funzione bi-iperarmonica

regolare nel complementare di B_j , $u_{0,j}^{(v)}$ e $u_{1,j}^{(v)}$ tendono verso due ben determinate funzioni armoniche nel complementare di B_j , e, posto:

$$u_{0,j}(P) = \lim_{v \rightarrow \infty} u_{0,j}^{(v)}(P) - (\alpha_j' a + \beta_j' b) \log \overline{O_j P},$$

$$u_{1,j}(P) = \lim_{v \rightarrow \infty} u_{1,j}^{(v)}(P),$$

la funzione $u_{0,j}(P)$ riesce oltre che armonica, regolare nel complementare di B_j , mentre la funzione armonica $u_{1,j}(P)$ è ivi regolare solo se O è contenuto in B_j , avendo, diversamente, un polo del prim'ordine in O .

Dalla [6], passando al limite, per $v \rightarrow \infty$, e posto:

$$\alpha_j = \frac{1}{4\pi} \int_{C_j^{(v)}} \left(\Delta_2 u \frac{dx}{du} - x \frac{d\Delta_1 u}{du} \right) ds, \quad \gamma_j = \frac{1}{4\pi} \int_{C_j^{(v)}} \frac{d\Delta_1 u}{du} ds,$$

$$\beta_j = \frac{1}{4\pi} \int_{C_j^{(v)}} \left(\Delta_2 u \frac{dy}{du} - y \frac{d\Delta_2 u}{du} \right) ds,$$

si deduce:

$$[7] \quad v_j(P) = [(\alpha_j + a\gamma_j)x + (\beta_j + b\beta_j)y] \log \overline{O_j P} + u_{0,j}(P) + \rho^2 u_{1,j}(P).$$

Poniamo ora se O non è contenuto in A :

$$u_0(P) = u_{0,0}(P) - \sum_{j=1}^m u_{0,j}(P)$$

$$u_1(P) = u_{1,0}(P) - \sum_{j=1}^m u_{1,j}(P),$$

mentre se O è contenuto in A , detta

$$\frac{a_j \cos \theta + b_j \sin \theta}{\rho}$$

la parte principale di $u_{1,j}(P)$ nell'intorno di O , si ponga:

$$u_0(P) = u_{0,0}(P) - \sum_{j=1}^m (a_j \cos \theta + b_j \sin \theta) \rho - \sum_{j=1}^m u_{0,j}(P)$$

$$u_1(P) = u_{1,0}(P) - \sum_{j=1}^m u_{1,j}(P) - \sum_{j=1}^m \frac{a_j \cos \theta + b_j \sin \theta}{\rho}.$$

In entrambi i casi le funzioni $u_0(P)$ e $u_1(P)$ riescono armoniche e regolari in A , e, mentre nel primo caso la loro determinazione dipende dalla scelta dei coefficienti dei termini $x = a$, $y = b$ di $u_0(P)$, nel secondo caso esse sono univocamente determinate.

Poiché in ogni punto P di A è:

$$u(P) = v_0(P) + \sum_{j=1}^m v_j(P)$$

si ha, per la [2'] e per la [7]:

$$u(P) = \sum_{j=1}^m [(\alpha_j + a\gamma_j)x + (\beta_j + b\gamma_j)y] \log \overline{O_j P} + u_0(P) + \overline{OP}^2 u_1(P).$$

E il teorema resta così completamente dimostrato.

* * *

Dal teorema precedente si vede come la presenza in ogni insieme B_i del termine singolare del tipo

$$(\alpha x + \beta y) \log \overline{O_i P}$$

non permetta di decomporre la funzione alla maniera di ALMANZI, ma si pervenga invece ad una decomposizione del tipo di PICONE. E in verità, la funzione singolare in O_i anzidetta è bensì decomponibile alla maniera d'ALMANZI, ma le funzioni armoniche componenti hanno quel punto come punto di diramazione trascendente e, pertanto, son tali che nessun loro ramo dà luogo ad una funzione armonica regolare nell'intorno del punto. E difatti, supposto per semplicità che O_i coincida con l'origine delle coordinate O , e introdotto un sistema di coordinate polari (ρ, θ) , si ha:

$$(\alpha x + \beta y) \log \rho = w_0 + \rho^2 w_1,$$

essendo le funzioni armoniche w_0 e w_1 , così definite:

$$w_0 = \frac{1}{2} \alpha (x \log \rho - y\theta) + \frac{1}{2} \beta (y \log \rho + x\theta)$$

$$w_1 = \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\rho} (\cos \theta \log \rho + \theta \sin \theta) + \frac{1}{2} \frac{\beta}{\rho} (\sin \theta \log \rho - \theta \cos \theta).$$

E si vede subito che le funzioni w_0 e w_1 così definite non sono regolari nell'intorno di O .

Matematica. — *Sugli integrali di alcune equazioni differenziali considerate come funzioni dei parametri che vi figurano, per grandi valori dei parametri.* Nota di KYRILLE POPOFF, presentata ⁽¹⁾ da ENRICO BOMPIANI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Lo studio del movimento pendolare del proiettile rotante, conduce ad una equazione differenziale della forma:

$$[1] \quad y'' + kP(x)y' + kQ(x)y + kS(x) = 0$$

dove k è un parametro dipendente dalla velocità di rotazione del proiettile che prende valori considerevoli.

Certe questioni della fisica-matematica conducono d'altra parte ad equazioni della forma

$$[2] \quad y'' + k\varphi(x)y = 0.$$

e

$$[3] \quad \frac{d[A(x)y']}{dx} + \frac{B(x)k^2 + C(x)}{A(x)}y = 0$$

di cui si cerca l'integrale per grandi valori di k .

Queste ultime equazioni sono state studiate da STURM ed E. PICARD.

Ispirandosi ai lavori del PICARD e alle ricerche del POINCARÉ sulle serie asintotiche, HORN ha cercato di rappresentare gli integrali delle equazioni [2] e [3] per grandi valori di k per mezzo delle serie asintotiche.

Così, per esempio, accade per [3], quando $A(x)$ e $B(x)$ sono positivi ad un integrale della forma

$$[4] \quad y(x) = \pi_1 \left(\frac{1}{k} \right) \cos k\omega + \pi_2 \left(\frac{1}{k} \right) \sin k\omega,$$

(¹) Nell'Adunanza del 20 febbraio 1942-XX.

dove ω è una funzione di x , $\pi_1\left(\frac{1}{k}\right)$ e $\pi_2\left(\frac{1}{k}\right)$ essendo serie di potenze positive e intere di $\left(\frac{1}{k}\right)$, i cui coefficienti, funzioni di x , si ottengono, dopo

due differenziazioni di serie a termine, per mezzo di calcoli ricorrenti.

MAGNUS DE SPARRE nei suoi studi sul movimento pendolare del proiettile è stato condotto ad una equazione del tipo [1] che egli ha cercato di risolvere per mezzo di serie precedenti secondo le potenze di $\frac{1}{k}$.

Le soluzioni di HORN e di MAGNUS DE SPARRE hanno guidato quasi tutti quelli che si sono occupati della teoria del proiettile rotante (¹).

Nelle nostre ricerche (²), sullo stesso soggetto, siamo riusciti a mettere le equazioni differenziali di MAYEWSKI-BURZIO sotto forma di un sistema di equazioni integrali di VOLTERRA, di prima specie, che dànno la soluzione del problema per mezzo di serie rapidamente convergenti per grandi valori di k .

In quanto segue noi ci occupiamo delle equazioni [1] e [3] che noi mettiamo sotto forma di equazioni integrali di VOLTERRA di prima specie

i cui nuclei sono funzioni di $\frac{1}{k}$ e di $e^{-\int_0^x kF(x) dx}$ con $F(x) > 0$; ciò rende su-

perflue ricerche faticose sulla legittimità delle differenziazioni termine a termine delle serie asintotiche di HORN e di MAGNUS DE SPARRE.

(¹) PICARD EMILE, *Traité d'Analyse*, to. III (1908); M. DE SPARRE; a) *Sur le mouvement des projectiles oblongs autour de leur centre de gravité et sur les conditions de stabilité de ces projectiles*. « Mémorial de l'Artillerie de la Marine », 22 (1894), pagg. 85-137; b) *Sur le mouvement des projectiles autour de leur centre de gravité*. « Mémorial de l'Artillerie de la Marine » 26 (1898), pagg. 215-254; HORN J., a) *Ueber eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einem willkürlichen Parameter*. « Mathematische Annalen » 52, (1899), pagg. 271-292; b) *Ueber lineare Differentialgleichungen mit einem veränderlichen Parameter*. « Math. Annalen », 52 (1899), pagg. 340-362; FOWLER, GALLOP, LOCK ET RICHMOND, *Aérodynamique d'un projectile tournant*. « Mémorial de l'Artillerie française », 1 (1922), pagg. 379-485 e 727-751; CHARBONNIER P., *Sur le mouvement gyroscopique du projectile*. « Mémorial de l'Artillerie française » 6 (1927), pagg. 651-700; SHAPOVALOV B. P.; *About integration of the equation which determines the rotating movement of a shell*. « Academy of Sciences » USSR. Departement of technical Sciences. Mechanical Institute 3 (1939), pagg. 153-156 (in russo).

(²) POPOFF KYRILLE, *Sur le mouvement pendulaire des projectiles*. « Mémorial de l'Artillerie française », 15, (1936), pagg. 1133-1179 « C. R. des Séances de l'Académie des Sciences de Paris », 203 (1936), pagg. 295-297, 359-362 e 657-659, « Revue de mathématique de l'Union interbalkanique » 1 (1936), pagg. 101-127; 2 (1938).

Consideriamo dapprima l'equazione [1].

$$y'' + kP(x)y' + kQ(x)y + kS(x) = 0.$$

Ci proponiamo di integrare queste equazioni per grandi valori del parametro k e di trovare l'integrale corrispondente alle condizioni iniziali: $y(0) = a$, $y'(0) = b$, qualunque sia k .

Posto

$$[4] \quad R = \frac{Q}{P}, \quad T = \frac{S}{P}, \quad u = \frac{1}{P}$$

la [1] si scrive:

$$[5] \quad y' = -Ry - \frac{u}{k}y'' - T$$

ciò che dà

$$y(x) = e^{-\int_0^x R dx} \left[a - \int_0^x \left(\frac{u}{k} y'' + T \right) e^{\int_0^x R dx} dx \right],$$

oppure

$$[6] \quad y(x) = f(x) - \frac{e^{\int_0^x R dx}}{k} \int_0^x y''(x) \Theta(x) dx,$$

dove

$$[7] \quad \left\{ \begin{aligned} f(x) &= e^{\int_0^x R dx} \left[a - \int_0^x T e^{\int_0^x R dx} dx \right] \\ \Theta(x) &= u(x) e^{\int_0^x R dx}, \quad \Theta(0) = u(0), \\ \Theta'(x) &= [u'(x) + u(x) R(x)] e^{\int_0^x R dx}, \quad \Theta'(0) = u'(0) + u(0) R(0), \\ \Theta''(x) &= [u''(x) + 2u'(x) R(x) + u(x) R(x) + u(x) R(x)^2] e^{\int_0^x R dx}. \end{aligned} \right.$$

Si ha d'altra parte, integrando per parti,

$$[8] \quad \int_0^x y''(x) \Theta(x) dx = y'(x) \Theta(x) - b \Theta(0) - \Theta'(x) y(x) + \\ + \Theta'(0) a + \int_0^x y(x) \Theta''(x) dx.$$

Con ciò, e tenuto conto di [7], l'equazione [6] prende la forma

$$[9] \quad y(x) \left[1 - \frac{[u'(x) + u(x) R(x)] \cdot e^{\int_0^x R dx}}{k} \right] = f(x) - \frac{e^{\int_0^x R dx}}{k} [a\Theta'(0) - b\Theta(0)] - \\ - \frac{u(x)}{k} y'(x) - \frac{e^{\int_0^x R dx}}{k} \int_0^x y(x) \Theta''(x) dx.$$

D'altra parte, scritta la [1] sotto la forma:

$$\frac{dy'}{dx} = -kPy' - kQy - kS,$$

si ottiene

$$[10] \quad y'(x) = e^{\int_0^x kP dx} \left[b - k \int_0^x (Qy + S) e^{\int_0^x kP dx} dx \right].$$

Con questo valore di $y'(x)$ l'equazione [9] diventa dopo alcune trasformazioni facili:

$$[11] \quad y(x) = F(x) - \int_0^x y(s) N(x, s) ds$$

dove si è posto

$$[12] \quad \left\{ \begin{aligned} F(x) &= \frac{f(x) - \frac{e^{\int_0^x R dx}}{k} [a\Theta'(0) - b\Theta(0)] - \frac{u(x)}{k} b \cdot e^{\int_0^x R dx} - u(x) \int_0^x S(s) e^{\int_0^s R ds} ds}{1 - \frac{u'(x) + u(x) R(x)}{k}} \\ N(x, s) &= \frac{\frac{\Theta''(s) e^{\int_0^s R dx}}{k} - Q(s) u(x) e^{\int_0^s R dx}}{1 - \frac{u'(x) + u(x) R(x)}{k}}. \end{aligned} \right.$$

Questa è una equazione di VOLTERRA di prima specie che ci dà la soluzione voluta per grandi valori di k , quando $P(x)$ resta positivo. Per $k = +\infty$ si avrà $y(x) = f(x)$, ciò che si ottiene direttamente da [1], mettendo da principio $k = \infty$.

Consideriamo ora il caso in cui $P(x)$ prende valori negativi e positivi. Per questo noi conserviamo le formule [4], [5], [6], [7], [8], e [9].

Per esprimere $y'(x)$ per mezzo di $y(x)$, metteremo l'equazione [1] sotto la forma:

$$[1 \text{ bis}] \quad y'' + k^2 P(x)^2 y' - k^2 P(x)^2 y' + kP(x) y' + kQ(x) y + kS(x) = 0$$

che si può scrivere anche

$$[13] \quad \frac{dy'}{dx} = -k^2 P(x)^2 y' + [k^2 P(x)^2 y' - kP(x) y' - kQ(x) y - kS(x)]$$

da cui si trae:

$$[14] \quad y'(x) = e^{\int_0^x k^2 P(s)^2 ds} \left\{ b + \int_0^x [k^2 P(s)^2 y'(s) - \right. \\ \left. - kP(s) y(s) - kQ(s) y(s) - kS(s)] e^{\int_0^s k^2 P(s)^2 ds} ds \right\}.$$

Ma l'integrazione per parti dà qui

$$[15] \quad \int_0^x k^2 P(s)^2 e^{\int_0^s k^2 P(s)^2 ds} y'(s) ds = k^2 P(x)^2 e^{\int_0^x k^2 P(x)^2 dx} y(x) - ak^2 P(0)^2 - \\ - k^2 \int_0^x y(s) [2P(s)P'(s) + k^2 P(s)^4] e^{\int_0^s k^2 P(s)^2 ds} ds$$

dopo di che l'equazione [14] diventa

$$y'(x) = be^{\int_0^x k^2 P(x)^2 dx} - ak^2 P(0)^2 e^{\int_0^x k^2 P(x)^2 dx} + k^2 P(x)^2 y(x) - \\ - ke^{\int_0^x k^2 P(x)^2 dx} \int_0^x [S(s) + y(s)Q(s) + y(s)P(s)] e^{\int_0^s k^2 P(s)^2 ds} ds - \\ - k^2 \int_0^x y(s) [2P(s)P'(s) + k^2 P(s)^4] e^{\int_0^s k^2 P(s)^2 ds} ds.$$

Con questo valore di $y'(x)$ l'equazione [9] prende la forma

$$[16] \quad y(x) = F(x) + \int_0^x y(s) N(x, s) ds$$

dove questa volta si ha

$$[17] \quad \left\{ \begin{aligned} F(x) &= \frac{f(x) - \frac{1}{e^0} \int_0^x R(x) dx - \frac{1}{k} [a\Theta'(0) - b\Theta(0)] - \\ &\quad - \frac{u(x)}{k} \frac{\int_0^x k^2 P(x)^2 dx}{e^0 (b - ak^2 P(0)^2) + u(x) \int_0^x S(s) e^s ds} }{1 - \frac{u'(x) + u(x)R(x)}{k} + ku(x)P(x)^2} \\ N(x, s) &= \frac{\left\{ -\frac{\Theta''(s)}{k} \frac{\int_0^x R(x) dx}{e^0} + u(x)[P(s) + Q(s)] \frac{\int_0^x k^2 P(s)^2 ds}{e^s} + \right. \\ &\quad \left. + ku(x)[2P(s)P'(s) + k^2 P(s)^4] \frac{\int_0^x k^2 P(s)^2 ds}{e^s} \right\}}{1 - \frac{u'(x) + u(x)R(x)}{k} + ku(x)P(x)^2} \end{aligned} \right.$$

L'integrale di [16] è rapidamente convergente, per grandi valori di k . Consideriamo ora l'equazione

$$[18] \quad y'' + P(x)y' + kQ(x)y = 0$$

che è l'equazione [3] considerata da HORN, generalizzata. Si cerca l'integrale di questa equazione per grandi valori di k corrispondenti alle condizioni iniziali $y(0) = a$, $y'(0) = b$.

Posto ancora

$$[19] \quad R = \frac{Q}{P}, \quad u = \frac{1}{P},$$

si avrà da considerare l'equazione:

$$y' = -kRy - uy''$$

che dà

$$y(x) = e^{\int_0^x kR dx} \left[a - \int_0^x [kR(x)y(x) + u(x)y''(x)] e^{\int_0^x kR(x) dx} dx \right]$$

oppure

$$[20] \quad y(x) = ae^{\int_0^x kR dx} - e^{\int_0^x kR dx} \int_0^x kR(s)y(s)e^{\int_0^s kR(s) ds} ds - \\ - e^{\int_0^x kR(x) dx} \int_0^x y''(s)\Theta(s) ds,$$

dove si è posto

$$[21] \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta(x) = u(x) e^{\int_0^x kR(x) dx}, \quad \Theta(0) = u(0) \\ \Theta'(x) = [u'(x) + ku(x)R(x)] e^{\int_0^x kR(x) dx}, \quad \Theta'(0) = u'(0) + ku(0)R(0) \\ \Theta''(x) = [u''(x) + 2ku'(x)R(x) + ku(x)R'(x) + k^2u(x)R(x)^2] e^{\int_0^x kR(x) dx} \end{array} \right.$$

L'integrazione per parte dà qui:

$$[22] \quad \int_0^x y''(s) \Theta(s) ds = y'(x) \Theta(x) - b\Theta(0) - y(x) \Theta'(x) + \\ + a\Theta'(0) + \int_0^x y(s) \Theta''(s) ds.$$

D'altra parte dall'equazione [18] messo sotto la forma:

$$\frac{dy'}{dx} = -P(x)y' - kQ(x)y,$$

si trae

$$[23] \quad y'(x) = e^{-\int_0^x P(x) dx} \left[b - k \int_0^x Q(s)y(s) e^{\int_0^s P(s) ds} ds \right].$$

Tenendo conto di [21], [22] e [23] l'equazione [20] diventa:

$$[24] \quad y(x) = F(x) - \int_0^x y(s) N(x, s) ds,$$

dove si ha

$$F(x) = \frac{1}{k} \frac{[a - a\Theta'(0) + b\Theta(0)] e^{\int_0^x kR(x) dx} - bu(x) e^{\int_0^x P(x) dx}}{-u(x)R(x) + \frac{1 - u'(x)}{k}}$$

$$N(x) = \frac{\left\{ \begin{array}{l} [ku(s)R(s)^2 + u(s)R'(s) + 2u'(s)R(s) + \frac{u''(s)}{k}] e^{\int_0^s kR(s) ds} + \\ + u(x)Q(s) e^{\int_0^s P(s) ds} \end{array} \right\}}{-u(x)R(x) - \frac{1 - u'(x)}{k}}.$$

È una equazione di VOLTERRA di prima specie, il cui nucleo tende verso zero per $k \rightarrow +\infty$ se $R(x) > 0$.

Si possono trattare nella stessa maniera equazioni lineari di ordine superiore con o senza secondo membro.

La teoria delle equazioni di VOLTERRA ci permette di scrivere il loro integrale sotto la forma di serie che permettono di vedere più chiaro negli sviluppi di HORN.

Geofisica. — *Sulla variazione della pressione nell'interno della Terra.* Nota di GIOVANNI BOAGA, presentata ⁽¹⁾ da GINO CASSINIS, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Il problema della determinazione della pressione p nell'interno della Terra è stato considerato da vari autori; fra essi meritano di essere ricordati LAPLACE e ROCHE, i quali, per poter valutare la pressione nel centro, escogitarono particolari ipotesi sulla variazione della densità ρ ⁽²⁾. Anche altri autori si accinsero al calcolo della pressione centrale, limitandosi a dire, per il resto del corpo terrestre, *che gli strati interni sono sottoposti a grandissime pressioni non riproducibili nei laboratori*. Rimane allora giustificata l'opportunità di mettere in evidenza, con dati numerici, quali siano le più probabili pressioni che devono sopportare gli strati interni e contemporaneamente ricavare una espressione analitica atta a dare la pressione in funzione della profondità.

Questa ricerca, d'altra parte, può tornare utile a quanti si occupano di fenomeni aventi il loro campo di azione nell'interno del nostro pianeta, come, per esempio, quelli relativi alla propagazione e riflessione delle onde sismiche, ecc.

È ovvio che a base di tale ricerca è necessario porre una ipotesi sulla variazione della densità. Fra le varie ipotesi finora escogitate (LEGENDRE, ROCHE, HELMERT, ecc.) quella riproducente tutti i dati geodetici e geofisici, riferentisi all'ellissoide internazionale di HAYFORD, attualmente accettati dalle Autorità scientifiche, è la seguente:

$$[1] \quad \rho = \rho_0 (1 - \alpha a^2 + \beta a^4 - \gamma a^6)$$

i cui coefficienti α , β , γ e la densità al centro ρ_0 furono recentemente calcolati, appunto, in modo da soddisfare ai dati accennati ⁽³⁾.

⁽¹⁾ Nell'Adunanza del 20 febbraio 1942-XX.

⁽²⁾ F. TISSERAND, *Mécanique Céleste*, to. II, pag. 241.

⁽³⁾ G. BOAGA, *Sopra una ipotesi relativa alla variazione della densità nell'interno della Terra compatibile con i moderni dati geodetici e geofisici*. « Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere », vol. LXXII, 3^o della serie III, fasc. II, anno 1939.

Il parametro a della [1] è dato dalla

$$[2] \quad a = \frac{r}{R}$$

essendo r la distanza dello strato che si considera dal centro e R il raggio medio terrestre.

La gravità nell'interno del corpo terrestre, fatta astrazione dalla forza centrifuga, è definita dalla

$$[3] \quad g = \frac{4\pi\varepsilon}{r^2} \int_0^r \rho r^2 \cdot dr$$

con ε costante dell'attrazione universale.

Intendendo nella [3] la [1], tenendo conto della [2], si perviene alla

$$[4] \quad g(a) = \frac{4}{3} \pi \varepsilon \rho_0 R \left\{ 1 - \frac{3}{5} \alpha a^2 + \frac{3}{7} \beta a^4 - \frac{3}{9} \gamma a^6 \right\} a$$

che può essere utilizzata per il calcolo della gravità nei vari strati interni in funzione dei coefficienti della funzione di densità [1].

Ciò premesso, osserviamo che per lo strato individuato dalla distanza r , per un aumento dr di tale distanza, si viene ad avere una variazione di pressione dp - sull'unità di superficie - espressa dalla:

$$[5] \quad dp = \rho g \cdot dr.$$

Integrando la [5], tenendo conto delle [1] e [4] ed estendendo i limiti della integrazione dallo strato generico r alla superficie esteriore caratterizzata dal raggio R , si perviene alla seguente formula per il calcolo della pressione gravitante sull'unità superficiale dello strato interno, avente dal centro la distanza $r = aR$:

$$[6] \quad p = \frac{3}{4} \pi \varepsilon \rho_0^2 R^2 \left\{ \sum_0^6 (-1)^i C_i - \sum_0^6 (-1)^i C_i \cdot a^{2i+2} \right\}$$

dove i coefficienti C_i , come facilmente verificasi, sono espressi da:

$$[7] \quad \left\{ \begin{array}{ll} C_0 = \frac{1}{2} & C_4 = \frac{3}{70} \beta^2 + \frac{7}{75} \gamma \\ C_1 = \frac{2}{5} \alpha & C_5 = \frac{4}{63} \beta \gamma \\ C_2 = \frac{1}{10} \alpha^2 + \frac{5}{21} \beta & C_6 = \frac{1}{42} \gamma^2 \\ C_3 = \frac{9}{70} \alpha \beta + \frac{1}{6} \gamma \end{array} \right.$$

La [6] è fondamentale per il problema in esame, essa ci dà la possibilità della determinazione delle pressioni a varie profondità in funzione dei coefficienti α, β, γ della funzione di densità, della densità centrale ρ_0 , del raggio medio terrestre R e della costante ε dell'attrazione universale.

Nella [6] esprimendo ρ_0 in *gr. cm*⁻³ ed R in *cm* risulta p espresso in *dine. cm*⁻². Volendo invece la pressione p espressa in *atmosfera*, basterà, dividere i due membri della [6] per

$$[8] \quad b = hD \cdot g_0$$

con h , come di consueto, altezza del barometro (76 cm) e D densità del mercurio a zero gradi (13,60). Ora, poichè la gravità superficiale può essere espressa anche mediante la

$$[9] \quad g_0 = \varepsilon \frac{M}{R^2} = \frac{4}{3} \pi \varepsilon R \rho_m$$

con ρ_m densità media, la [8] assume la forma equivalente

$$[10] \quad b = \frac{4}{3} \pi \varepsilon (hD) R \rho_m.$$

Dividendo membro a membro la [6] e la [10] si ottiene la:

$$[11] \quad \frac{p}{b} = K_0 - K \cdot \sum_0^6 (-1)^i C_i a^{2i+2}$$

con K e K_0 costanti definite dalle:

$$[12] \quad K = \frac{\rho_0^2 R}{(hD) \rho_m} \quad K_0 = K \cdot \sum_0^6 (-1)^i C_i.$$

Per $a = 0$ la [11] ci fornisce la:

$$\left(\frac{p}{b} \right)_0 = K_0.$$

Pertanto K_0 rappresenta la pressione, al centro della terra, espressa in *atmosfera*.

Per $a = 1$, ancora dalla [11], risulta, tenendo conto della seconda delle [12]:

$$\left(\frac{p}{b} \right)_1 = 0$$

come effettivamente succede trascurando, come abbiamo trascurato noi, la pressione esercitata sulla superficie esteriore della terra dalla atmosfera che l'avvolge.

Passando ai numeri, ponendo:

$$\begin{aligned} \rho_0 &= 11,63 & \alpha &= 1,2795 & \beta &= 0,7642 & \gamma &= 0,2552 \text{ (4)} \\ R &= 6,371 \cdot 10^8 & (hD) &= 1033,6 & \rho_m &= 5,52 \end{aligned}$$

le costanti [12] assumono i valori:

$$[13] \quad K = 1510342 \text{ atm.} \quad K_0 = 3086234 \text{ atm.}$$

mentre i coefficienti C_i definiti dalle [7] risultano degli importi:

$$[14] \quad \left\{ \begin{array}{ll} C_0 = 0,50000 & C_4 = 0,04885 \\ C_1 = 0,51180 & C_5 = 0,01238 \\ C_2 = 0,34566 & C_6 = 0,00155 \\ C_3 = 0,16814 \end{array} \right.$$

Con i valori [13] e [14] la [11] rimane ben definita e risulta particolarmente adatta al calcolo delle pressioni alle varie profondità p , quando si tenga conto della [2], ossia quando si ponga:

$$[15] \quad a = 1 - P^{(km)} \cdot 0,0001583.$$

Per avere un criterio circa la *costituzione interna terrestre*, accettata l'ipotesi [1], abbiamo voluto riportare nel quadro che segue le densità, le gravità, le pressioni a varie profondità equidistanti sottoponendo al calcolo numerico le [1], [4] e [11] facendo variare a di decimo in decimo da 1 a 0.

Per rendere poi completo il quadro abbiamo pure aggiunto una colonna dove sono riportati gli *schiacciamenti delle superficie interne isodensitive* alle medesime profondità (5).

Il PIZZETTI con un calcolo approssimato partendo dall'ipotesi di LEGENDRE sulla variazione della densità interna, pervenne, per la pressione al centro, all'importo di $3,2 \cdot 10^6$ atm. (6) superiore di circa 100.000 atm. al valore da noi ricavato con la [11] partendo dall'ipotesi [1].

Il PREY (7), con l'ipotesi di ROCHE, pervenne al valore di $2,9 \cdot 10^6$ atm. inferiore di circa 200.000 atm. al nostro risultato.

(4) Vedi pubblicazione citata (2).

(5) Cfr. G. BOAGA, *Sulla variazione degli schiacciamenti delle superficie isodensitive nell'interno del corpo terrestre* (in corso di pubblicazione sulla rivista « L'Universo » anno 1942).

(6) Cfr. P. PIZZETTI, *Principii della teoria meccanica della figura dei pianeti*. Pisa, ed. Spoerri, 1913, pag. 220.

(7) Cfr. A. PREY, *Einführung in die Geophysik*. Berlino, 1932.

<i>a</i>	Profondità in km.	Inversi degli schiacc.	Densità in gr. cm ⁻³	Gravità in Gal	Pressioni in	
					atmosfera	Kg. cm ⁻²
1,00	0	297,0	2,67	983	0,000 · 10 ⁶	0,000 · 10 ⁶
0,90	637	306,4	3,87	1020	0,150	0,154
0,80	1274	313,3	4,97	1084	0,411	0,425
0,70	1911	317,4	6,13	1001	0,755	0,780
0,60	2548	320,4	7,29	947	1,165	1,203
0,50	3185	323,0	8,42	856	1,610	1,663
0,40	3823	325,0	9,46	733	2,057	2,125
0,30	4460	327,2	10,36	579	2,465	2,546
0,20	5097	328,7	11,06	401	2,796	2,888
0,10	5734	329,7	11,48	206	3,011	3,110
0,00	6371	330,0	11,63	0	3,086	3,188

Si viene così a riconfermare, con altro esempio, la necessità di utilizzare la [1], i cui coefficienti soddisfano ai moderni desiderata geodetico-geofisico, in tutti quei problemi che abbisognano di una funzione analitica, sulla variazione della densità interna terrestre.

Ci proponiamo in un altro studio di ripetere questa ricerca prendendo a base dei calcoli la moderna ipotesi del BULLEN sulla discontinuità della densità interna ^(*).

(*) Cfr. G. BOAGA, *Sopra l'ipotesi di Bullen sulla variazione discontinua della densità nell'interno della Terra e sulla conseguente variazione della gravità*. « Pontificia Accademia Scientiarum », anno V, vol. V, 1941.

Antropologia. — *Variabilità e correlazione intra ed inter-razziale* ⁽¹⁾. Nota preliminare di ALFREDO SACCHETTI, presentata ⁽²⁾ da SERGIO SERGI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Un problema fondamentale in antropologia è quello della differenziazione dei gruppi umani intesi come *entità* essenzialmente naturali o biologiche, entità che non devono quindi essere confuse con gli aggruppamenti umani a carattere esclusivamente storico o sociale, poichè non hanno, generalmente, nulla di comune col concetto di popolo, di lingua, di nazionalità, di costumi. « Questi concetti — disse opportunamente il NICEFORO — rispondono ad aggruppamenti puramente artificiali, ossia non antropologici, e appartengono alla storia, di cui sono il prodotto ». Ciò non vuol dire però che l'antropologia debba fare completamente astrazione da tutto quanto può essere definito sotto i termini di popolo, nazione, lingua, civiltà. Anzi, spesso, sono proprio questi concetti che, per primi, nei casi pratici, devono essere affrontati; sarà solo successivamente compito fondamentale per l'antropologo quello di giudicare se, ad esempio, due aggruppamenti umani che erano prima distinti soltanto per una caratteristica storica o comunque sociale, vanno considerati come facenti parte di un unico ceppo originario o invece sono da ritenersi anche da un punto di vista strettamente biologico essenzialmente differenti.

E in qual grado ?

Ecco un secondo problema di non minore portata. In entrambi i casi però ci si trova sempre a dover risolvere una comune questione di metodo, sulla quale fu scritto molto in passato e forse ancora molto si scriverà in futuro. Si tratta della scelta dei caratteri sui quali basare il giudizio, e ancora, della importanza relativa che deve attribuirsi a questo o a quel carattere, in altre parole, della valutazione gerarchica dei singoli caratteri come mezzo di differenziazione dei gruppi umani.

È noto che un qualsiasi carattere antropometrico, sia esso eminentemente morfologico, fisiologico o psicologico, perchè possa considerarsi

⁽¹⁾ Dall'Istituto di Antropologia della R. Università di Roma.

⁽²⁾ Nell'Adunanza del 20 febbraio 1942-XX.

veramente atto alla differenziazione dei gruppi umani, differenziazione intesa nel senso strettamente biologico al quale ho accennato, deve innanzitutto rispondere a dei requisiti fondamentali:

- a) grande e significativa variabilità da gruppo a gruppo;
- b) relativa minore variabilità in seno ai singoli gruppi e quindi fra i vari individui che compongono ciascun gruppo;
- c) sicura ereditarietà secondo leggi determinate;
- d) esistenza di possibilità limitate di variazioni dovute ai così detti fattori ambientali.

All'esame di queste quattro voci e, per ora, in modo particolare alle prime due, ho dedicato una ricerca laboriosa e complessa. Con essa, è evidente, ho dovuto affrontare innanzitutto la soluzione di problemi a carattere essenzialmente biometrico. I risultati che si potranno così raggiungere nel campo specifico della valutazione della attitudine dei caratteri, a differenziare i gruppi dovranno però essere interpretati alla luce delle attuali conoscenze sulla eredità e sulle influenze dei mezzi ambienti. Solo per questa via infatti si potrà avere una visione integrale e sintetica del complesso problema che ha tanto assillato i maestri di tutte le più importanti scuole antropologiche. Ma su queste questioni generali mi soffermerò in modo particolare nel lavoro definitivo di prossima pubblicazione e che sarà dedicato ai *caratteri antropometrici come mezzo di differenziazione dei gruppi umani*. Pur tuttavia, anche questo non avrà fine a se stesso. Perché la sintesi abbia valore veramente scientifico occorre, al solito, una analisi profonda e sicura, analisi che è possibile soltanto attraverso lo studio successivo dei singoli vari aspetti della questione. Appunto per tale considerazione ho voluto per ora limitare l'indagine anche per quanto riguarda i caratteri presi in esame che si riducono soltanto a poche dimensioni lineari del corpo e della testa e appena a qualche indice. Ciò non ostante si sono dovuti affrontare vari problemi, e lo scopo del lavoro, del resto, non riposa soltanto nella illustrazione dei risultati specifici raggiunti, ma anche in ciò che riguarda la stessa impostazione metodologica del piano di ricerche. Impostazione che dovrà forse mutare secondo la natura dei fenomeni presi in esame, ma che tuttavia potrà rappresentare un punto di partenza per le ulteriori indagini.

La ricerca non va inoltre considerata a sè, limitatamente ai suoi risultati, anche perchè vuol essere un contributo ad un quadro ben più vasto di indagini, che ha la sua base in quella revisione metodologica di cui gli studiosi più che mai hanno sentito la necessità oggi che, in questa scienza, i caratteri da studiare sono divenuti tanto diversi e complessi. Dalle caratteristiche fisiologiche del sangue si passa a quelle del metabolismo, alla spirometria, alla psicometria, alla somatometria, alla osteometria, allo studio statistico dell'anatomia normale e patologica, dei problemi genetici i più svariati e complessi, della criminologia, della biotipologia, e

così si potrebbe dire infine di tutte quelle scienze che, studiando l'uomo o le varietà umane nelle loro caratteristiche biologiche, sono suscettibili di trattazione statistica.

Questi principi hanno ispirato i miei studi di metodologia antropometrica di cui qualche risultato è stato già pubblicato in precedenti scritti ⁽¹⁾. Ma devo ora limitarmi a qualche spunto appena sul problema che ha dato luogo a questa nota preventiva.

* * *

Variabilità dei valori medi dei vari gruppi.

Variabilità in seno ai singoli gruppi e quindi fra i vari individui che compongono ciascun gruppo.

Ecco i due fondamentali aspetti della questione che evidentemente occorre innanzitutto affrontare per la impostazione del problema specifico: valutazione della attitudine di ciascun carattere alla differenziazione dei gruppi umani. In altre parole doveva effettuarsi una pratica determinazione di tutte le variabilità intra ed interrazziali, e sempre sullo stesso materiale, in maniera da poter procedere ai confronti reciproci dei singoli caratteri antropometrici.

Ho adottato allo scopo un semplice rapporto tra i due tipi di variabilità, rapporto che io denomino *coefficiente relativo di variabilità interrazziale* (C R V I). Per il calcolo della variabilità tra i valori medi di più gruppi mi sono servito a preferenza della differenza media del GINI, poichè questa non presume la solita distribuzione normale o gaussiana del fenomeno, il che evita ogni discussione sulla distribuzione dei valori medi dello stesso carattere rilevato in più gruppi etnici. Per la determinazione della variabilità intrarazziale ho invece eseguito il solito calcolo dello scostamento quadratico medio o sigma. Il C R V I risulta pertanto così formulato:

$$\text{C R V I} = \frac{\Delta'}{\frac{1}{z} \sum_{i=1}^z \sigma_i}$$

⁽¹⁾ Cfr. ad esempio: *Sulla misura della variabilità dei caratteri lineari in antropometria* in « Atti della seconda riunione scientifica della Società Italiana di Statistica », Roma 26-28 giugno 1940; *Sulla variabilità dei caratteri antropometrici lineari* e *Sul confronto reciproco della variabilità dei caratteri antropometrici lineari* in « Rendiconti della Classe di Scienze Fisiche Matematiche e Naturali della R. Accademia d'Italia », Roma agosto-ottobre 1940; *La variabilità relativa dei caratteri antropometrici lineari* in « Rivista di Antropologia », Roma 1941; *La teoria dei compensi antropometrici* di G. Viola in « Archivio di Antropologia Criminale, Psichiatria e Medicina Legale » vol. 62, 1942.

dove Δ' è la differenza media interrazziale e l'espressione posta al denominatore rappresenta la media aritmetica dello scostamento quadratico medio di tutti i gruppi presi in esame.

Ma una incertezza potrebbe qui sorgere spontanea dato che lo stesso fenomeno *variabilità* viene misurato con due metodi diversi e, bisognerebbe aggiungere però, in due circostanze altrettanto diverse. Invero, nel campo interrazziale, difficilmente – credo – potrebbe concepirsi un rigoroso accostamento delle singole distribuzioni alla curva degli errori accidentali, poichè, sia alla luce del poligenismo o comunque del polifiletismo più spinto, come fu quello di G. SERGI, sia accettando la teoria mutazionale monofiletica, ad esempio, secondo i principi di E. FISCHER, « molte varietà di caratteri corporei non hanno necessariamente la medesima origine nei differenti ceppi umani e, quindi, presentano originalità di forma o di intensità » (M. BOLDRINI). Inoltre lo scopo ultimo che ci spinge alla determinazione della variabilità interrazziale, bisogna riconoscerlo, non è quello di stabilire una media delle differenze esistenti fra i singoli gruppi e la media interrazziale, ma di determinare invece di quanto le diverse grandezze medie intrarazziali differiscono tra di loro.

Per queste ragioni ho dato la preferenza nel caso specifico alla differenza media, ma lo stesso C R V I può – come ho del resto fatto in via collaterale costantemente sui miei dati – essere anche determinato sulla base dello scostamento quadratico medio interrazziale. E posso già anticipare che i risultati dei due calcoli sono praticamente concordi e conducono a conclusioni molto simili.

Potrebbe poi, il C R V I, essere determinato anche con i coefficienti relativi di variabilità intra ed interrazziale invece che con gli indici di variabilità assoluta. Ma anche in questo caso i risultati sono molto vicini tra loro e ciò non può del resto meravigliare se appena si pensa alla struttura della nuova formula che ne deriva. Questo vale naturalmente sia nel caso del coefficiente di variabilità percentuale $\left(\frac{\sigma}{\bar{M}} 100 \right)$, sia in quello del coefficiente di variabilità relativa del GINI $\left(\frac{\sigma}{\sqrt{M}} \right)$, sia infine nel caso del nuovo coefficiente di variabilità da me proposto recentemente $\left(\frac{\sigma}{\bar{M}^{0,8}} \right)$ per la misura relativa della variabilità dei caratteri lineari in sostituzione dei due precedenti ⁽¹⁾.

(1) Cfr. al riguardo i miei lavori già citati e, specialmente: *La variabilità relativa ecc.*, in « Rivista di Antropologia », Roma 1941. Il nuovo coefficiente al quale mi riferisco è stato già adottato favorevolmente da alcuni studiosi in loro lavori di prossima pubblicazione. Così dal prof. B. SKERLJ, noto attivissimo antro-

Il procedimento del C R V I, nelle sue varie forme, è stato adottato per le dimensioni lineari e per gli indici. Ma in quest'ultimo caso l'indagine biometrica poteva spingersi oltre per tentare ad esempio una più chiara spiegazione della piccola variabilità intrarazziale e relativa grande variabilità interrazziale di un determinato indice antropometrico e viceversa. Il problema riguarda la determinazione del grado di correlazione esistente fra le due dimensioni che costituiscono l'indice. Anche qui, prima in campo intrarazziale, poi in campo interrazziale. E l'interesse di questo ulteriore esame risulta evidente se appena si pensa di interpretare il grado di maggiore o minore correlazione, corrispondentemente, con una minore o maggiore variabilità generica dell'indice. Ho seguito allo scopo il noto coefficiente di correlazione r di BRAVAIS-PEARSON.

Il prof. P. C. MAHALANOBIS, della Università di Calcutta, aveva invero già calcolato (1930), sui dati svedesi di LUNDBORG e LINDERS, un indice simile al nostro C R V I, basandosi però non sulla media dei sigma di più gruppi, quale misura media della variabilità intrarazziale, ma sullo scostamento quadratico medio calcolato nel gruppo complessivo costituito dalla somma dei singoli gruppi parziali. Tale metodo sarebbe stato inadatto nel caso del C R V I dato che avrebbe introdotto al denominatore non un indice medio di variabilità intrarazziale, ma una variabilità complessiva corrispondente alle differenze esistenti tra ciascun individuo e il valore medio interrazziale del carattere in esame. Del resto, nel caso del MAHALANOBIS non può parlarsi neppure di un vero scostamento quadratico medio interrazziale, dato che si tratta di popolazioni molto vicine tra loro. Lo stesso autore parla infatti di « inter-group standard deviation » e, corrispondentemente, di « co-group standard deviation », invece di « inter » ed « intraracial standard deviation ». Comunque l'esempio del MAHALANOBIS non trova facilmente riscontro in altri simili in tutta la letteratura biometrica.

G. M. MORAND, d'altra parte, nel 1928, aveva anche tentata una determinazione approssimata della capacità dei singoli caratteri a differenziare le serie comparate, ma con metodo dedotto dal noto coefficiente di somiglianza razziale (C R L) e criticabile per varie ragioni. Purtuttavia i risultati specifici ottenuti da questi autori saranno anche esaminati e spiegati nel lavoro definitivo.

Ma deve essere precisato ancora un altro aspetto della questione. Se, come è oggi generalmente ammesso, si accetta la legge della distribuzione normale o gaussiana dei caratteri antropometrici in seno ai sin-

pologo di Lubiana, e dal dott. G. NATOLI, pediatra del Comando Generale della G. I. L., in un suo importante studio sulle relazioni tra capacità vitale, diametri e perimetri del torace (i cui primi risultati sono stati già presentati nella Adunanza del 20 dicembre 1941 dell'Istituto Italiano di Antropologia).

goli gruppi relativamente omogenei dal punto di vista razziale, il C R V I, e cioè il rapporto tra variabilità interrazziale ed intrarazziale, ci conduce tra l'altro alla individuazione di un nuovo concetto, quello che il DE VRIES definì con i termini di *variabilità transgressiva*. È il caso in cui uno o più individui di un gruppo possono differire da uno o più individui di un altro gruppo, rispetto ad un particolare carattere, in senso opposto a quello che differenzia, nei due gruppi, i rispettivi valori tipici o medi del carattere in esame. In altri termini è ciò che accade quando due curve di distribuzione intrarazziali dello stesso carattere vengono poste sullo stesso diagramma e queste si incontrano definendo così un'area in comune per un certo tratto di ascissa.

L'esame della variabilità intra ed interrazziale, come del resto indrettamente quello della correlazione, porta infatti anche ad una valutazione quantitativa media della cosiddetta variabilità transgressiva, poichè evidentemente, supposto costante in tutte le seriazioni il tipo della curva di distribuzione (che nel caso specifico è gaussiano), il fenomeno varia soltanto in funzione della differenza tra i valori medi dei singoli gruppi e della loro variabilità intrarazziale. Così, ad esempio, se un carattere A presenta rispetto al carattere B un C R V I molto più alto, e cioè una più grande variabilità interrazziale relativamente a quella intrarazziale, sempre supponendo che sussista in tutti i gruppi la distribuzione normale, potrà dirsi con certezza che il carattere A rispetto a quello B è più atto alla differenziazione dei gruppi presi in esame, poichè determina in essi una minore variabilità transgressiva media o, come dice oggi il GINI, una minore *transvariazione*.

Essendo poi le due circostanze, variabilità dei valori medi e variabilità intrarazziale, gli unici fattori che determinano l'intensità media della transvariazione, sempre, ripeto, a parità di forma delle curve di distribuzione, i procedimenti adottati ci permettono non soltanto di individuare la risultante, ma ci conducono anche ad una analisi del fenomeno e quindi delle cause che lo determinano. Può essere interessante ad esempio distinguere in due valori egualmente molto alti del C R V I, e che denotano in generale una piccola variabilità transgressiva, una origine diversa, in un caso una effettiva grande variabilità interrazziale, nell'altro invece una estrema piccolezza della variabilità media intrarazziale. E la portata biologica di questa analisi può essere fondamentale in ricerche del genere. Nel caso degli indici antropometrici, è evidente, si aggiunge a tale analisi quella della correlazione alla quale ho anche accennato.

Invero la metodologia statistica era già in grado di darci una misura diretta della variabilità transgressiva o transvariazione, ma nel caso di due singole distribuzioni. E qui desidero innanzi tutto ricordare F. DE HELGUERO che, per primo, fin dal 1907 aveva affrontato e risolto il problema nel caso in cui le due seriazioni seguano appunto la legge normale

di distribuzione. Riferendosi all'esempio specifico del valore delle differenze sessuali secondarie, l'autore, dopo aver calcolato analiticamente il suo *valore critico*, e cioè l'ascissa del punto di incontro delle due curve di distribuzione, pervenne alla determinazione dell'*errore percentuale* che si commette considerando come maschi o femmine tutti gli individui che superano o no questo valore critico, il che rappresenta una vera misura della variabilità transgressiva o transvariazione. E l'espressione trovata dal DE HELGUERO è del resto anche di relativa facile determinazione poichè presume soltanto la conoscenza dello scostamento quadratico medio e del valore medio delle distribuzioni.

Nel nostro caso avrebbe potuto essere adottato questo procedimento per ogni singola combinazione di due gruppi e, per ogni carattere, stabilire il valore medio di tali costanti, ma io credo che questo enorme lavoro di calcolo non sarebbe stato certo compensato da nuovi risultati di un certo interesse, dato che da esso, per altra via, non potrebbe attendersi che una nuova misura della intensità della variabilità transgressiva media.

Lo stesso inconveniente avrebbero presentato i procedimenti proposti dal GINI più tardi, nel 1916, indipendentemente dal DE HELGUERO e, per altra via, basandosi sulle seriazioni di ciascun carattere. Il prof. GINI stesso ha avuto occasione di riconoscere questa difficoltà, dovuta ai calcoli estremamente lunghi che bisognerebbe affrontare, nell'ultima adunanza della Società Italiana di Statistica (3-4 gennaio 1942). E occorre aggiungere, inoltre, che la determinazione della intensità o della probabilità di transvariazione non potrebbe neppure estendersi ad un numero considerevole di casi dato che per il calcolo di queste costanti del GINI è necessaria la conoscenza delle singole distribuzioni, le quali troppo spesso mancano nella letteratura biometrica, dato che i singoli autori evitano il più delle volte la pubblicazione dei dati di cui si sono serviti, limitandosi alle sole costanti essenziali per le loro conclusioni.

Infine i procedimenti adottati possono dar luce anche ad eventuali ulteriori interpretazioni di ordine genetico, tanto più se, come ho sempre fatto nel mio lavoro, i risultati così ottenuti vengono accompagnati dalle conoscenze biologiche generali riguardanti i dati che si vanno elaborando statisticamente. *Così procedendo, le conoscenze morfologiche, fisiologiche e genetiche devono in generale servire di base alle successive interpretazioni biometriche, quasi come in una armonica fusione di metodi che sola potrà darci una più concreta visione dei fenomeni naturali.*

Ma queste questioni mi porterebbero oltre il limite di una Nota preventiva quale vuol essere questa mia, e devo evitare altre affermazioni le quali richiederebbero la loro dimostrazione.

* * *

Ai risultati raggiunti non posso neppure accennare. Nella quarta Adunanza della Società Italiana di Statistica (3-4 gennaio 1942) ho già riferito su alcune questioni particolari riguardanti l'indice facciale e le due dimensioni che lo compongono ⁽¹⁾. Qui basti un nuovo spunto appena per mostrare come in antropometria ci si possa trovare di fronte a caratteri i quali si comportano in senso diametralmente opposto.

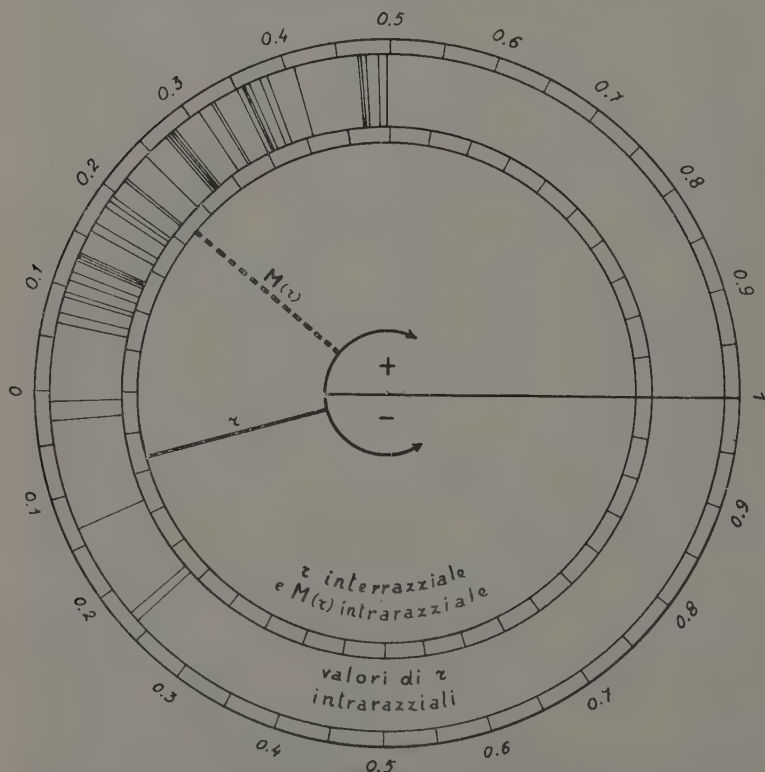


Fig. 1. - Correlazione intra ed interrazziale tra lunghezza e larghezza della testa.

(1) A. SACCHIETTI, *Sul valore dell'indice facciale come mezzo di differenziazione dei gruppi umani*. « Atti della Quarta riunione scientifica della Società Italiana di Statistica », Roma 3-4 gennaio 1942 (in corso di stampa).

Un esempio: l'indice facciale (determinato dal rapporto tra altezza totale della faccia e larghezza biziomantica) e l'indice cefalico (determinato dal rapporto tra lunghezza e larghezza massima della testa). Mi riferisco nel caso specifico a 43 gruppi diversi di individui adulti (sempre sufficientemente numerosi) appartenenti a vari tipi etnici, come: australiani, americani bianchi, arabi, maltesi, tedeschi, siriani, armeni, beduini,

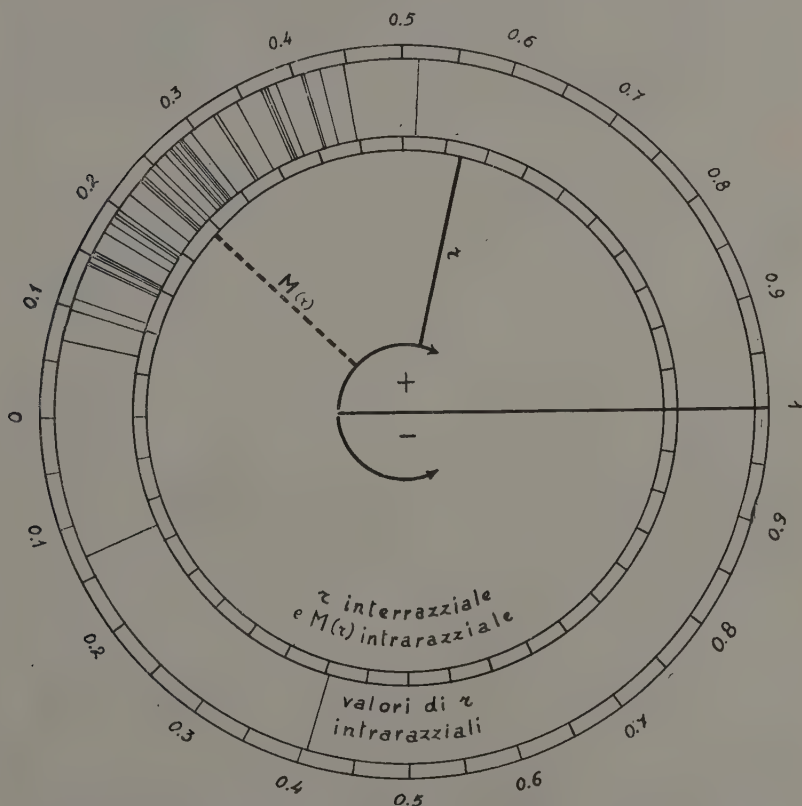


Fig. 2. - Correlazione intra ed interrazziale tra altezza e larghezza della faccia.

rumeni, ebrei, bavaresi, indigeni Maya, spagnoli, ecc. Tutti studiati da autori delle scuole più diverse, ma con metodi che si equivalgono per quanto riguarda i caratteri specifici presi in esame.

Nelle figure 1 e 2 riporto, in un diagramma circolare a raggi con angolarità variabile su scala graduata, il grado di correlazione intra ed interrazziale rispettivamente tra lunghezza e larghezza della testa e tra altezza e larghezza della faccia. Nel primo caso la correlazione interrazziale è nega-

tiva e più bassa di quasi tutti i valori intrarazziali, nel secondo accade l'inverso, la correlazione interrazziale è assolutamente più alta di ogni altro coefficiente intrarazziale!

Ciò denota il grande valore dell'indice cefalico come mezzo di differenziazione dei gruppi umani e viceversa può dirsi per l'indice facciale. Il C R V I conferma pienamente questi dati di fatto, il che dimostra che non sempre il grado di maggiore o minore variabilità di un gruppo è indice di maggiore o minore eterogeneità razziale. Questo giudizio è evidentemente legato al carattere preso in esame. Ma qui devo evitare ancora ogni commento, ogni analisi, ogni riserva, perchè è nel lavoro definitivo che questa materia troverà la sua giusta sede.

Matematica (Geometria algebrica). — *Sulla irregolarità superficiale d'una varietà algebrica*. Nota ⁽¹⁾ dell'Accademico FRANCESCO SEVERI.

È noto che sopra una varietà V_3 , a irregolarità superficiale $q = 0$, una superficie F irriducibile, variabile in un sistema lineare a serie caratteristica d'ordine > 0 , è regolare; e più generalmente che, se la varietà è a irregolarità superficiale $q > 0$, la superficie variabile F , con ulteriori ipotesi, soddisfatte per una superficie generica di V_3 , ha la stessa irregolarità q della varietà.

La proprietà per $q = 0$ è stata da me dimostrata geometricamente in un lavoro del 1906 ⁽²⁾; quando $q > 0$ essa invece risulta, per via trascendente, dal fatto che i q integrali semplici di 1^a specie di V_3 subordinano su F tutti e soli gl'integrali semplici di 1^a specie appartenenti alla superficie ⁽³⁾.

Esporrò qui la dimostrazione geometrica della proprietà concernente la V_3 d'irregolarità $q > 0$, riducendo altresì notevolmente le ipotesi relative al sistema in cui F è suscettibile di variare. La dimostrazione trascendente, la sola finora conosciuta, è relativa ad una F variabile in un sistema lineare, che possa, con una trasformazione birazionale della varietà, ridursi al sistema delle sezioni iperpiane.

La via algebrico-geometrica seguita nella presente Nota richiede un approfondimento delle proprietà delle serie abeliane, di cui ho iniziato occasionalmente lo studio in altra Memoria: argomento che qui tratto quel tanto che mi è necessario. Ma le proprietà che esposi nel 1940, e quelle che espongo oggi, mostrano già l'interesse d'una teoria intimamente legata alle funzioni abeliane riducibili.

L'estensione del procedimento geometrico alle varietà V_k , con $k > 3$, non è ovvia. Gli è che i sistemi lineari ed i sistemi continui di varietà a $k - 1$ dimensioni, entro una varietà a $k \geq 3$ dimensioni, non sono cono-

⁽¹⁾ Presentata nell'Adunanza del 21 marzo 1942-XX.

⁽²⁾ SEVERI, *Osservazioni varie di geometria sopra una superficie algebrica e sopra una varietà*. « Atti del R. Istituto Veneto », 1906, pag. 639.

⁽³⁾ CASTELNUOVO ENRIQUES, *Sur les intégrales simples de première espèce d'une surface ou d'une variété algébrique à plusieurs dimensions*. « Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure de Paris », 1906, pag. 339.

sciuti così a fondo come i sistemi lineari ed i sistemi continui di curve sopra una superficie. Occorre perciò preparare gli strumenti atti all'estensione, la quale vien qui conseguita.

Il teorema del n. 4 relativo all'unicità del sistema continuo completo determinato da un sistema lineare di M_{k-1} entro una V_k , non appena il sistema stesso contenga ∞^q (e non meno di ∞^q) sistemi lineari, ove q sia l'irregolarità superficiale di V_k , offre particolare interesse, sia pel risultato in sè, sia pel modo com'è conseguito, sia infine perchè, anche per $k=2$, esso fornisce una proprietà nuova dei sistemi continui di sistemi lineari di curve sopra una superficie, pei quali io avevo finora dimostrato soltanto il teorema di unicità quando il sistema lineare da cui si parte è aritmeticamente effettivo.

1. Innanzi di procedere alla trattazione della questione oggetto precipuo di questa Nota, occorre premettere talune proprietà delle serie e dei sistemi abeliani sopra una curva o varietà.

Come dicevo, ho posto le fondamenta dello studio delle serie abeliane nella mia recente Memoria sui sistemi continui ⁽¹⁾. Una serie abeliana γ_n^r di gruppi di n punti, sopra una curva irriducibile C di genere p , si può geometricamente definire come una totalità (algebraica, irriducibile) di serie lineari complete g_n tali che la somma di due qualunque di esse contenga parzialmente ogni altra serie della totalità. In particolare, per $n \geq p$, è una γ_n abeliana la totalità delle g_n di C ; anzi, se C è a moduli generali, non esistono su C altre γ_n abeliane.

Ad una γ_n^r abeliana si può sempre associare una γ_p abeliana, di ordine p , le cui g_p siano birazionalmente riferite alle g_n di γ_n^r , considerando i resti di queste g_n rispetto ad una data g_{n+p}^r di C . Sicchè, in ultima analisi, tutto si riduce allo studio delle γ_p abeliane.

Se la γ_n^r contiene ∞^{p-q} ($q \geq 0$) serie g_n , $p-q$ si chiama *irregolarità* di γ_n^r .

E si dice pure che γ_n^r è *completa* fra le γ_n abeliane di quella irregolarità, chiamandosi *parziale* ogni totalità di g_n in essa contenuta. Con che non si esclude che la γ_n^r possa esser contenuta in una serie abeliana d'irregolarità maggiore, oltre che nella serie abeliana d'irregolarità p , che comprende, per $n \geq p$, tutte le g_n .

Una γ_n^r abeliana, a norma della sua definizione, è una varietà irriducibile di serie complete g_n ; ma ciò non significa ch'essa sia sempre una

⁽¹⁾ SEVERI. *La teoria generale dei sistemi continui di curve sopra una superficie algebrica*. « Memorie della R. Accademia d'Italia », vol. XII, 1941-XIX, pag. 388.

varietà irriducibile di gruppi di n punti, perchè qualche particolare serie g_n può crescer di dimensione ed *esorbitare* dalla varietà irriducibile di gruppi di n punti descritta dalla generica g_n variabile in γ_n^r . Con r si designa la dimensione di quest'ultima varietà irriducibile.

Da una γ_n^r d'irregolarità $p - q$ (per $n \geq p$) se ne possono far derivare ∞^q , che riempiono la totalità delle g_n . Basta all'uopo considerare i resti delle g_n di γ_n^r rispetto ad una fissata g_{2n}^{2n-p} e far poi variare la g_{2n}^{2n-p} nell'insieme ∞^p delle g_{2n} . Ognuna delle γ_n^r così ottenute è tale che una qualunque di essa è *individuata* da una sua serie lineare, in quanto due γ_n^r distinte non hanno alcuna g_n comune ⁽¹⁾.

2. Dalla definizione di una serie abeliana γ_n^r segue senz'altro ch'essa è invariante pel gruppo di operazioni $+ g' - g''$, ove g', g'' sieno due qualunque delle sue serie, applicate appunto alle g_n di γ_n^r . E si ha così un gruppo continuo abeliano ∞^{p-q} di trasformazioni birazionali di γ_n^r in sè. È per questo che ho chiamato *abeliana* la γ_n^r . Com'è noto, da ciò si deduce, sul terreno trascendente, che γ_n^r possiede anche ∞^{p-q} trasformazioni involutorie o di 1^a specie. Ma tale esistenza consegue altresì, in modo ovvio e diretto, dal fatto che una γ_n^r è autoresidua rispetto alla g_{2n}^{2n-p} somma di due sue serie qualunque.

Profittando ora della trattazione geometrica, ultimamente svolta da POMPILI, delle varietà abeliane ⁽²⁾, si può affermare che, se esiste su C una γ_n^r abeliana d'irregolarità $p - q$ e quindi un sistema continuo ∞^q di serie analoghe, esiste anche su C una γ_n^s abeliana d'irregolarità q , epperò un sistema continuo ∞^{p-q} di serie analoghe. Due γ_n^r, γ_n^s , dei due sistemi continui, hanno in comune un numero finito (≥ 1) di g_n . Basta all'uopo passare dalle γ_n alle γ_p e studiare le γ_p sulla varietà di JACOBI V_p delle g_p di C . Una γ_p d'irregolarità $p - q$ è rappresentata da una W_{p-q} di V_p , che definisce un sistema continuo di ∞^q W_{p-q} costituenti in V_p un'invo-

⁽¹⁾ Tutte queste proprietà, acquisite qui elementarmente sul puro terreno algebrico-geometrico, sono esposte nella mia citata Memoria, dove però la teoria delle serie abeliane è costruita a partire dai sistemi regolari d'integrali riducibili di 1^a specie, appartenenti a C , giacchè ogni serie abeliana di irregolarità $p - q$ abbraccia appunto l'insieme dei gruppi di n punti dove dànno somme costanti i q integrali di un sistema regolare. Anche le proprietà che andremo ora ritrovando con metodo geometrico, sono implicitamente o esplicitamente contenute in quella mia Memoria.

⁽²⁾ *Sulle varietà abeliane*. « Annali di Matematica », to. XX, 1941-XX, pagina 271. Vada all'Autore, già combattente in Africa settentrionale ed ora prigioniero di guerra, il nostro augurale saluto.

luzione di specie $p-q$. E ad ogni siffatta involuzione $\{W_{p-q}\}$ si può associare (con operazioni razionali) un'altra involuzione $\{W_q\}$, di specie q , le cui varietà incontrano le precedenti in $v \geq 1$ punti e rappresentano $\infty^{p-q} \gamma_p$ abeliane. Deriva da questo che:

Il solo sistema continuo in cui può variare una γ_n^r abeliana d'irregolarità $p-q$ è quello, da essa definito, delle $\infty^q \gamma_n^r$, non aventi a due a due alcuna serie lineare g_n in comune ⁽¹⁾.

Invero, se $p \geq 2q$, esiste la varietà, d'ordine zero, (W_{p-q}, W_{p-q}) , epperò W_{p-q} non può appartenere ad un sistema continuo più ampio dell'involuzione cui già appartiene. Se $p \leq 2q$, la stessa conclusione è applicabile alla varietà W_q ; e, atteso il legame tra W_{p-q}, W_q , ne deriva, anche se $p < 2q$, che W_{p-q} non può variare in un sistema continuo più ampio del predetto.

Corollario, a noi particolarmente utile, è questo:

Se di una γ_n^r abeliana d'irregolarità data $p-q$ è fissata una serie g_n la γ_n^r non può variare in un sistema continuo.

Le precedenti considerazioni si estendono senz'altro, *mutatis mutandis*, ai sistemi continui completi di sistemi lineari di curve o di varietà M_{k-1} , appartenenti rispettivamente ad una superficie o ad una V_k . Ho già dimostrato (ved. la mia citata Memoria) che ogni siffatto sistema, sopra una superficie F , è un sistema abeliano, tanto se ha l'irregolarità q di F , quanto irregolarità minore. Questa proposizione si estende alle M_{k-1} di una V_k , sul fondamento del teorema del n. 7 della presente Nota, come mostrerò nelle mie lezioni di questo anno presso il Reale Istituto di Alta Matematica.

3. Il ragionamento col quale si consegue la proprietà principale di questo lavoro è ispirato all'idea medesima, che sta a fondamento del n. 8 della mia citata Nota del 1906. Ricordo anzitutto che una V_3 dice si d'irregolarità superficiale $q > 0$, se q è la massima infinità dei sistemi lineari distinti contenuti nei sistemi continui completi di superficie tracciate su V_3 .

Ciò posto, sia su V_3 un fascio Σ di superficie irriducibili F e della curva base del fascio faccia parte semplicemente una curva C , atta a definire sulla F generica un sistema continuo di grado > 0 . Supporremo in un primo tempo che C sia priva di punti multipli.

Quando l è abbastanza grande, le forme d'ordine l dell'ambiente lineare S_d di V_3 , staccan su F un sistema lineare $|D|$, non speciale,

(1) Questo teorema corrisponde, sul terreno trascendente, al fatto ben conosciuto che non può esistere su C un sistema continuo di sistemi d'integrali riducibili di 1ª specie.

aritmeticamente effettivo, cioè avente la dimensione virtuale positiva ⁽¹⁾, il quale (completato ove occorra) *individua* sulla F generica un sistema continuo completo $\{|D|\}$ di ∞^q sistemi lineari completi, essendo q' l'irregolarità di F ⁽²⁾. Questo sistema resta razionalmente fissato sulla F variabile in Σ .

Inoltre, essendo C priva di punti multipli ed l essendo convenientemente grande, la serie staccata su C da $|D|$, e quindi da ogni generico sistema di $\{|D|\}$, è completa. Poichè $\{|D|\}$ è mutato in sè dalle operazioni $+D_1 - D_2$, ove $|D_1|, |D_2|$ sieno due qualunque suoi sistemi lineari, così la serie segata da $\{|D|\}$ su C è una γ_n^r abeliana, luogo delle serie complete staccate su C dai $|D|$.

Essa è individuata, sopra ogni F di Σ , dalla serie lineare $|(C, D)|$, staccata dalle forme d'ordine l ; epperò (n. prec.) non può mutare al variare di F in Σ .

Ogni $|D|$, considerato su una generica F , individua una g_n di γ_n^r ; ma, viceversa, può accadere che una g_n generica di γ_n^r provenga da più $|D|$ di $\{|D|\}$, in ogni caso da un numero finito $\mu \geq 1$, perchè non può esistere, in virtù d'uno dei miei criteri d'equivalenza ⁽³⁾, un sistema continuo di curve di D di $\{|D|\}$, che staccino su C gruppi equivalenti, senza che quelle curve sieno equivalenti. Ne deriva che γ_n^r ha l'irregolarità q' , uguale a quella di F .

Se, sulla F generica, il $|D|$ generico di $\{|D|\}$ non contiene parzialmente C , fissato un gruppo generico G_n di γ_n^r , resta fissata la g_n completa di γ_n^r individuata da G_n , e per ognuno dei sistemi $|D|$, e sieno $|D_1|, \dots, |D_\mu|$, che segano su C quella g_n , c'è una curva D_1, \dots, D_μ , che stacca G_n ; onde la curva $D_1 + \dots + D_\mu$ è razionalmente determinata su F , una volta dato G_n ; e, variando F , essa descrive pertanto una superficie Φ , che può eventualmente passare per le linee base di Σ ed in particolare per C , ma che, comunque, stacca su F , fuori delle linee base, la sola curva $D_1 + \dots + D_\mu$.

Variando il gruppo G_n considerato, in modo che muti la serie g_n , la curva $\bar{D}_1 + \bar{D}_2 + \dots + \bar{D}_\mu$, relativa ad un'altra g_n , può staccare su C un gruppo $\mu \bar{G}_n$ equivalente a μG_n , ma questo in ogni caso non avviene che per un numero finito di serie g_n , giacchè un sistema continuo di gruppi i cui μ -pli sieno su C equivalenti fra loro, consta di gruppi equiva-

⁽¹⁾ Cfr. SEVERI, *Serie, sistemi d'equivalenza e corrispondenze algebriche sulle varietà algebriche*. (Lezioni raccolte da F. CONFORTO ed E. MARTINELLI). Roma, Ed. Cremonese, 1942-XX, pagg. 369-79.

⁽²⁾ Cfr. SEVERI, Nota citata del 1906, pag. 638.

⁽³⁾ Ved., per esempio: *Serie, sistemi d'equivalenza, ecc.*, pag. 194.

lenti ⁽¹⁾. Ne deriva che i sistemi lineari $|D_1 + D_2 + \dots + D_\mu|$, distinti fra loro, ottenuti al variare di g_n , sono, sopra una F , $\infty^{q'}$, quante le serie g_n cioè quanti i sistemi $|D|$.

D'altronde due superficie Φ non possono essere equivalenti tra loro se non lo sono le curve $D_1 + D_2 + \dots + D_\mu$ da cui esse provengono. Perciò, entro V_3 , i sistemi lineari $|\Phi|$ sono $\infty^{q'}$ e risulta $q' \leq q$.

4. Dobbiamo ora considerare il caso in cui il generico $|D|$ contiene parzialmente C .

Fissiamo all'uopo su C un generico G_n di γ_n^r e, sulla generica F , per ciascuno dei μ sistemi $|D_1|, \dots, |D_\mu|$, che staccano su C la serie $|G_n|$ e che hanno la dimensione R uguale a quella del generico $|D|$, consideriamo le $\infty^{R-\rho}$ curve D_1, \dots, D_μ passanti per G_n , ove ρ è la dimensione della serie segata da $|D|$ su C . Siccome i sistemi $|E_1| = |D_1 - C|, \dots, |E_\mu| = |D_\mu - C|$ hanno tutti la dimensione $R - \rho - 1$, per un gruppo Γ di $R - \rho$ punti generici di F passerà una sola curva di ognuno dei predetti sistemi $\infty^{R-\rho}$ e nessuna curva E_1, \dots, E_μ : cioè le curve D_1, \dots, D_μ passanti per Γ non conterranno C e staccheranno ivi il gruppo G_n .

Per Γ conducasi, entro V_3 , una generica curva irriducibile Δ , non situata su F . Circolando F in Σ , il gruppo Γ varia in Δ e si muta in certi altri gruppi analoghi, dell'intersezione (Δ, F) , mentre i sistemi delle $\infty^{R-\rho}$ curve D_1, \dots, D_μ passanti per G_n si permutano al più fra loro. Pertanto la curva $D_1 + \dots + D_\mu$ passante per Γ va in una curva analoga passante per quel gruppo di (Δ, F) che deriva da Γ . E se ν denota il numero dei gruppi provenienti da Γ , compreso Γ , la somma L delle ν curve $D_1 + \dots + D_\mu$ relative a questi singoli gruppi, ritorna in sé per le circolazioni di F . Essa stacca su C il gruppo $\nu\mu G_n$ e, al variare di F , genera una superficie Φ passante con certe eventuali molteplicità per le linee base di Σ , ivi compreso C , e intersecante altrove F soltanto lungo la curva L , composta con $\nu\mu$ curve D . Per l'argomentazione addotta nel caso in cui $|D|$ non conteneva C , non può esistere un sistema continuo di curve L equivalenti, che provengano da un sistema continuo di serie distinte g_n , epperò i sistemi lineari $|\Phi|$ tra loro distinti sono $\infty^{q'}$; e si conclude ancora che $q' \leq q$.

5. Resta infine da dire una parola del caso in cui C possiede punti multipli. Allora basta, invece delle forme di ordine l sufficientemente alto dell'ambiente, considerare le forme d'ordine l abbastanza alto aggiunte

⁽¹⁾ (Cfr. SEVERI, *Trattato di geometria algebrica*. Bologna, Zanichelli, 1926, pag. 257; *Serie, sistemi d'equivalenza*, ecc., pag. 195.

a C , le quali, come si sa, staccan su C , fuori dei punti fissi, una serie lineare completa. Il sistema lineare $|D|$ segato su F da tali forme, per l grande, è ancora aritmeticamente effettivo; e, per tutto il resto, valgon le argomentazioni dei nn. 3, 4.

6. Assumasi ora su V_3 un generico sistema continuo completo $\{|G|\}$ di ∞^q sistemi lineari distinti di superficie $|G|$ e aggiungasi l'ipotesi che il fascio Σ sia privo di superficie spezzate. Allora in virtù di un criterio d'equivalenza sulle varietà⁽¹⁾, si può affermare che non esiste una infinità continua di sistemi lineari distinti $|G|$ seganti su F curve equivalenti, cioè che vi è soltanto un numero finito (≥ 0) di sistemi $|G|$, distinti da un dato, seganti su F curve equivalenti a quelle segate dal dato. Perciò i sistemi lineari $|(F, G)|$, sulla F genericamente fissata, sono ∞^q distinti; e dunque $q' \geq q$. E siccome nei numeri precedenti avevamo trovato $q' \leq q$, risulta in definitiva $q' = q$. E si perviene al teorema:

Sopra una varietà V_3 d'irregolarità superficiale $q \geq 0$, la superficie generica F di un fascio lineare, privo di superficie spezzate, fra le cui linee base vi sia una curva semplice irriducibile C , atta a definire su F un sistema continuo di grado > 0 , ha la stessa irregolarità q della varietà ambiente.

7. L'estensione della dimostrazione alle M_{k-1} di una V_k richiede anzitutto l'estensione degl'invocati criteri di equivalenza: il che è immediato. Meno agevole si presenta la ricerca d'un teorema, che sostituisca quello concernente i sistemi aritmeticamente effettivi sopra una superficie F . Occorre anche qui poter individuare (cioè determinar razionalmente) sopra ogni M_{k-1} di un fascio lineare tracciato su V_k , la quale abbia l'irregolarità superficiale q' , un sistema continuo completo di $\infty^{q'}$ sistemi lineari di varietà a $k-2$ dimensioni. Dimosteremo perciò anzitutto che:

Sopra una V_k d'irregolarità $q > 0$, un sistema irriducibile completo $\{|A|\}$ di ∞^q sistemi lineari di varietà a $k-1$ dimensioni, è INDIVIDUATO non soltanto, com'è naturale, dal GENERICO $|A|$, ma altresì da un QUALUNQUE $|A|$.

Dicasi Σ un sistema irriducibile di sistemi lineari, di cui faccia parte, come sistema totale, un qualunque $|A|$; e sia $|A_0|$. Si tratta di provare che Σ sta in $\{|A|\}$.

Designi q_0 ($\leq q$) la dimensione di Σ , come totalità di sistemi lineari e $|B|$ un sistema lineare variabile in Σ . I sistemi lineari $|A+B|$ pro-

⁽¹⁾ SEVERI, Nota citata del 1906, pag. 535; oppure « Atti Istituto Veneto », to. LXX, 1911, pag. 380.

venienti dalle ∞^{q+q_0} coppie di elementi di $\{|A|\}$ e Σ si riducono in realtà a ∞^q distinti. Invero, essi non possono essere più che ∞^q e non possono esser di meno, perchè, associato un $|B|$ fisso agli ∞^q sistemi $|A|$, si ottengono ∞^q sistemi distinti $|A+B|$.

Vi sono dunque ∞^{q_0} coppie $|A|, |B|$ che danno la stessa generica somma $|A+B|$ (e quindi almeno tante per una particolare $|A+B|$). Proviamo che, per una prefissata somma $S = |A+B|$ i sistemi $|B|$ delle coppie cui essa dà origine, descrivono tutto Σ . Infatti, se i $|B|$ descrivessero una varietà subordinata, in cui vi fosse una parte completa di dimensione massima $q'_0 < q_0$, ad un $|B|$ generico di questa parte dovrebbero esser associati $\infty^{q_0-q'_0}$ sistemi $|A|$: il che è assurdo, perchè, dato un $|B|$, il resto di $|B|$ rispetto al sistema prefissato $|S|$ è individuato.

Dunque ogni $|B|$ è contenuto parzialmente in qualunque sistema $|A+B|$; cioè preso un $|A|$ qualsiasi di $\{|A|\}$, esiste sempre *effettivo* il sistema $|A+B_1-B_2|$, ove $|B_1|, |B_2|$ sieno due qualunque $|B|$.

Ciò posto, tenuto fisso il sistema $|A|$, genericamente scelto in $\{|A|\}$, il sistema $|A+B_0-B|$, ove $|A_0| = |B_0|$ si riguardi come un $|B|$, al variare di $|B|$ in Σ , descrive un sistema continuo ∞^{q_0} , birazionalmente equivalente a Σ , che contiene $|A|$ (per $|B| = |B_0|$). Siccome $|A|$ è generico in $\{|A|\}$, ogni sistema continuo cui appartenga $|A|$ sta in $\{|A|\}$, epperò anche $|A+A_0-B|$ varia in $\{|A|\}$.

Da questo si trae ormai facilmente la conclusione. Invero, se $|A_1|, |A_2|$ son due qualunque $|A|$, il sistema $|A+A_1-A_2|$ esiste effettivamente (com'è noto ed anche) per le ragioni analoghe a quelle addotte per provare l'esistenza di $|A+B_1-B_2|$ (si assuma all'uopo Σ coincidente addirittura con $\{|A|\}$). Inoltre $|A+A_1-A_2|$ sta tutto in $\{|A|\}$, perchè, per $|A_1| = |A_2|$, si identifica con $|A|$.

Ma dunque ogni sistema $|B|$, in quanto può, in virtù della conclusione precedente, considerarsi come un sistema $|A+A_0-A_1|$, con $|A_1|$ conveniente in $\{|A|\}$, appartiene ad $\{|A|\}$.

8. Proviamo ora che il multiplo abbastanza alto del sistema delle sezioni iperpiane di una V_k d'irregolarità superficiale q , appartiene ad un sistema continuo completo di ∞^q sistemi lineari; epperò questo sistema è individuato da quel multiplo.

Si assuma all'uopo su V_k un sistema continuo $\{|A|\}$ di ∞^q sistemi lineari distinti, di varietà a $k-1$ dimensioni, e si determini un ordine l così grande, che vi sieno forme d'ordine l dell'ambiente, le quali contengano una qualsiasi A . (Basterà che l non sia minore dell'ordine delle A). In tal guisa i resti $|B|$ dei sistemi $|A|$ rispetto al sistema lineare completo $|E|$, che contiene totalmente le sezioni di V_k colle forme

d'ordine l , riempiono un sistema completo $\infty^q \{|B|\}$, in corrispondenza birazionale con $\{|A|\}$.

La totalità delle somme $|A+B|$, ove $|A|, |B|$ varino comunque nei rispettivi sistemi continui, consta di ∞^q sistemi lineari distinti, perchè non può contenerne più di ∞^q e ne contiene già ∞^q ottenuti associando un dato $|B|$ cogli $|A|$. Ma, fra le $|A+B|$ c'è $|E|$: dunque $|E|$ appartiene ad un sistema continuo di ∞^q sistemi lineari.

9. Si può ora estendere senz'altro il procedimento esposto per le V_3 e si giunge al teorema:

Dato sopra una V_k un fascio lineare di M_{k-1} privo di varietà spezzate, fra le cui varietà base a $k-2$ dimensioni, ve ne sia una semplice, atta a definire sulla M_{k-1} generica un sistema continuo di grado > 0 , questa M_{k-1} ha la stessa irregolarità superficiale di V_k .

Matematica (Geometria algebrica). — *Sulle superficie del quarto ordine contenenti una conica*. Nota di TOMÁS RODRIGUEZ BACHILLER, presentata ⁽¹⁾ dall'Accademico FRANCESCO SEVERI.

In questa Nota ci occuperemo, per suggerimento di F. SEVERI ⁽²⁾ d'esaminare se una superficie F del 4° ordine contenente una conica irriducibile, ammette trasformazioni birazionali in sè. Il metodo seguito, poggiato sulla teoria della base di SEVERI, è il medesimo di quello usato da questo Autore in una Memoria del 1910 ⁽³⁾, nella quale trovasi un teorema generale che associa ad ogni gruppo discontinuo di trasformazioni birazionali di una superficie in sè, un gruppo isomorfo di automorfismi della forma quadratica fondamentale della superficie. SEVERI osserva però che, viceversa, non ogni automorfismo di questa forma proviene necessariamente da una trasformazione birazionale della superficie. Comunque negli esempi conosciuti (addotti da SEVERI e poi da altri) le superficie considerate posseggono sempre gruppi discontinui di trasformazioni birazionali. Interessa perciò un esempio, come quello dato in questa Nota, di una superficie la cui forma fondamentale ammetta un gruppo infinito discontinuo di automorfismi, senza che la superficie ammetta trasformazioni birazionali in sè.

1. Osserviamo preliminarmente che una superficie F del quarto ordine dello spazio ordinario, priva di punti multipli, non possiede curve eccezionali. Una tal curva dovrebbe infatti appartenere al sistema canonico impuro di F ; e ciò non è possibile, perchè su F il sistema canonico (impuro e puro nello stesso tempo) è costituito dalle sezioni colle superficie d'ordine zero dello spazio.

⁽¹⁾ Nell'Adunanza del 21 marzo 1942-XX.

⁽²⁾ Il quale ha indicato il problema nelle sue lezioni di Seminario presso il Reale Istituto Nazionale di Alta Matematica. Ved. *Problemi, risultati e discussioni*. « Rend. di Mat. della R. Università di Roma e del R. Ist. Naz. di Alta Mat. » (1942), vol. 3, fasc. 1, pag. 65, n. 119.

⁽³⁾ Ved. F. SEVERI, *Complementi alla teoria della base per la totalità delle curve di una superficie algebrica*. « Rend. del Circ. Mat. di Palermo », vol. 3°, 1910.

Pertanto su F ogni curva razionale (priva di punti multipli) ha il grado virtuale -2 , in quanto il grado n e il genere virtuale p di una curva tracciata su F son legati dalla relazione $n = 2p - 2$.

2. Si prevede *a priori* che la più generale superficie F del 4° ordine contenente una conica irriducibile C_1 , abbia il numero base $\rho = 2$, perchè una F del 4° ordine non soggetta ad alcuna condizione ha il numero base $\rho = 1$. Ecco come si dimostra con precisione, secondo una via suggerita da SEVERI, che effettivamente è così.

Anzitutto contiamo da quanti parametri dipendono le superficie del 4° ordine che contengono qualche conica. Sopra una conica le superficie del 4° ordine segano una g_8^3 completa e quindi ve ne sono ∞^{25} per una data conica. D'altronde una superficie del 4° ordine contenente una conica non ha necessariamente punti multipli, come si riconosce facilmente supponendo che la conica stia sul piano $z = 0$ e scrivendo l'equazione della superficie. Ne deriva che la più generale superficie F del 4° ordine contenente una conica, non ne contiene infinite, giacchè, in caso contrario, ne dovrebbe contenere un'infinità continua e sarebbe razionale o riferibile ad una rigata: cosa assurda perchè F , essendo priva di punti multipli, ha il genere geometrico (= aritmetico) $p_g = 1$.

Dunque la superficie F più generale contenente una conica non contiene che un numero finito di coniche, epperò F dipende da $25 + 8 = 33$ parametri.

Considerata in questa famiglia ∞^{33} una varietà irriducibile di superficie F , tra loro birazionalmente equivalenti, con un noto ragionamento ⁽¹⁾ si prova che due F di tale varietà sono omografiche; sicchè le F birazionalmente distinte tra loro dipendono da $33 - 15 = 18$ moduli. Si conclude intanto che:

Una superficie del 4° ordine contenente una conica dipende da 18 moduli.

Si tenga infine presente la determinazione effettiva dei moduli d'una superficie regolare F con curva canonica d'ordine zero, come periodi dell'unico integrale doppio di 1ª specie di F , fatta da SEVERI in una recente Memoria ⁽²⁾. Da questa determinazione risulta che la somma del numero dei moduli di una tal superficie e del numero base è costantemente uguale a 20, perchè ogni nuova curva che entra nella base adduce una relazione lineare a coefficienti interi fra i periodi; cosicchè di tanto

⁽¹⁾ Ved. F. SEVERI, *Le superficie algebriche con curva canonica d'ordine zero*. « Atti del R. Istituto Veneto », 1908-09, vol. 68, pag. 253.

⁽²⁾ *Relazioni fra i periodi degli integrali multipli d'una varietà algebrica*. « Mem. della Classe di Sc. Fis., Mat. e Nat. Reale Accademia d'Italia », vol. IX, estratto n. 3, 1938, pag. 145.

diminuisce il numero dei moduli in una famiglia di queste superficie, di quanto aumenta il numero base (e viceversa). Ne deriva che *il numero base della più generale superficie del 4° ordine contenente una conica è $\rho = 2$.*

3. È facile ormai dimostrare che come base delle curve sopra una F generale contenente una conica irriducibile C_1 e quindi anche un'altra conica irriducibile C_2 (¹) ulteriore intersezione di F col piano di C_1 , può assumersi la coppia (C_1, C_2) . Invero, il discriminante di tale coppia è diverso da zero:

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -12;$$

eperò le due curve C_1, C_2 sono algebricamente indipendenti.

Dimostriamo che la base (C_1, C_2) è *intermediaria* e quindi necessariamente *minima*, perchè sopra una superficie con curva canonica d'ordine zero ogni base intermediaria è appunto minima (²).

Se la base (C_1, C_2) non fosse minima, il determinante Δ d'una base minima (Γ_1, Γ_2) sarebbe un divisore necessariamente negativo di D , cioè uno dei valori $-2, -3, -4, -6$. Ora -4 si esclude, perchè altrimenti anche D dovrebbe essere un quadrato perfetto (³); i valori $-2, -6$, attesa la parità dei gradi v_{11}, v_{22} di Γ_1, Γ_2 portano che sia pari il numero v_{12} dei punti comuni a Γ_1, Γ_2 ed allora Δ sarebbe multiplo di 4. Rimane il valore -3 ; ma $\Delta = -3 = v_{11} v_{22} - v_{12}^2$, essendo v_{11}, v_{22} pari, darebbe

$$v_{12}^2 = 4 + 3;$$

il che è assurdo, perchè un quadrato perfetto non è congruo a 3 (mod. 4).

La base (C_1, C_2) è dunque *minima*, e siccome il suo determinante non è un quadrato perfetto, si può dire che *la superficie del 4° ordine generica contenente una conica, non contiene curve ellittiche (prive di punti multipli)* (⁴).

(¹) Che la conica C_1 sia irriducibile segue dal fatto che si può sempre costruire in infiniti modi una superficie F passante per due date coniche irriducibili complanari, le quali anzi può supporre che si seghino in quattro punti distinti. Cosicchè per la più generale F queste condizioni son da ritenersi soddisfatte. E può altresì supporre che le quattro intersezioni di C_1, C_2 non costituiscano per esempio su C_1 un gruppo armonico o equianarmonico.

(²) F. SEVERI, *La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique*. « Annales Sc. de l'Ec. Norm. Sup. », Paris (3), to. XXV, 1908, n. 4.

(³) Ved. F. SEVERI, Memoria citata dei « Rend. Circ. Mat. di Palermo », 1910; n. 7, b).

(⁴) SEVERI, Memoria di Palermo, pag. 276.

4. Passiamo a vedere se esistono su F curve razionali effettive oltre le C_1, C_2 . Curve siffatte si otterranno (se ci sono) in corrispondenza alle soluzioni intere dell'equazione quadratica

$$-2\lambda_1^2 + 8\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_2^2 = -2$$

cioè

$$\lambda_1^2 - 4\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 = 1.$$

La risoluzione di questa equazione diofantica si può ridurre, mediante il cambiamento di variabili

$$\lambda_1 = t + 2u, \lambda_2 = u,$$

a quella dell'equazione di PELL

$$[1] \quad t^2 - 3u^2 = 1.$$

La minima soluzione positiva è $t_1 = 2, u_1 = 1$, onde ogni altra soluzione positiva t_n, u_n è data dalla formola di LAGRANGIA

$$(2 + \sqrt{3})^n = t_n + u_n\sqrt{3}.$$

Si debbono aggiungere le soluzioni negative, che si ottengono cambiando il segno ad uno o ad ambedue i numeri t_n, u_n , ed inoltre la soluzione $t = 1, u = 0$. Ma, condizione necessaria per l'esistenza effettiva di una curva $\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$ è che il suo ordine sia > 0 , cioè che sia $2\lambda_1 + 2\lambda_2 > 0$, ovvero $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$, od anche, nelle nuove variabili

$$[2] \quad t + 3u > 0.$$

Se (t, u) è una soluzione positiva intera questa relazione è senz'altro verificata. Se (t, u) è una soluzione intera negativa, $t = -t', u = -u'$, ($t', u' < 0$) la condizione [2] si muta nella $t' + 3u' < 0$, che è assurda. Se $t > 0$ e $u = -u'$ ($u' > 0$), la [2] si muta nella $t - 3u' > 0$ incompatibile con [1]; e infine se $t = -t'$ ($t' > 0$), $u > 0$, la [2] diviene $-t' + 3u > 0$, la quale è senz'altro conseguenza della [1].

Per ciò le soluzioni intere di

$$\lambda_1^2 - 4\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 = 1$$

si ottengono in corrispondenza alle soluzioni (t, u) di [1], per le quali $u > 0$ e t è positivo o negativo. Così i sistemi corrispondenti sono

$$|\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2| = |(\pm t_n + 2u_n) C_1 + u_n C_2|$$

per t_n positivo.

Ora la curva $\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$ sega C_1 in $4\lambda_2 - 2\lambda_1 = 2(2\lambda_2 - \lambda_1)$ punti e C_2 in $4\lambda_1 - 2\lambda_2 = 2(2\lambda_1 - \lambda_2)$ punti; dunque se $\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$ è effettiva deve verificarsi simultaneamente

$$2\lambda_2 - \lambda_1 > 0, \quad 2\lambda_1 - \lambda_2 > 0,$$

ossia

$$\pm 2t_n + 3u_n > 0, \quad \mp t_n - 2u_n > 0$$

corrispondendosi i segni di t_n (+ con — e — con +). Poichè queste due disuguaglianze sono incompatibili, si conclude che non ci sono curve razionali effettive in F , all'infuori di quelle corrispondenti alla soluzione $t = 1, u = 0$, cioè $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$ o $\lambda_2 = 1, \lambda_1 = 0$; che dà le C_1 e C_2 stesse.

5. Dalla non esistenza di curve razionali, diverse da C_1, C_2 , tracciate su F , segue la non esistenza di trasformazioni birazionali non identiche di F in sè (¹). Invero, sia T una trasformazione birazionale di F in sè. In primo luogo la T è senza eccezioni, perchè F non contiene curve eccezionali. Inoltre T muta le C_1, C_2 ciascuna in sè o l'una nell'altra. Epperò T lascia immutato il sistema lineare completo $|C_1 + C_2|$, che è poi il sistema delle sezioni piane di F . Dunque T è un'omografia. S'essa non muta ciascuna delle C_1, C_2 in sè, il suo quadrato T^2 muta in sè ognuna delle C_1, C_2 e quindi o $T^2 = 1$, oppure T^2 subordina sopra le coniche C_1, C_2 due proiettività, che mutano in sè la quaderna comune. Se una di queste proiettività, e quindi anche l'altra, è l'identità, T^2 subordina su tutto il piano α delle due coniche l'identità e quindi è un'omologia. Se l'omografia subordinata su C_1 da T^2 non è identica, poichè il gruppo (C_1, C_2) non è su C_1 nè armonico nè equianarmonico [vedere nota (¹) a piè della pag. 3], l'omografia è su C_1 involutoria, sicchè T^4 subordina su C_1 (e quindi su C_2) l'identità. Pertanto o è $T^4 = 1$ oppure T^4 è un'omologia col piano d'omologia α .

Si perviene così alla conclusione che, se F possiede una trasformazione birazionale non identica in sè, esiste un'omografia involutoria o un'omologia di piano α , che muta in sè F .

La prima possibilità si scarta, perchè SEVERI (²) ha dimostrato che una superficie del 4° ordine trasformata in sè da un'omografia involutoria dipende (al più) da 11 moduli, mentre la nostra F dipende da 18 moduli. Resta da esaminare il caso in cui F è mutata in sè da un'omologia τ . Le rette passanti pel centro di omologia segano F in quaderne di punti mutati in sè dall'omologia; epperò, se il centro dell'omologia è

(¹) L'analisi che segue è dovuta a SEVERI.

(²) Memoria di Palermo citata, n. 12, b).

fuori di F , la proiettività subordinata dall'omologia sopra una di quelle rette è ciclica di secondo o di quarto ordine, onde è $\tau^2 = 1$ o $\tau^4 = 1$. In ogni caso, si ricade sopra un'omologia armonica mutante in sè F . E questo è assurdo.

Dunque il centro dell'omologia giace su F e le rette pel centro segano F secondo gruppi equianarmonici e τ è ciclica di terzo ordine; sicchè l'omologia ha necessariamente il centro O fuori del piano α . Mandato il piano α all'infinito con un'omografia e posta l'origine delle coordinate nel centro O , l'equazione di F si presenta sotto la forma:

$$[3] \quad \varphi_1(x, y, z) + \varphi_2(x, y, z) + \varphi_3(x, y, z) + \varphi_4(x, y, z) = 0,$$

ove $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ son forme in x, y, z dei gradi indicati dai loro indici. Per ipotesi l'equazione precedente è mutata in sè dall'omotetia equianarmonica

$$[4] \quad x = \varepsilon x' \quad , \quad y = \varepsilon y' \quad , \quad z = \varepsilon z'$$

ove ε è una radice cubica complessa dell'unità. Dalla [3], tenuto conto della [4], segue, dopo soppresso il fattore ε e ricordato che $\varepsilon^3 = 1$:

$$\varphi_1(x', y', z') + \varepsilon \varphi_2(x', y', z') + \varepsilon^2 \varphi_3(x', y', z') + \varphi_4(x', y', z') = 0.$$

Sottraendo da questa la [3], ove si ponga x', y', z' al posto di x, y, z , e soppresso di nuovo il fattore ε , si ottiene:

$$\varphi_2(x', y', z') + \varepsilon \varphi_3(x', y', z') = 0.$$

E siccome il polinomio di 3° grado $\varphi_2(x, y, z) + \varepsilon \varphi_3(x, y, z)$ si annulla ovunque sulla superficie irriducibile di 4° ordine F , esso è identicamente nullo. Mancano pertanto 15 coefficienti nell'equazione di F . Le superficie del 4° ordine invarianti per una data omologia equianarmonica dipendono così da $34 - 15 = 19$ parametri e quelle invarianti per qualche omologia equianarmonica da $19 + 6 = 25$ parametri, poichè le omologie equianarmoniche sono ∞^6 . Le F invarianti per omologie equianarmoniche dipendono insomma da $25 - 15 = 10$ moduli (al più). E siccome la nostra F dipende da 18 moduli, essa non può esser invariante di fronte ad un'omologia equianarmonica. Si conclude che:

La più generale superficie del 4° ordine contenente una conica irriducibile non possiede trasformazioni birazionali in sè.

6. Ci resta ora da mostrare che, nonostante ciò, la forma quadratica fondamentale di F possiede un gruppo infinito discontinuo di isomorfismi.

Ma prima completiamo lo studio delle curve effettive di F , mostrando ch'esse corrispondono soltanto a valori ambedue non negativi di λ_1, λ_2 .

Invero, se la curva $\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$ deve essere effettiva, intersecandola con C_1, C_2 e con una sezione piana, avremo le disuguaglianze:

$$2\lambda_2 > \lambda_1, \quad 2\lambda_1 > \lambda_2, \quad \lambda_1 + \lambda_2 > 0,$$

le quali, colle relazioni che esprimono λ_1, λ_2 per mezzo di t, u , porgono

$$t < 0, \quad 2t + 3u > 0, \quad t + 3u > 0,$$

Se ne ricava:

$$\lambda_2 = u > 0, \quad \lambda_1 = t + 2u > \frac{1}{2}u > 0;$$

epperò le sole curve effettive di F son le $\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$, corrispondenti a valori non negativi di λ_1, λ_2 .

Si posson poi cercare le curve di un determinato grado virtuale $2p - 2$ (p genere). Ciò equivale a cercare gl'interi $p - 1$ che posson rappresentarsi sotto la forma:

$$-\lambda_1^2 + 4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_2^2 = p - 1.$$

Trasformando quest'equazione da risolversi in numeri interi, mediante la sostituzione $\lambda_1 = t + 2u, \lambda_2 = u$, nell'equazione di PELL:

$$t^2 - 3u^2 = 1 - p,$$

si trova facilmente che i possibili valori del genere virtuale delle curve *effettive* tracciate su F sono della forma $\dot{3}$ o $\dot{3} + 1$. Per esempio, i primi valori del genere sono $p = 3, 4, 9, 12, 13, 24, 27, 28, \dots$.

7. Le trasformazioni lineari intere $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ della forma

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^2 - 4\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2$$

in sè, sono date, secondo classiche proprietà di teoria dei numeri, da:

$$\alpha = t + 2u, \quad \beta = -u, \quad \gamma = u, \quad \delta = t - 2u,$$

ove (t, u) è una soluzione dell'equazione di PELL [1], tratta dalla formula di LAGRANGIA (n. 4). Esse formano un gruppo discontinuo infinito; e le sostituzioni di modulo ± 1 formano in questo un sottogruppo discontinuo infinito, che si riconosce agevolmente esser generato dalle due trasformazioni fondamentali:

$$S \equiv \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T \equiv \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

la prima delle quali è involutoria.

Matematica. — *Equazioni lineari e omogenee alle differenze finite aventi soluzioni polinomiali.* Nota di ANTONIO MAMBRIANI, presentata ⁽¹⁾ da ENRICO BOMPIANI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Nella presente Nota, dapprima viene introdotta la nozione di *potenza fattoriale* allo scopo di stabilire un utile parallelismo fra equazioni alle differenze finite ed equazioni differenziali, indi si determinano condizioni necessarie e sufficienti affinché certe equazioni lineari e omogenee alle differenze finite, d'ordine generico, abbiano soluzioni razionali intere, e s'indicano delle espressioni di tali soluzioni. Ciò è l'estensione, alle equazioni alle differenze finite, di conclusioni ottenute, in un precedente lavoro ⁽²⁾, per le equazioni differenziali lineari e omogenee.

1. LE POTENZE FATTORIALI. — Anzitutto, per stabilire un comodo parallelismo colle equazioni differenziali lineari, è opportuno introdurre la nozione di *potenza fattoriale* in tutta la sua generalità.

Indicando con x e ω dei numeri qualunque e con n un intero positivo, poniamo

$$x^{n|\omega} = x(x + \omega)(x + 2\omega) \cdots (x + (n-1)\omega).$$

Diremo che $x^{n|\omega}$ è una *potenza fattoriale della x (base), d'esponente n e di passo ω* . In particolare è

$$x^{n|0} = x^n, \quad x^{n|1} = x(x+1) \cdots (x+n-1), \quad x^{n|-1} = x(x-1) \cdots (x-n+1).$$

Avendosi

$$x^{n|\omega} = \omega^n \left(\frac{x}{\omega} \right)^{n|1}, \quad \text{per } \omega \neq 0,$$

si comprende che allo studio delle ordinarie potenze (o potenze fattoriali di passo zero) basterà aggiungere quello delle potenze fattoriali di passo 1.

⁽¹⁾ Nell'Adunanza del 21 marzo 1942-XX.

⁽²⁾ A. MAMBRIANI, *Equazioni differenziali lineari aventi soluzioni polinomiali*. « Bollettino dell'Unione Matem. Italiana », vol. XVII (1938), pagg. 26-32.

Per stabilire la nozione di potenza fattoriale (di passo 1) con espone-
nente un numero qualunque, osserviamo che è

$$x^{n|1} = \frac{(x+n-1)!}{(x-1)!},$$

usando in senso lato il simbolo per «fattoriale d'un intero positivo» in
sostituzione dell'ordinaria notazione della funzione gamma ⁽¹⁾. In questa
ultima uguaglianza il secondo membro ha senso anche quando l'intero
positivo n si sostituisce con un numero qualunque α : in base a ciò, por-
remo per definizione

$$[1] \quad x^{\alpha|1} = \frac{(x+\alpha-1)!}{(x-1)!}$$

ed anche

$$[2] \quad x^{-\{\alpha|1\}} = \frac{1}{x^{\alpha|1}} \quad \left[= \frac{(x-1)!}{(x+\alpha-1)!} = (x+\alpha)^{(-\alpha|1)} \right].$$

Detto β un altro numero qualunque, conviene porre ancora, per defi-
nizione,

$$[3] \quad x^{\{\alpha|1\} + \{\beta|1\}} = x^{\alpha|1} x^{\beta|1},$$

$$[4] \quad x^{-\{\alpha|1\} + \{\beta|1\}} = x^{\{\beta|1\} - \{\alpha|1\}} = \frac{x^{\beta|1}}{x^{\alpha|1}}.$$

Discende subito, da [1], $x^{1|1} = x$, $x^{0|1} = 1$.

1° Risulta

$$[5] \quad x^{(\alpha+\beta)|1} = x^{\alpha|1} (x+\alpha)^{\beta|1} = x^{\beta|1} (x+\beta)^{\alpha|1},$$

com'è facile verificare applicando [1].

2° Indichiamo, secondo l'abitudine, con $\Delta = \Delta_x$ l'operazione di
differenza finita: $\Delta y(x) = y(x+1) - y(x)$. Abbiamo, essendo α una
costante (rispetto ad x),

$$[6] \quad \Delta x^{\alpha|1} = \alpha (x+1)^{(\alpha-1)|1}$$

⁽¹⁾ Non credo d'esprimere solo un mio sentire, affermando che la notazione $n!$,
pel fattoriale d'un intero positivo n , è d'uso parecchio comodo: a porre in luce
ciò, mi pare basti la semplice relazione ricorrente $(n-1)! \cdot n = n!$. Pertanto,
mi sembra sia conveniente prolungare il significato di tale notazione piut-
tosto che fare ricorso all'ordinaria notazione della funzione gamma. [Con questa
ultima notazione, la precedente relazione ricorrente si scrive $\Gamma(n) \cdot n = \Gamma(n+1)$].
Il dissentire da ciò sarebbe, ad esempio, come affermare l'opportunità d'usare
per la potenza una notazione quando l'esponente è intero positivo e un'altra
notazione quando l'esponente è qualunque. La funzione gamma si potrà quindi
anche chiamare *funzione fattoriale*.

e più generalmente (essendo m un intero positivo)

$$[7] \quad \Delta^m x^{\alpha|1} = \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-m+1) (x+m)^{(\alpha-m)|1} = \alpha^{m|1} (x+m)^{(\alpha-m)|1},$$

onde, per [5],

$$[8] \quad x^{m|1} \Delta^m x^{\alpha|1} = \alpha^{m|1} x^{\alpha|1}.$$

Abbiamo pure

$$[9] \quad \Delta x^{-\{\alpha|1\}} = -\alpha x^{-\{\alpha+1|1\}}$$

e più generalmente

$$[10] \quad \Delta^m x^{-\{\alpha|1\}} = (-1)^m \alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+m-1) x^{-\{\alpha+m|1\}} = \\ = (-1)^m \alpha^{m|1} x^{-\{\alpha+m|1\}},$$

onde, per [5],

$$[11] \quad x^{m|1} \Delta^m x^{-\{\alpha|1\}} = (-1)^m \alpha^{m|1} (x+m)^{-\{\alpha|1\}}.$$

3° Da [9] risulta, indicando con r_1 e r_2 delle costanti,

$$[12] \quad \frac{x^{(r_1+1)|1} \Delta x^{-\{r_1|1\}} y(x) - x \Delta y(x) - r_1 y(x),}{x^{(r_2+1)|1} \Delta x^{-\{r_2|1\}} + \{(r_1+1)|1\} \Delta x^{-\{r_1|1\}} y(x) =} \\ = x^{2|1} \Delta^2 y(x) - (r_1 + r_2 + 1) \Delta y(x) + r_1 r_2 y(x).$$

In generale si trova che un'espressione lineare e omogenea alle differenze finite, d'ordine m , della forma

$$[13] \quad a_m x^{m|1} \Delta^m y + a_{m-1} x^{(m-1)|1} \Delta^{m-1} y + \cdots + a_2 x^{2|1} \Delta^2 y + a_1 x \Delta y + a_0 y,$$

dove a_0, a_1, \dots, a_m sono delle costanti ⁽¹⁾, si può scrivere nel modo seguente:

$$[13'] \quad \frac{a_m x^{(r_m+1)|1} \Delta x^{-\{r_m|1\}} + \{(r_{m-1}+1)|1\} \cdots \Delta x^{-\{r_2|1\}} + \{(r_1+1)|1\} \Delta x^{-\{r_1|1\}} y,$$

indicando con r_1, r_2, \dots, r_m le radici dell'equazione algebrica (nell'incognita r)

$$a_m r^{m|1} + a_{m-1} r^{(m-1)|1} + \cdots + a_2 r^{2|1} + a_1 r + a_0 = 0.$$

⁽¹⁾ La [13] è da ritenere, fra le espressioni alle differenze finite, l'analoga della cosiddetta « espressione differenziale lineare di EULER » fra le espressioni differenziali.

4° Da [6] risulta

$$[14] \quad \Delta^{-1} x^{\alpha|1} = \frac{(x-1)^{(\alpha+1) \cdot 1}}{\alpha+1} + \pi(x) \quad \text{per } \alpha \neq -1,$$

dove $\pi(x)$ è una funzione periodica arbitraria, di periodo 1; più generalmente, essendo h una costante, si ha

$$[14'] \quad \Delta^{-1} (x+h)^{\alpha|1} = \frac{(x+h-1)^{(\alpha+1) \cdot 1}}{\alpha+1} + \pi(x) \quad \text{per } \alpha \neq -1.$$

Risulta pure, da [9],

$$[15] \quad \Delta^{-1} x^{-\{\alpha|1\}} = -\frac{x^{-\{(\alpha-1) \cdot 1\}}}{\alpha-1} + \pi(x) \quad \text{per } \alpha \neq 1,$$

e più generalmente si ha

$$[15'] \quad \Delta^{-1} (x+h)^{-\{\alpha|1\}} = -\frac{(x+h)^{-\{(\alpha-1) \cdot 1\}}}{\alpha-1} + \pi(x) \quad \text{per } \alpha \neq 1.$$

Se in [14] e [14'], dov'è $\alpha \neq -1$, oppure in [15] e [15'], dov'è $\alpha \neq 1$, si sceglie $\pi(x) \equiv 0$, risulta una particolare determinazione di Δ^{-1} che muta una potenza fattoriale in una potenza fattoriale (a meno di un fattore costante, dipendente dall'esponente). Una tale determinazione di Δ^{-1} presenta uno speciale interesse nelle considerazioni seguenti, e verrà indicata col simbolo

$$\dot{\Delta}^{-1}.$$

Osservazione. — Uno studio più esteso della potenza fattoriale e delle sue inversioni, in relazione col Calcolo delle differenze finite, figurerà in un prossimo lavoro.

2. TEOREMA I. — Sia l'equazione lineare e omogenea alle differenze finite, d'ordine m (generico),

$$[16] \quad p_{m-1} \Delta^m y + p_{m-2} \Delta^{m-1} y + \dots + p_2 \Delta^3 y + p_1 \Delta^2 y + \\ + (a_1 x + b_1) \Delta y + (a_0 x + b_0) y = 0,$$

dove $p_{m-1}, p_{m-2}, \dots, p_2, p_1$ sono polinomi qualunque, interi in x , di gradi al più uguali ai rispettivi indici, e a_1, b_1, a_0, b_0 sono delle costanti con $a_0 x + b_0 \neq 0$.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione [16] abbia fra le sue soluzioni dei polinomi di grado prefissato n , è che sia

$$[17] \quad a_0 = 0, \quad b_0 = -na_1;$$

cioè che [16] abbia la forma

$$[18] \quad p_{m-1} \Delta^m y + p_{m-2} \Delta^{m-1} y + \dots + p_2 \Delta^3 y + p_1 \Delta^2 y + \\ + (a_1 x + b_1) \Delta y - n a_1 y = 0$$

con $a_1 \neq 0$. Uno di questi polinomi è

$$[9] \quad y_n(x) = \sum_{v=0}^n \frac{(-1)^v}{a_1^v} [x^{n+1} \overset{*}{\Delta}^{-1} x^{-\{(n+1)/1\}} (p_{m-1} \Delta^m + p_{m-2} \Delta^{m-1} + \dots + p_1 \Delta^2 + b_1 \Delta)]^v x^{n+1}$$

(dove $\overset{*}{\Delta}^{-1}$ è l'operazione introdotta alla fine del numero precedente).

Ogni altra soluzione polinomiale di [18] è linearmente dipendente da tale $y_n(x)$.

Dimostrazione. - 1° La condizione [17] è necessaria. Invero, se indichiamo con L l'operazione lineare applicata ad y nel primo membro di [16] e diciamo

$$P_n(x) \equiv \alpha x^n + \beta x^{n-1} + \dots$$

un polinomio, di grado n , soluzione di [16], abbiamo

$$LP_n(x) = \alpha a_0 x^{n+1} + \{\alpha \cdot (n a_1 + b_0) + \beta a_0\} x^n + \dots,$$

dove nel secondo membro i due termini scritti sono quelli di grado maggiore. Necessariamente, quindi, dovrà valere [17].

2° La condizione [17] è sufficiente. Invero, se vale [17], l'equazione [16] prende la forma [18], ossia

$$(p_{m-1} \Delta^m y + p_{m-2} \Delta^{m-1} y + \dots + p_1 \Delta^2 y + b_1 \Delta y) + a_1 \cdot (x \Delta y - n y) = 0,$$

ed anche, applicando [12],

$$(p_{m-1} \Delta^m + p_{m-2} \Delta^{m-1} + \dots + p_1 \Delta^2 + b_1 \Delta) y + a_1 \underline{x^{(n+1)/1} \overset{*}{\Delta} x^{-\{n/1\}}} y = 0,$$

da cui, invertendo l'operazione figurante nell'ultimo termine del primo membro,

$$[20] \quad \frac{1}{a_1} \underline{x^{n/1} \overset{*}{\Delta}^{-1} x^{-\{(n+1)/1\}}} (p_{m-1} \Delta^m + p_{m-2} \Delta^{m-1} + \dots + p_1 \Delta^2 + b_1 \Delta) y + y = \pi(x) \cdot x^{n/1},$$

dove $\pi(x)$ è una funzione periodica arbitraria, di periodo 1. L'equazione [20] è equivalente a [18]. Posto, per brevità,

$$[21] \quad \Theta = - \frac{1}{a_1} \underline{x^{n/1} \overset{*}{\Delta}^{-1} x^{-\{(n+1)/1\}}} (p_{m-1} \Delta^m + p_{m-2} \Delta^{m-1} + \dots + p_1 \Delta^2 + b_1 \Delta),$$

l'equazione [20] si scrive brevemente

$$[20'] \quad y - \Theta y = \pi(x) \cdot x^{n|1}.$$

Osserviamo ora che, se $P_n(x)$ è un polinomio di grado n , si ha

$$\Theta P_n(x) = P_{n-1}(x),$$

con $P_{n-1}(x)$ polinomio di grado $n-1$, onde

$$\Theta^n P_n(x) = P_0,$$

con P_0 costante, e quindi

$$\Theta^{n+1} P_n = \Theta P_0 = 0.$$

Quest'osservazione si può sfruttare così. Se a [20'] s'applica successivamente n volte l'operazione Θ , abbiamo le equazioni

$$\begin{aligned} \Theta y - \Theta^2 y &= \pi(x) \cdot \Theta x^{n|1}, \\ \Theta^2 y - \Theta^3 y &= \pi(x) \cdot \Theta^2 x^{n|1}, \\ &\dots\dots\dots \\ \Theta^n y - \Theta^{n+1} y &= \pi(x) \cdot \Theta^n x^{n|1}, \end{aligned}$$

le quali, addizionate membro a membro unitamente a [20'], portano all'equazione

$$[22] \quad y - \Theta^{n+1} y = \pi(x) \cdot \sum_{v=0}^n \Theta^v x^{n|1},$$

avente certamente tutte le soluzioni di [20'] e quindi di [18]. In base all'osservazione precedente, si vede che [22] ha come soluzione la funzione stessa scritta nel suo secondo membro (in quanto tale secondo membro è il prodotto di $\pi(x)$ per un polinomio di grado n); d'altra parte, questa funzione è pure soluzione di [20'], in quanto, sostituendola ad y nel primo membro di [20'], risulta

$$\begin{aligned} &\pi(x) \cdot [x^{n|1} + \Theta x^{n|1} + \Theta^2 x^{n|1} + \dots + \Theta^n x^{n|1} - \\ &- \Theta x^{n|1} - \Theta^2 x^{n|1} - \dots - \Theta^n x^{n|1} - \Theta^{n+1} x^{n|1}], \end{aligned}$$

uguale proprio a $\pi(x) \cdot x^{n|1}$ (per essere $\Theta^{n+1} x^{n|1} = 0$). Ora la funzione a secondo membro di [22], prescindendo dal fattore $\pi(x)$, è proprio il polinomio $y_n(x)$ dato da [19], in virtù dell'espressione [21] di Θ .

3° Proviamo che ogni altra soluzione polinomiale di [18] è linearmente dipendente da $y_n(x)$. Anzitutto, [18] non può avere come soluzione un polinomio di grado $n' \neq n$, perchè allora dovrebbe essere $n'a_1 = na_1$ (con $a_1 \neq 0$). Se poi esistesse un polinomio

$$Y_n(x) = kx^n + hx^{n-1} + \dots,$$

di grado n , soluzione di [18] e linearmente indipendente da $y_n(x)$, si avrebbe che $Y_n(x) - ky_n(x)$, polinomio non identicamente nullo e di grado $n' < n$, sarebbe soluzione di [18], ciò che non può essere.

Il teorema è così completamente dimostrato.

3. COROLLARIO DEL TEOREMA PRECEDENTE. — *Un'equazione lineare e omogenea alle differenze finite, d'ordine m (generico), a coefficienti lineari,*

$$[23] \quad (a_m x + b_m) \Delta^m y + (a_{m-1} x + b_{m-1}) \Delta^{m-1} y + \dots + \\ + (a_1 x + b_1) \Delta y + (a_0 x + b_0) y = 0,$$

con $a_0 x + b_0 \neq 0$, non può avere due soluzioni polinomiali fra loro linearmente indipendenti. Essa ha fra le sue soluzioni un polinomio di grado n se e solo se è $a_0 = 0$, $b_0 = -na_1$.

Un'espressione di un tale polinomio s'ottiene poi applicando [19].

Esempio. — L'equazione di 2° ordine

$$[24] \quad a_2 \Delta^2 y + (a_1 x + b_1) \Delta y - na_1 y = 0 \quad (a_1 \neq 0)$$

ha fra le sue soluzioni un polinomio $y_n(x)$, di grado n , e non ha altre soluzioni polinomiali linearmente indipendenti da $y_n(x)$. Un'espressione di $y_n(x)$ s'ottiene applicando [19]; però qui risulta più semplice notare che [24] si può scrivere

$$[24'] \quad a_2 \Delta^2 y + a_1 \cdot \left(x + \frac{b_1}{a_1} \right)^{(n+1)1} \Delta \left(x + \frac{b_1}{a_1} \right)^{-\{n|1\}} y = 0,$$

onde, procedendo come nella dimostrazione del teorema precedente, si trova

$$y_n(x) = \sum_{v=0}^n (-1)^v \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^v \left[\left(x + \frac{b_1}{a_1} \right)^{n,1} \Delta^{-1} \left(x + \frac{b_1}{a_1} \right)^{-\{(n+1)1\}} \Delta^2 \right] \left(x + \frac{b_1}{a_1} \right)^{n,1}.$$

In particolare, per $n = 1, 2, 3$, si ha

$$y_1(x) = x + \frac{b_1}{a_1},$$

$$y_2(x) = \left(x + \frac{b_1}{a_1} \right) \left(x + \frac{b_1}{a_1} + 1 \right) + \frac{a_2}{a_1},$$

$$y_3(x) = \left(x + \frac{b_1}{a_1} \right) \left(x + \frac{b_1}{a_1} + 1 \right) \left(x + \frac{b_1}{a_1} + 2 \right) + 3 \frac{a_2}{a_1} \left(x + \frac{b_1}{a_1} + \frac{4}{3} \right).$$

4. TEOREMA II. — *Sia l'equazione lineare e omogenea alle differenze finite, d'ordine m (generico),*

$$[25] \quad (a_m x^{m|1} + p_{m-1}) \Delta^m y + (a_{m-1} x^{(m-1)|1} + p_{m-2}) \Delta^{m-1} y + \dots + \\ + (a_2 x^{2|1} + p_1) \Delta^2 y + (a_1 x + p_0) \Delta y + a_0 y = 0,$$

dove $p_{m-1}, p_{m-2}, \dots, p_1, p_0$ sono polinomi qualunque, interi in x , di gradi al più uguali ai rispettivi indici, e $a_m, a_{m-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$, con $a_0 \neq 0$, sono delle costanti.

Condizione necessaria e sufficiente affinché l'equazione [25] abbia fra le sue soluzioni un polinomio, intero in x , è che l'equazione algebrica (nell'incognita r)

$$[26] \quad f(r) \equiv a_m r^{m| - 1} + a_{m-1} r^{(m-1)| - 1} + \dots + a_2 r^{2| - 1} + a_1 r + a_0 = 0$$

abbia fra le sue radici un intero non negativo. Inoltre, se n è la minore delle radici intere non negative di [26], l'equazione [25] non ha soluzioni polinomiali di grado $< n$ ed ha fra le sue soluzioni uno e un solo polinomio $y_n(x)$ di grado n (escludendo, naturalmente, i polinomi che differiscono da $y_n(x)$ per una costante moltiplicativa). Se, poi, n è l'unico intero non negativo radice di [26], l'equazione [25] ha l'unica soluzione polinomiale $y_n(x)$ (prescindendo dai polinomi $cy_n(x)$, con c costante). Risulta

$$[27] \quad y_n(x) = \sum_{v=0}^n \frac{(-1)^v}{a_\mu^v} (\Theta_2 \Theta_1)^v x^{n \cdot 1},$$

dov'è

$$[28] \quad \Theta_1 = p_{m-1} \Delta^m + p_{m-2} \Delta^{m-1} + \dots + p_1 \Delta^2 + p_0 \Delta,$$

$$[29] \quad \Theta_2 = x^{n \cdot 1} \Delta^{-1} x^{-(n+1) \cdot 1} + \{r_2 \cdot 1\} \dots \Delta^{-1} x^{\{r_\mu - 1 + 1\} \cdot 1} + \{r_\mu \cdot 1\} \Delta^{-1} x^{-(r_\mu + 1) \cdot 1},$$

e inoltre a_μ è il primo non nullo dei coefficienti $a_m, a_{m-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ ed $n, r_2, \dots, r_{\mu-1}, r_\mu$ sono le radici di [26] (Δ^{-1} essendo sempre l'operazione introdotta alla fine del n. 1).

Dimostrazione. - 1° La condizione che [26] abbia una radice intera non negativa è necessaria. Invero, un polinomio di grado n , prescindendo da un eventuale fattore costante, si può sempre scrivere nella forma

$$P_n(x) = x^{n \cdot 1} + \alpha_{n-1} x^{(n-1) \cdot 1} + \dots + \alpha_2 x^{2 \cdot 1} + \alpha_1 x + \alpha_0.$$

Sostituendo, nel primo membro di [25], la y con $P_n(x)$, s'ottiene un polinomio $Q_n(x)$, di grado $\leq n$, il cui grado n^{esimo} eventuale viene dato dai termini

$$a_m x^{m \cdot 1} \Delta^m x^{n \cdot 1} + a_{m-1} x^{(m-1) \cdot 1} \Delta^{m-1} x^{n \cdot 1} + \dots + a_1 x \Delta x^{n \cdot 1} + a_0 x^{n \cdot 1},$$

cioè, per [8], da

$$a_m n^{m| - 1} x^{n \cdot 1} + a_{m-1} n^{(m-1)| - 1} x^{n \cdot 1} + \dots + a_2 n^{2| - 1} x^{n \cdot 1} + a_1 n x^{n \cdot 1} + a_0 x^{n \cdot 1},$$

vale a dire da $f(n) \cdot x^{n \cdot 1}$, dove $f(r)$ è il primo membro di [26]. Pertanto, se $P_n(x)$ è soluzione di [25], sarà necessariamente $f(n) = 0$, ossia è necessario che [26] abbia una radice intera non negativa n .

2° La condizione detta è pure sufficiente. Invero, l'equazione [25] si può scrivere

$$[30] \quad (p_{m-1} \Delta^m y + p_{m-2} \Delta^{m-1} y + \dots + p_1 \Delta^2 y + p_0 \Delta y) + \\ + (a_\mu x^{\mu-1} \Delta^\mu y + a_{\mu-1} x^{(\mu-1)-1} \Delta^{\mu-1} y + \dots + a_1 x \Delta y + a_0 y) = 0,$$

indicando con a_μ il primo non nullo dei coefficienti $a_m, a_{m-1}, \dots, a_1, a_0$. Supponiamo che [26] abbia almeno una radice intera non negativa: sia, in ogni caso, n la minore di tali radici e siano r_2, \dots, r_μ le altre radici di [26]. Allora l'espressione nella seconda parentesi a primo membro di [30], avendo la forma [13], si potrà scrivere analogamente a [13'], onde [30] diventa

$$\Theta_1 y + a_\mu x^{(r_\mu+1)-1} \Delta x^{-\{r_\mu\}-\{r_\mu-1+1\}} \dots \Delta x^{-\{r_2\}-\{(n+1)-1\}} \Delta x^{-\{n\}} y = 0,$$

dove Θ_1 è l'operazione [28]. Invertendo in quest'equazione l'operazione sottosegnata, e particolarizzando opportunamente tale inversione, si ottiene

$$[31] \quad \frac{1}{a_\mu} \Theta_2 \Theta_1 y + y = \pi(x) \cdot x^{n,1},$$

dove Θ_2 è l'operazione [29] e $\pi(x)$ è una funzione periodica arbitraria di periodo 1. Su [31] si può ragionare come s'è fatto su [20'] e concludere che la funzione razionale $y_n(x)$, di grado n , data da [27] è soluzione di [31] e quindi di [25]. Il fatto che n sia la minore delle radici intere non negative di [26], interviene nella conclusione

$$\frac{1}{a_\mu} \Theta_2 x^\nu = \frac{x^\nu}{f(\nu)} \quad \text{valida per } f(\nu) \neq 0.$$

3° L'equazione [25] non può avere come soluzione un polinomio di grado $n' < n$, perchè allora n' sarebbe radice di [26], contro il fatto che n è la minore delle radici non negative di [26]. E [25] non può avere come soluzione un polinomio

$$Y_n(x) = kx^n + hx^{n-1} + \dots$$

di grado n e linearmente indipendente da $y_n(x)$, perchè se [25] avesse una tale soluzione, avrebbe pure per soluzione $Y_n(x) - ky_n(x)$, polinomio non identicamente nullo e di grado $n' < n$, contrariamente a quanto si è già concluso.

Il teorema è così dimostrato.

Matematica. — *Sul calcolo delle vibrazioni trasversali di un'asta elastica soggetta a sforzo assiale* ⁽¹⁾. Nota di CARLO TOLOTTI, presentata ⁽²⁾ da MAURO PICONE, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. INTRODUZIONE.

È noto ⁽³⁾ che le vibrazioni trasversali di un'asta elastica di flessio-rigidità EI , densità lineare μ , soggetta ad uno sforzo assiale Π , sono rette dall'equazione alle derivate parziali

$$[1] \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\Pi \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

ove $u(x, t)$ denota l'abbassamento del punto di ascissa x all'istante t .

Fissando l'attenzione sul caso che l'asta sia incastrata agli estremi, nella presente Nota considero precisamente il problema dell'integrazione della [1], nel rettangolo R definito da $0 \leq x \leq l$ e $0 \leq t \leq T$, colle condizioni ai limiti

$$[2] \quad u = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{per } x = 0 \text{ e } x = l$$

ed iniziali

$$[3] \quad [u]_{t=0} = f_0(x), \quad \left[\frac{du}{dt} \right]_{t=0} = f_1(x).$$

Nell'ipotesi che l'asta sia omogenea e che il valore dello sforzo di compressione $-\Pi$ non superi alcuno dei carichi critici di EULERO, il teorema di unicità del problema [1], [2], [3] è stato anzitutto stabilito dal LAMPARIELLO ⁽⁴⁾ con un procedimento riallacciandosi a quello seguito

⁽¹⁾ Lavoro del Laboratorio di Analisi Superiore della R. Università di Roma, eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

⁽²⁾ Nell'Adunanza del 21 marzo 1942-XX.

⁽³⁾ Cfr. G. KRALL, *Meccanica tecnica delle vibrazioni*. Bologna, Zanichelli, 1940, vol. 2, pag. 45.

⁽⁴⁾ G. LAMPARIELLO, *Sull'equazione delle vibrazioni trasversali di un'asta elastica sollecitata agli estremi*. « Rend. Acc. Lincei », ser. 6^a, vol. XVI, 1932, pagg. 102-105.

dal LEVI-CIVITA in una precedente Nota ⁽⁵⁾ che il compianto illustre scienziato aveva dedicato alla dimostrazione del teorema di unicità e di esistenza degli integrali, periodici rispetto ad x e verificanti assegnate condizioni iniziali rispetto a t , di un'equazione rientrante come caso particolare nella [1].

Una dimostrazione del tutto generale del teorema di unicità del problema [1], [2], [3] è stata poi fornita dal PICONE, come esempio illustrativo, in una sua notevole Memoria ⁽⁶⁾, ove egli, riferendosi alle più generali formulazioni dei problemi dinamici, dà una sistemazione nuova e feconda al classico metodo di integrazione mediante sviluppo in serie per soluzioni elementari, presentandolo, assieme al metodo della trasformazione di LAPLACE, quali aspetti particolari di un metodo più generale da lui chiamato metodo delle trasformate delle soluzioni.

Nell'ordine di idee di tale Memoria del PICONE rientra la presente mia Nota, ove però è conseguito anche un teorema di esistenza della soluzione del problema [1], [2], [3].

Le ipotesi che assumo in partenza sono: che le funzioni note $I(x)$, $\Pi(x)$, $\mu(x)$, $f_0(x)$, $f_1(x)$ siano finite e continue in $(0, l)$, assieme alle derivate prime e seconde di $I(x)$ e alla derivata prima di $\Pi(x)$, e sia inoltre $I(x) > 0$, $\mu(x) > 0$; che la funzione incognita $u(x, t)$ venga ricercata tra le funzioni finite e continue in R colle derivate parziali che compaiono in [1] e con tutte le precedenti da cui quelle possono provenire.

In tali ipotesi calcolo anzitutto (n. 3) lo sviluppo che ogni eventuale soluzione $u(x, t)$ del problema [1], [2], [3] deve possedere in media, col peso $\mu(x)$, nell'intervallo $(0, l)$, per mezzo delle funzioni di un certo sistema $[\varphi^{(s)}(x)]$ completo per l'approssimazione lineare globale delle funzioni quasi continue in $(0, l)$ ed ivi di norma sommabile.

Successivamente, prendendo in esame la convergenza puntuale di detto sviluppo e serie derivate (convergenza che non è detto debba necessariamente sussistere anche se si ammette che il problema possieda una soluzione soddisfacente le ipotesi fatte), mostro (n. 4) che la formola risolutiva trovata fornisce un'effettiva soluzione del problema [1], [2], [3] purchè si introduca qualche ulteriore ipotesi sulle funzioni $I(x)$, $\Pi(x)$, $\mu(x)$, $f_0(x)$, $f_1(x)$. Queste ulteriori ipotesi si trovano precisate al n. 4, ma rileverò fin da ora che quelle di esse, che non sono necessaria conse-

⁽⁵⁾ T. LEVI-CIVITA, *Teoremi di unicità e di esistenza per le piccole oscillazioni di un filetto vorticoso prossimo alla forma circolare*. « Rend. Acc. Lincei », ser. 6^a, vol. XV, 1932, pagg. 410-416.

⁽⁶⁾ M. PICONE, *Formole risolutive, teoremi d'unicità e di esistenza nei problemi dinamici con assegnati spostamento e atto di moto iniziali*. « Rend. Semin. Mat. R. Univ. di Roma », ser. 4^a, vol. 1, fasc. 3, 1937, pag. 217.

guenza di [1], [2], [3], hanno esclusivamente carattere qualitativo, come era desiderabile.

Nei riguardi dello studio dei detti sviluppi in serie di funzioni del sistema $[\varphi^{(s)}(x)]$, osserverò che come tale ho assunto il sistema delle autosoluzioni di un certo problema omogeneo autoaggiunto del 4° ordine. Onde al n. 2 ho premesso alcuni teoremi sulla convergenza e derivabilità termine a termine degli sviluppi in serie di autosoluzioni di questo problema (7), estendendo quanto, a completamento del classico teorema di sviluppabilità di HILBERT-SCHMIDT, fa in proposito il PICONE nei suoi *Appunti d'Analisi superiore* (8) per i problemi autoaggiunti del 2° ordine.

Ho dedicato infine il n. 5 al calcolo degli autovalori e delle autosoluzioni del detto problema autoaggiunto per il caso di un'asta omogenea soggetta a sforzo assiale costante, mentre al n. 6, in base ai risultati del n. 5, dimostro che, anche nel caso generale, l'insieme degli autovalori è limitato inferiormente, proprietà questa che interviene in modo essenziale nella dimostrazione del teorema di esistenza del n. 4.

2. PREMESSE SUGLI SVILUPPI IN SERIE

DI AUTOSOLUZIONI DI UN CERTO PROBLEMA AUTOAGGIUNTO DEL 4° ORDINE.

Si consideri il problema omogeneo autoaggiunto relativo all'equazione differenziale ordinaria del 4° ordine

$$[4] \quad L[u] - \lambda \mu u = 0,$$

con

$$[5] \quad L[u] = \frac{d^2}{dx^2} \left[EI \frac{d^2 u}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[\Pi \frac{du}{dx} \right] + c \mu u,$$

e alle condizioni ai limiti

$$[6] \quad u = \frac{du}{dx} = 0 \quad \text{per } x = 0 \text{ e } x = l.$$

Per le funzioni $I(x)$, $\Pi(x)$, $\mu(x)$ manterremo le ipotesi precisate al n. 1. In tali ipotesi, se c non è autovalore per l'equazione $L[u] = 0$

(7) Cfr. anche, per le derivazioni dei due primi ordini, V. GIUSTI, *Sviluppi in serie tipo Fourier di un vettore, secondo autovettori di un certo problema, e applicazione all'integrazione dell'equazione lineare a derivate parziali del 4° ordine competente al moto delle sbarre vibranti, dotate d'inerzia rotatoria*. « Rend. Circ. Mat. Palermo », vol. LXIII, 1941.

(8) M. PICONE, *Appunti d'Analisi superiore*. Napoli, Rondinella, 1940, pagg. 821-831.

colle condizioni ai limiti [6], è noto ⁽⁹⁾ che per l'espressione differenziale $L[u]$, colle dette condizioni ai limiti, esiste la funzione di Green $G(x, y)$ reale, continua e simmetrica nelle variabili x ed y . Inoltre, considerata ad esempio come funzione di x , la $G(x, y)$ possiede, per ogni y , derivate prime e seconde finite e continue nell'intervallo $(0, l)$, mentre la sua derivata terza è finita e continua in $(0, y-0)$ e in $(y+0, l)$ ed ha nel punto $x = y$ una discontinuità di prima specie con salto eguale a $\frac{1}{EI}$.

La ricerca degli autovalori di λ relativi alle equazioni [4] e [6] coincide con quella degli autovalori del parametro λ nell'equazione integrale

$$[7] \quad u(x) = \lambda \int_0^l G(x, y) \mu(y) u(y) dy,$$

il cui nucleo è del tipo SCHMIDT-GOURSAT. Onde tali autovalori esistono, sono reali ed ordinabili in una successione ⁽¹⁰⁾. Vedremo anzi che essi sono infiniti ma che il loro insieme (spettro) è limitato inferiormente (n. 6).

Sia $[\lambda^{(n)}]$ la successione ottenuta disponendo detti autovalori in ordine di modulo non decrescente, ciascuno ripetuto tante volte quante unità ha il suo rango; e sia $[\varphi^{(n)}(x)]$ il sistema delle corrispondenti auto-soluzioni, ortogonale e normale nell'intervallo $(0, l)$ rispetto alla funzione peso $\mu(x)$.

È facilmente constatabile, in base alla definizione di $G(x, y)$, che, comunque si assegni un polinomio $P(x)$ ed un numero positivo ε , si può sempre determinare una funzione continua $\varphi(x)$ per cui risulti

$$[8] \quad \int_0^l \left| P(x) - \int_0^l G(x, y) \varphi(y) dy \right|^2 dx < \varepsilon.$$

Infatti, detto M un numero non superato da $|P(x)|$ in $(0, l)$, si consideri un intervallo (x_1, x_2) interno a $(0, l)$ tale che $l - (x_2 - x_1) < \frac{\varepsilon}{4M^2}$ ed una funzione $\psi(x)$ che goda nell'intervallo $(0, l)$ delle seguenti proprietà: abbia sempre un modulo non superiore ad M , sia finita e continua colle sue derivate fino al 4° ordine incluso, si annulli colla sua derivata prima per $x = 0$ ed $x = l$ e coincida con $P(x)$ in (x_1, x_2) . Per soddisfare la [8] basta allora assumere $\varphi = L[\psi]$.

⁽⁹⁾ Cfr. M. PICONE, *Sui valori eccezionali di un parametro da cui dipende un'equazione differenziale lineare ordinaria del second'ordine*. « Annali R. Scuola Norm. Sup. Pisa », vol. XI, 1910, pag. 130.

⁽¹⁰⁾ Cfr. loc. cit. ⁽⁸⁾, pag. 617.

Ne segue notoriamente⁽¹⁾ che il sistema $[\varphi^{(s)}(x)]$ è completo per l'approssimazione lineare in media delle funzioni quasi continue in $(0, l)$ ed ivi di norma sommabile. Onde $[\lambda^{(s)}]$ è infinito e, se $f(x)$ denota una di dette funzioni, la relativa serie di FOURIER nel sistema $[\varphi^{(s)}(x)]$

$$[9] \quad \sum_{s=1}^{\infty} \varphi^{(s)}(x) \int_0^l \mu f \varphi^{(s)} dy$$

converge in media in $(0, l)$ verso $f(x)$.

Passiamo ora a dare dei criteri di convergenza assoluta ed uniforme della serie [9] e serie derivate.

Dimostreremo anzitutto che:

Se $f(x)$ è finita e continua colle derivate dei primi quattro ordini e verifica le condizioni

$$[10] \quad f = \frac{df}{dx} = 0 \quad \text{per } x=0 \text{ ed } x=l,$$

la serie [9] converge assolutamente ed uniformemente in $(0, l)$ verso $f(x)$. Inoltre ivi convergono assolutamente ed uniformemente anche le serie che si ottengono da [9] mediante derivazioni termine a termine fino all'ordine tre incluso.

Si ha difatti, nelle ipotesi ammesse,

$$f(x) = \int_0^l G(x, y) L[f(y)] dy,$$

da cui, tenendo presente che

$$[11] \quad \varphi^{(s)}(x) = \lambda^{(s)} \int_0^l G(x, y) \mu(y) \varphi^{(s)}(y) dy,$$

segue come espressione delle coordinate di FOURIER della $f(x)$ nel sistema $[\varphi^{(s)}(x)]$

$$[12] \quad \int_0^l \mu f \varphi^{(s)} dy = \frac{1}{\lambda^{(s)}} \int_0^l \varphi^{(s)} L[f] dy.$$

In virtù di [12], la serie ottenuta da [9] mediante derivazione termine a termine, di ordine r qualsiasi, si scrive

$$[13] \quad \sum_{s=1}^{\infty} \frac{d^r \varphi^{(s)}}{dx^r} \frac{1}{\lambda^{(s)}} \int_0^l \varphi^{(s)} L[f] dy.$$

⁽¹⁾ Cfr. loc. cit. (*), pag. 550 e pag. 617.

D'altra parte, tenendo conto di [11] e del lemma di BESSEL, si ha per $r = 0, 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} \left(\sum_n^{n+p} \left| \frac{d^r \varphi^{(s)}}{dx^r} \frac{1}{\lambda^{(s)}} \int_0^l \varphi^{(s)} L[f] dy \right| \right)^2 &\leq \sum_n^{n+p} \left(\frac{1}{\lambda^{(s)}} \frac{d^r \varphi^{(s)}}{dx^r} \right)^2 \sum_n^{n+p} \left(\int_0^l \varphi^{(s)} L[f] dy \right)^2 \leq \\ &\leq \int_0^l \mu(y) \left(\frac{\partial^r G(x, y)}{\partial x^r} \right)^2 dy \cdot \int_0^l \frac{1}{\mu} (L[f])^2 dy; \end{aligned}$$

e di qui, data la limitatezza degli integrali comparenti nell'ultimo membro, segue l'asserita assoluta ed uniforme convergenza della serie [13] per $r = 0, 1, 2, 3$.

Ci interessa però per le applicazioni del n. 4 dare anche un criterio per la convergenza assoluta ed uniforme della serie che si ottiene da [9] derivando quattro volte termine a termine, nonchè della serie

$$[14] \quad \sum_{s=1}^{\infty} \lambda^{(s)} \varphi^{(s)}(x) \int_0^l \mu f \varphi^{(s)} dy.$$

In proposito dimostreremo che:

Se $f(x)$ è finita e continua colle derivate dei primi otto ordini e verifica, oltre le [10], le condizioni

$$[15] \quad L[f] = \frac{d}{dx} L[f] = 0 \quad \text{per } x = 0 \text{ ed } x = l,$$

e se $\mu(x)$, $\Pi(x)$, $I(x)$ sono finite e continue colle derivate dei primi quattro, cinque, sei ordini rispettivamente, allora risultano assolutamente ed uniformemente convergenti in $(0, l)$ sia le serie che si ottengono da [9] mediante derivazioni termine a termine fino all'ordine quattro incluso e sia la serie [14] ⁽¹²⁾.

Ed inverso, poichè

$$EI \frac{d^4 \varphi^{(s)}}{dx^4} = -2E \frac{dI}{dx} \frac{d^3 \varphi^{(s)}}{dx^3} + \left(\Pi - E \frac{d^2 I}{dx^2} \right) \frac{d^2 \varphi^{(s)}}{dx^2} + \frac{d\Pi}{dx} \frac{d\varphi^{(s)}}{dx} + \mu (\lambda^{(s)} - c) \varphi^{(s)},$$

la già dimostrata assoluta ed uniforme convergenza delle serie provenienti da [9] mediante derivazione termine a termine fino all'ordine tre incluso

⁽¹²⁾ Mi sono limitato a dare un criterio per la derivabilità termine a termine della serie [9] fino all'ordine quattro, dato che ciò mi interessava per gli sviluppi successivi; ma non sarebbe stato difficile estendere, nella sua generalità, alla serie [9] il criterio di derivabilità termine a termine di ordine comunque elevato dato dal PICONE in loc. cit. ⁽⁸⁾, pag. 829 per gli sviluppi in serie di autosoluzioni di equazioni del 2° ordine.

porta come conseguenza anche quella della serie ottenuta derivando quattro volte, non appena si stabilisca la convergenza assoluta ed uniforme in $(0, l)$ della serie [14].

D'altra parte, tenendo conto di [12], la serie [14] si scrive

$$[14'] \quad \sum_{s=1}^{\infty} \varphi^{(s)}(x) \int_0^l \varphi^{(s)} L[f] dy,$$

onde appare non trattarsi altro che della serie di FOURIER della funzione $\frac{1}{\mu} L[f]$ nel sistema $[\varphi^{(s)}]$.

L'applicazione del teorema precedente alla funzione $\frac{1}{\mu} L[f]$ porta allora a riconoscere che, nelle ipotesi del presente teorema, la serie [14'], e quindi [14], converge assolutamente ed uniformemente in $(0, l)$.

3. TEOREMA DI UNICITÀ E FORMULA RISOLUTIVA.

Ritornando all'originario problema alle derivate parziali [1], [2], [3], si consideri la seguente trasformata della u

$$[16] \quad u^{(s)}(t) = \int_0^l \mu(x) u(x, t) \varphi^{(s)}(x) dx,$$

ove $\varphi^{(s)}(x)$ denota, come al n. 2, la generica autosoluzione del problema autoaggiunto [4], [6].

Supposta $u(x, t)$ soluzione del problema [1], [2], [3], vale per essa, ad ogni istante t , la relazione [cfr. [12]]

$$\int_0^l \varphi^{(s)} L[u] dx = \lambda^{(s)} u^{(s)}.$$

Onde, moltiplicando [1] per $\varphi^{(s)}(x)$ ed integrando rispetto ad x tra 0 ed l , si ottiene per la trasformata $u^{(s)}(t)$ l'equazione differenziale ordinaria

$$[17] \quad \frac{d^2 u^{(s)}}{dt^2} + (\lambda^{(s)} - c) u^{(s)} = 0,$$

mentre da [3] si hanno, similmente, le condizioni iniziali

$$[18] \quad [u^{(s)}]_{t=0} = \int_0^l \mu f_0 \varphi^{(s)} dx, \quad \left[\frac{du^{(s)}}{dt} \right]_{t=0} = \int_0^l \mu f_1 \varphi^{(s)} dx.$$

Posto

$$[19] \quad v_s = \sqrt{|\lambda^{(s)} - c|},$$

l'integrazione di [17] colle condizioni iniziali [18] dà, in corrispondenza a quegli indici s per cui è $\lambda^{(s)} < c$,

$$[20] \quad u^{(s)}(t) = \cosh v_s t \int_0^l \mu f_0 \varphi^{(s)} dx + \frac{\sinh v_s t}{v_s} \int_0^l \mu f_1 \varphi^{(s)} dx;$$

se $\lambda^{(s)} = c$ si ha invece

$$[21] \quad u^{(s)}(t) = \int_0^l \mu f_0 \varphi^{(s)} dx + t \int_0^l \mu f_1 \varphi^{(s)} dx,$$

mentre, in corrispondenza a quegli indici s per cui è $\lambda^{(s)} > c$, si ha infine

$$[22] \quad u^{(s)}(t) = \cos v_s t \int_0^l \mu f_0 \varphi^{(s)} dx + \frac{\sin v_s t}{v_s} \int_0^l \mu f_1 \varphi^{(s)} dx.$$

Si può pertanto concludere in virtù della completezza del sistema $\{\varphi^{(s)}(x)\}$:

Se il problema [1], [2], [3] ha una soluzione, essa non può esser data che dalla formula

$$[23] \quad u(x, t) \simeq \sum_1^\infty u^{(s)}(t) \varphi^{(s)}(x),$$

colle $u^{(s)}$ definite da [20], [21], [22] a seconda che $\lambda^{(s)} \leq c$.

4. TEOREMA D'ESISTENZA.

Si denoti, come al n. 1, con R il rettangolo definito da $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$. Affinchè la serie [23] fornisca in R un'effettiva soluzione del problema [1], [2], [3], basta evidentemente che tale serie risulti assolutamente ed uniformemente convergente in R assieme a quelle che se ne deducono derivando parzialmente quattro volte rispetto ad x oppure due volte rispetto a t .

A tal scopo si osservi che, come dimostreremo al n. 6, da un certo $s = s_1$ in poi è certamente $\lambda^{(s)} > c + 1$ e quindi, tenendo presente [19] e [22], $v_s > 1$ e

$$\begin{aligned} |u^{(s)}(t)| &\leq \left| \int_0^l \mu f_0 \varphi^{(s)} dx \right| + \frac{1}{v_s} \left| \int_0^l \mu f_1 \varphi^{(s)} dx \right|, \\ \left| \frac{du^{(s)}}{dt} \right| &\leq v_s \left| \int_0^l \mu f_0 \varphi^{(s)} dx \right| + \left| \int_0^l \mu f_1 \varphi^{(s)} dx \right|, \\ \left| \frac{d^2 u^{(s)}}{dt^2} \right| &\leq v_s^2 \left| \int_0^l \mu f_0 \varphi^{(s)} dx \right| + v_s \left| \int_0^l \mu f_1 \varphi^{(s)} dx \right|. \end{aligned}$$

In base a tali diseuguaglianze, segue dai criteri di convergenza assoluta ed uniforme dati al n. 2 che, se $f_0(x)$ ed $f_1(x)$ sono finite e continue colle derivate dei primi otto ordini e verificano le condizioni

$$[24] \quad \begin{cases} f_0 = \frac{df_0}{dx} = L[f_0] = \frac{d}{dx} L[f_0] = 0 \\ f_1 = \frac{df_1}{dx} = L[f_1] = \frac{d}{dx} L[f_1] = 0 \end{cases} \quad \text{per } x=0 \text{ ed } x=l,$$

e se inoltre $\mu(x)$, $\Pi(x)$, $I(x)$ sono finite e continue rispettivamente colle derivate dei primi quattro, cinque, sei ordini, allora la serie [23] risulta assolutamente ed uniformemente convergente in R assieme a quelle che se ne deducono derivando parzialmente quattro volte rispetto ad x oppure due volte rispetto a t e fornisce quindi un'effettiva soluzione del problema [1], [2], [3].

Osserveremo esplicitamente che, avendosi da [1] e [3]

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{t=0} = cf_0 - \frac{1}{\mu} L[f_0]$$

e

$$\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right)_{t=0} = cf_1 - \frac{1}{\mu} L[f_1],$$

le condizioni [24] sono necessaria conseguenza delle [2], una volta ammessa la derivabilità di f_0 , f_1 , μ , Π , I fino agli ordini sopradetti.

Si può pertanto enunciare:

Affinchè la serie [23] fornisca un'effettiva soluzione del problema [1], [2], [3] è sufficiente che le funzioni $\mu(x)$, $\Pi(x)$, $I(x)$, $f_0(x)$, $f_1(x)$ siano finite e continue in $(0, 1)$ assieme alle loro derivate dei primi quattro, cinque, sei ordini rispettivamente per $\mu(x)$, $\Pi(x)$, $I(x)$ e dei primi otto ordini per $f_0(x)$ ed $f_1(x)$ e che inoltre (come, in tali ipotesi, è del resto anche necessario) siano soddisfatte le condizioni [24].

5. CASO DI UN'ASTA OMOGENEA SOGGETTA A SFORZO ASSIALE COSTANTE.

Se μ , Π , I sono costanti, il problema omogeneo autoaggiunto [4], [6], considerato al n. 2, si riduce a quello dell'integrazione della seguente equazione lineare a coefficienti costanti

$$[4'] \quad EI \frac{d^4 u}{dx^4} - \Pi \frac{d^2 u}{dx^2} + (c - \lambda) \mu u = 0$$

colle condizioni ai limiti [6].

Lo studio degli autovalori di λ relativi a [4'], [6], nonché quello delle corrispondenti autosoluzioni, si conduce per via elementare in modo ben noto. Mi limiterò qui a riportare i soli risultati.

Anzitutto i detti autovalori di λ , oltrechè essere tutti reali (n. 2), risultano certamente maggiori di $c - \frac{\Pi^2}{4\mu EI}$.

Inoltre solo se è $\Pi < 0$ possono esistere autovalori nell'intervallo

$$c - \frac{\Pi^2}{4\mu EI} < \lambda \leq c;$$

e precisamente, posto

$$[25] \quad \alpha = \sqrt{\left| \frac{\Pi}{2EI} + \sqrt{\left(\frac{\Pi}{2EI} \right)^2 - \frac{\mu}{EI} (c - \lambda)} \right|}$$

e

$$[26] \quad \beta = \sqrt{\left| \frac{\Pi}{2EI} - \sqrt{\left(\frac{\Pi}{2EI} \right)^2 - \frac{\mu}{EI} (c - \lambda)} \right|},$$

essi sono caratterizzati dalle equazioni in λ :

$$[27] \quad \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha l}{2} = \beta \operatorname{tg} \frac{\beta l}{2},$$

o

$$[28] \quad \frac{1}{\alpha} \operatorname{tg} \frac{\alpha l}{2} = \frac{1}{\beta} \operatorname{tg} \frac{\beta l}{2},$$

o

$$[29] \quad \cos \frac{\alpha l}{2} = \cos \frac{\beta l}{2} = 0.$$

Gli autovalori di λ maggiori di c sono invece caratterizzati, per qualunque Π , dalle equazioni:

$$[30] \quad \alpha \operatorname{tgh} \frac{\alpha l}{2} = -\beta \operatorname{tg} \frac{\beta l}{2},$$

o

$$[31] \quad \frac{1}{\alpha} \operatorname{tgh} \frac{\alpha l}{2} = \frac{1}{\beta} \operatorname{tg} \frac{\beta l}{2},$$

con α e β ancora dati da [25], [26].

Si consideri ora, sullo stesso asse di rappresentazione di λ e rispetto allo stesso sistema di ascisse, l'insieme H dei punti corrispondenti ai valori

$$\nu_n = c + (2n-1)^2 \frac{\pi^2}{\mu l^2} \left[(2n-1)^2 \frac{EI \pi^2}{l^2} + \Pi \right]$$

con $n = 1, 2, 3, \dots$. È certamente $\nu_n \geq c - \frac{\Pi^2}{4\mu EI}$. Denoteremo con H'' l'insieme costituito dai punti di H le cui ascisse sono altresì maggiori

di c e con H' l'insieme $H - H''$. Se in particolare è $\Pi \equiv 0$, l'insieme H' è vuoto.

Ebbene, dallo studio delle equazioni [27], [28], [29], [30], [31] risulta che:

1° non esistono autovalori di λ a sinistra di tutti i punti di H ;
 2° ogni punto di H' che corrisponde a due ν_n , con indici diversi, è autovalore di λ verificante le [29];

3° entro ogni intervallo avente per estremi due punti consecutivi di H' , esistono due e solo due autovalori di λ , eventualmente coincidenti, di cui uno verifica la [27] e l'altro la [28];

4° entro ogni intervallo avente per estremi due punti consecutivi di H'' , esistono due e solo due autovalori di λ , sempre distinti, di cui uno verifica la [30] e l'altro la [31];

5° entro l'intervallo che ha per estremi l'ultimo punto di H' ed il primo di H'' , esistono due e solo due autovalori di λ , eventualmente coincidenti, di cui uno verifica la [27] o la [30] a seconda che è $\text{tg } \gamma \geq 0$ o $\text{tg } \gamma < 0$ con

$$\gamma = \frac{l}{2} \sqrt{\left| \frac{\Pi}{EI} \right|},$$

mentre l'altro verifica la [28] o la [31] a seconda che è $\text{tg } \gamma \geq \gamma$ o $\text{tg } \gamma < \gamma$.

Per quanto riguarda il rango degli autovalori in questione, va osservato che sono autovalori di rango due tutti e solo quelli che verificano simultaneamente [27] e [28] oppure le [29]. L'espressione generale delle corrispondenti autosoluzioni è

$$u(x) = c_1 (\cos \alpha x - \cos \beta x) + c_2 \left(\frac{\sin \alpha x}{\alpha} - \frac{\sin \beta x}{\beta} \right),$$

con c_1, c_2 costanti arbitrarie.

Tutti gli altri autovalori sono di rango uno e l'espressione generale delle corrispondenti autosoluzioni è, per gli autovalori minori od eguali a c ,

$$u(x) = c_1 \left[\left(\frac{\sin \alpha l}{\alpha} - \frac{\sin \beta l}{\beta} \right) (\cos \alpha x - \cos \beta x) - \right. \\ \left. - (\cos \alpha l - \cos \beta l) \left(\frac{\sin \alpha x}{\alpha} - \frac{\sin \beta x}{\beta} \right) \right]$$

con c_1 costante arbitraria, mentre per gli autovalori maggiori di c essa è

$$u(x) = c_1 \left[\left(\frac{\sinh \alpha l}{\alpha} - \frac{\sinh \beta l}{\beta} \right) (\cosh \alpha x - \cosh \beta x) - \right. \\ \left. - (\cosh \alpha l - \cosh \beta l) \left(\frac{\sinh \alpha x}{\alpha} - \frac{\sinh \beta x}{\beta} \right) \right],$$

con c_1 ancora costante arbitraria.

Noteremo qui infine esplicitamente che, pur di contare ogni autovaleore tante volte quante unità ha il suo rango, il numero degli autovalori di λ minori od eguali a c coincide con quello dei carichi critici di EULERO non superanti lo sforzo di compressione considerato — II.

6. RITORNO AL GENERALE PROBLEMA AUTOAGGIUNTO DEL N. 2:
DIMOSTRAZIONE CHE IL RELATIVO SPETTRO È LIMITATO INFERIORMENTE.

Si consideri il funzionale

$$F[u] \equiv c + \int_0^l \left[EI \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right)^2 + \Pi \left(\frac{du}{dx} \right)^2 \right] dx,$$

e sia U la classe delle funzioni finite e continue colle loro derivate dei primi quattro ordini, verificanti le condizioni [6] e la seguente

$$\int_0^l \mu u^2 dx = 1.$$

Posto

$$f = \frac{1}{\mu} L[u],$$

si ha per ogni u appartenente ad U

$$F[u] = \int_0^l u L[u] dx = \int_0^l \mu u f dx,$$

mentre d'altra parte è (n. 2)

$$u(x) = \int_0^l G(x, y) \mu(y) f(y) dy.$$

Ne segue che l'insieme numerico descritto da $F[u]$ al variare di u in U è quello stesso descritto dal funzionale

$$\int_0^l \int_0^l G(x, y) \mu(x) \mu(y) f(x) f(y) dx dy$$

al variare di f nella classe delle funzioni continue verificanti la condizione

$$\int_0^l \mu(x) \left(\int_0^l G(x, y) \mu(y) f(y) dy \right)^2 dx = 1,$$

e pertanto ⁽¹³⁾ che $F[u]$ ha in U l'estremo inferiore e superiore della successione $[\lambda^{(s)}]$ degli autovalori di λ relativi al problema [4], [6] del n. 2.

Tenendo presente tale proprietà è evidente che la successione $[\lambda^{(s)}]$ ha un estremo inferiore e superiore certamente non minori di quelli della successione $[\tilde{\lambda}^{(s)}]$ degli autovalori di λ relativi al problema che si ottiene da [4], [6] sostituendo le funzioni $I(x)$, $\Pi(x)$, $\mu(x)$ colle costanti I_{\min} , Π_{\min} , μ_{\max} . Ma, come abbiamo visto al n. 5, quest'ultima successione ha un'estremo inferiore (minimo) finito e per estremo superiore $+\infty$. Onde altrettanto si può affermare per la successione $[\lambda^{(s)}]$.

Resta così pienamente giustificata l'asserzione, su cui sono basate le considerazioni del n. 4, che, solo per un numero finito di valori dell'indice s , può essere $\lambda^{(s)} \leq c$ e quindi $u^{(s)}(t)$ avere le espressioni [20] o [21] le quali (a meno che f_0 ed f_i non verifichino particolari ipotesi) divergono infinite per $t \rightarrow \infty$.

⁽¹³⁾ Cfr. loc. cit. ⁽⁸⁾, pag. 613.

Astronomia. — *Osservazioni meridiane di ascensioni rette di Marte, Giove, Saturno ed Urano nel 1941 e nel 1942* ⁽¹⁾.
Nota di MASSIMO CIMINO, presentata ⁽²⁾ da GIUSEPPE AR-
MELLINI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. — Le osservazioni di ascensioni rette di Marte, Giove, Saturno ed Urano che presento in questa Nota sono state eseguite alla fine del 1941 e al principio del 1942 all'invertibile meridiano *Bamberg* del R. Osservatorio Astronomico di Roma su Monte Mario. Lo strumento a cannocchiale a gomito ha un'apertura di mm. 88, ed una distanza focale di cm. 95; l'ingrandimento usato è stato quello massimo di 100 diametri circa. Il micrometro filare comprende 3 gruppi di 5 fili ciascuno e le osservazioni sono state eseguite prendendo gli appulsi al cronografo al passaggio delle stelle, o dei bordi dei pianeti, al primo gruppo di fili e quindi di nuovo allo stesso gruppo di fili dopo avere invertito lo strumento. Ho sempre mantenuto i fili oscuri ed il campo bene illuminato. Il pendolo adoperato è stato il *Dent* n. 956 ad asta *invar*.

Lo strumento è provvisto di una livella azimutale sospesa all'asse di rotazione del cannocchiale, il cui valore di una divisione è $0^{\circ}.085$. Poichè è stata riscontrata una sensibile variazione dell'inclinazione dell'asse di rotazione del cannocchiale alle diverse distanze zenitali ed una pure sensibile variazione concomitante con quella della temperatura, ho eseguito la lettura della livella avanti il primo e dopo il secondo passaggio di ogni stella (o dei pianeti), deducendo da tali letture il valore dell'inclinazione dell'asse da assumere nella riduzione dei dati osservati ⁽³⁾.

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nel R. Osservatorio Astronomico di Roma su Monte Mario e nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

⁽²⁾ Nell'Adunanza del 21 marzo 1942-XX.

⁽³⁾ Alcune prove sistematiche da me eseguite per controllare le variazioni dell'inclinazione dell'asse di rotazione del cannocchiale alle diverse distanze zenitali z e al variare della temperatura t , hanno dimostrato in modo non dubbio che l'inclinazione i , — ottenuta puntando il cannocchiale ad una assegnata distanza zenitale, leggendo la livella, rovesciando lo strumento e ripuntando il cannocchiale alla stessa distanza zenitale, e leggendo infine nuovamente la livella, —

Le stelle di confronto, — tutte fondamentali, — sono state scelte nelle immediate vicinanze del pianeta che si doveva osservare; in ogni serata sono state osservate una o due circumpolari per la determinazione dell'azimut strumentale. A causa delle persistenti sfavorevoli condizioni del tempo, — che ha anche limitato il numero delle osservazioni, — non è stato materialmente possibile fare in modo che le stelle di confronto fossero sempre simmetricamente disposte attorno alla posizione del pianeta. Per tale ragione, una volta ottenuta la correzione Δt dell'orologio come media dei Δt delle *stelle orarie*, si è attribuita questa correzione all'epoca media delle osservazioni di tutte le stelle, ed è stata quindi apportata una ulteriore correzione ai tempi di osservazione dei passaggi dei pianeti in base all'andamento dell'orologio. Quest'ultima correzione è però risultata sempre assai esigua.

Per la correzione dell'orologio ho impiegato la formula del MAYER:

$$\Delta t = \alpha - t_{\text{oss}} - i \cos z \sec \delta - a \sin z \sec \delta$$

α e δ essendo l'ascensione retta e la declinazione apparenti della stella, z la distanza zenitale, t_{oss} il tempo di osservazione desunto dalla lettura delle strisce cronografiche, i ed a i coefficienti di inclinazione e azimutale ⁽¹⁾. Nella tabella I riporto le posizioni medie delle stelle di confronto, mentre nella tabella II si trovano riassunti i risultati delle osservazioni stellari per ogni serata, relativi alle sole stelle orarie dalle quali è stata dedotta la correzione Δt dell'orologio. Tutte le posizioni apparenti delle stelle di confronto sono state desunte dal *Berliner Astronomisches Jahrbuch*.

si può esprimere mediante una funzione del tipo: $i(z, t) = \alpha + \beta z - \gamma t + f(z)$, con $f(z)$ sensibilmente periodica, α valore di i per $z = 0$ e $t =$ temperatura iniziale, e β e γ coefficienti costanti *positivi*.

⁽¹⁾ Poichè l'ammontare della correzione per l'aberrazione diurna differenziale tra le stelle di confronto e i pianeti raggiunge al più il valore di 0^s.001, non si è tenuto conto di tale correzione.

TABELLA I.

Stelle di confronto.

*	Nome	<i>m</i>	$\alpha_{1941.0}$	$\delta_{1941.0}$
			$\alpha_{1942.0}$	$\delta_{1942.0}$
1	χ Piscium	4 ^m .94	23 ^h 23 ^m 54 ^s .40	+ 0° 55' 56".66
2	ι Piscium	4 .28	23 36 54 .83	+ 5 18 23 .00
3	ω Piscium	4 .03	23 56 16 .77	+ 6 32 12 .05
4	γ Pegasi	2 .87	0 10 11 .64	+ 14 51 20 .43
5	12 Ceti	6 .04	0 27 01 .61	— 4 16 58 .96
6	ϵ Piscium	4 .45	0 59 52 .67	+ 7 34 22 .60
7	η Piscium	3 .72	1 28 19 .30	+ 15 02 32 .19
8	\circ Piscium	4 .50	1 42 16 .46	+ 8 51 41 .60
9	ξ Piscium	4 .84	1 50 29 .88	+ 2 53 49 .45
10	α Arietis	2 .23	2 03 53 .86	+ 23 11 20 .79
11	ν Arietis	5 .36	2 35 31 .00	+ 21 42 42 .31
12	μ Ceti	4 .36	2 41 48 .15	+ 9 52 13 .30
13	δ Arietis	4 .53	3 08 18 .43	+ 19 30 31 .27
14	ζ Tauri	4 .28	3 27 40 .01	+ 12 44 21 .50
15	η Tauri	2 .96	3 44 01 .89	+ 23 55 38 .36
16	λ Tauri	var.	3 57 27 .79	+ 12 19 40 .49
17	ϵ Tauri	3 .63	4 25 13 .56	+ 19 03 12 .41
18	ι Tauri	4 .70	4 59 37 .53	+ 21 30 32 .02
19	β Tauri	1 .78	5 22 37 .37	+ 28 33 37 .25
20	ζ Tauri	3 .00	5 34 10 .58	+ 21 06 32 .23

TABELLA II.

Correzione serale dell'orologio.

Data	*	$\alpha_{app.}$	t_{oss}	$i \cos z$ sec δ	$a \sin z$ sec δ	Δt	Medie serali Δt
1941							
Nov. 26 . .	4	0h10m 14s.94	0h09m 47s.92	— 0s.00.2	+ 1s.21.1	+ 25s.81	+ 25s.79.7
	3	23 56 19 .87	23 55 52 .56	+ 0 .03.3	+ 1 .50.0	+ 25 .78	
	2	23 36 57 .82	23 36 30 .47	+ 0 .01.5	+ 1 .53.9	+ 25 .80	
» 28 . .	4	0 10 14 .92	0 09 46 .90	+ 0 .02.7	+ 1 .12.0	+ 26 .87	+ 26 .86.5
	3	23 56 19 .85	23 55 51 .59	+ 0 .02.7	+ 1 .38.7	+ 26 .85	
	2	23 36 57 .80	23 36 29 .45	+ 0 .01.9	+ 1 .42.4	+ 26 .91	
	1	23 23 57 .24	23 23 28 .84	+ 0 .01.0	+ 1 .56.1	+ 26 .83	
» 29 . .	4	0 10 14 .91	0 09 46 .35	+ 0 .08.1	+ 1 .16.8	+ 27 .31	+ 27 .34.9
	6	0 59 56 .11	0 59 27 .35	+ 0 .03.4	+ 1 .41.1	+ 27 .31	
	3	23 56 19 .84	23 55 50 .93	+ 0 .07.7	+ 1 .44.6	+ 27 .39	
	5	0 27 04 .71	0 26 35 .53	+ 0 .00.3	+ 1 .79.6	+ 27 .38	
Dic. 1 . .	4	0 10 14 .89	0 09 45 .32	+ 0 .04.1	+ 1 .20.2	+ 28 .33	+ 28 .34.0
	6	0 59 56 .10	0 59 26 .24	+ 0 .04.1	+ 1 .45.3	+ 28 .37	
	3	23 56 19 .82	23 55 49 .95	+ 0 .05.9	+ 1 .48.9	+ 28 .32	
	2	23 36 57 .76	23 36 27 .83	+ 0 .05.1	+ 1 .52.8	+ 28 .35	
	1	23 23 57 .20	23 23 27 .16	+ 0 .03.5	+ 1 .67.5	+ 28 .33	
» 2 . .	4	0 10 14 .88	0 09 44 .73	+ 0 .06.7	+ 1 .10.9	+ 28 .97	+ 28 .97.3
	6	0 59 56 .09	0 59 25 .75	+ 0 .06.9	+ 1 .34.0	+ 28 .93	
	3	23 56 19 .81	23 55 49 .39	+ 0 .09.4	+ 1 .37.3	+ 28 .95	
	5	0 27 04 .68	0 26 33 .95	— 0 .01.3	+ 1 .70.5	+ 29 .04	
» 3 . .	4	0 10 14 .87	0 09 45 .68	+ 0 .07.8	— 0 .34.2	+ 29 .45	+ 29 .43.0
	6	0 59 56 .08	0 59 27 .00	+ 0 .07.4	— 0 .41.3	+ 29 .42	
	5	0 27 04 .67	0 26 35 .77	+ 0 .00.5	— 0 .52.6	+ 29 .42	

Segue TABELLA II.

Data	*	$\alpha_{\text{app.}}$	t_{oss}	$i \cos z$ sec δ	$\alpha \sin z$ sec δ	Δt	Medie serali Δt
1941							
Dic. 4 . .	4	0h10m 14s.85	0h09m 45s.26	+ 0s.03.0	— 0s.49.3	+ 30s.05	+ 30s.07.6
	6	0 59 56 .07	0 59 26 .45	+ 0 .07.8	— 0 .59.5	+ 30. 14	
	3	23 56 19 .79	23 55 50 .30	+ 0 .05.0	— 0 .61.0	+ 30. 05	
	2	23 36 57 .73	23 36 28 .25	+ 0 .04.0	— 0 .62.6	+ 30. 07	
	5	0 27 04 .66	0 26 35 .34	+ 0 .00.3	— 0 .75.8	+ 30. 07	
» 5 . .	4	0 10 14 .84	0 09 44 .78	+ 0 .05.9	— 0 .41.9	+ 30. 42	+ 30 .45.4
	3	23 56 19 .77	23 55 49 .76	+ 0 .06.3	— 0 .51.8	+ 30. 46	
	2	23 36 57 .71	23 36 27 .71	+ 0 .05.3	— 0 .53.2	+ 30. 48	
	5	0 27 04 .65	0 26 34 .84	+ 0 .00.3	— 0 .64.4	+ 30. 45	
» 9 . .	7	1 28 22 .98	1 27 51 .44	+ 0 .03.0	— 0 .49.5	+ 32. 01	+ 32 .05.5
	4	0 10 14 .80	0 09 43 .22	+ 0 .03.9	— 0 .49.8	+ 32. 04	
	3	23 56 19 .73	23 55 48 .19	+ 0 .05.9	— 0 .61.6	+ 32. 10	
	5	0 27 04 .60	0 26 33 .31	— 0 .01.5	— 0 .76.5	+ 32. 07	
» 11 . .	7	1 28 22 .96	1 27 50 .45	+ 0 .03.9	— 0 .47.9	+ 32. 95	+ 32 .92.3
	4	0 10 14 .77	0 09 42 .30	+ 0 .03.1	— 0 .48.1	+ 32. 92	
	8	1 42 20 .06	1 41 47 .62	+ 0 .05.8	— 0 .56.4	+ 32. 95	
	3	23 56 19 .70	23 55 47 .39	+ 0 .03.3	— 0 .59.6	+ 34. 87	
» 13 . .	7	1 28 22 .95	1 27 49 .61	+ 0 .06.8	— 0 .45.6	+ 33. 72	+ 33 .72.7
	4	0 10 14 .75	0 09 41 .44	+ 0 .06.5	— 0 .45.2	+ 33. 70	
	8	1 42 20 .06	1 41 46 .76	+ 0 .09.4	— 0 .52.9	+ 33. 73	
	3	23 56 19 .68	23 55 46 .44	+ 0 .05.4	— 0 .56.0	+ 33. 75	
	5	0 27 04 .56	0 26 31 .52	+ 0 .00.3	— 0 .69.5	+ 33. 73	
» 26 . .	8	1 42 19 .93	1 41 45 .36	+ 0 .01.6	— 4 .54.9	+ 39. 10	+ 39 .10.0
	6	0 59 55 .85	0 59 21 .47	+ 0 .01.3	— 4 .69.4	+ 39. 06	
	9	1 50 33 .28	1 49 59 .34	— 0 .00.2	— 5 .20.1	+ 39. 14	

Segue TABELLA II.

Data	*	$\alpha_{app.}$	t_{oss}	$i \cos z$ sec δ	$a \sin z$ sec δ	Δt	Medie serali Δt
1942							
Gen. 12 . .	10	2h03m 54s.25	2h03m 16s.61	— 0s.00.9	— 5s.43.3	+ 43s.08	+ 43s.11.8
	11	2 35 31 .55	2 34 54 .25	— 0 .01.0	— 5 .77.6	+ 43 .09	
	13	3 08 19 .12	3 07 42 .33	— 0 .01.0	— 6 .28.9	+ 43 .08	
	14	3 27 40 .71	3 27 05 .31	— 0 .01.0	— 7 .78.3	+ 43 .19	
	12	2 41 48 .60	2 41 13 .82	+ 0 .01.3	— 8 .38.6	+ 43 .15	
" 23 . .	15	3 44 02 .66	3 43 17 .41	— 0 .01.9	— 0 .46.7	+ 45 .74	+ 45 .67.7
	11	2 35 31 .39	2 34 46 .24	0 .00.0	— 0 .51.3	+ 45 .66	
	13	3 08 18 .97	3 07 33 .87	+ 0 .01.7	— 0 .55.9	+ 45 .64	
	16	3 57 28 .50	3 56 43 .51	+ 0 .02.0	— 0 .70.0	+ 45 .67	
" 26 . .	15	3 44 02 .61	3 43 17 .65	+ 0 .01.9	— 1 .10.8	+ 46 .04	+ 46 .01.7
	13	3 08 18 .93	3 07 34 .31	+ 0 .03.7	— 1 .32.5	+ 45 .91	
	14	3 27 40 .54	3 26 56 .05	+ 0 .06.2	— 1 .64.0	+ 46 .07	
	16	3 57 28 .46	3 56 43 .99	+ 0 .08.1	— 1 .65.9	+ 46 .05	
" 27. .	11	2 35 31 .33	2 34 46 .12	+ 0 .01.0	— 0 .91.1	+ 46 .11	+ 46 .15.0
	13	3 08 18 .92	3 07 33 .74	+ 0 .02.5	— 0 .99.2	+ 46 .15	
	14	3 27 40 .53	3 26 55 .55	+ 0 .04.7	— 1 .22.8	+ 46 .16	
	16	3 57 28 .45	3 56 43 .46	+ 0 .05.5	— 1 .24.2	+ 46 .18	
Feb. 2. .	15	3 44 02 .51	3 43 15 .94	+ 0 .02.7	— 0 .96.8	+ 47 .51	+ 47 .52.0
	18	4 59 38 .47	4 58 52 .00	+ 0 .03.0	— 1 .07.5	+ 47 .51	
	17	4 25 14 .33	4 24 27 .94	+ 0 .02.9	— 1 .17.9	+ 47 .54	
" 3. .	15	3 44 02 .49	3 43 15 .52	— 0 .01.9	— 0 .74.1	+ 47 .72	+ 47 .72.8
	18	4 59 38 .46	4 58 51 .59	+ 0 .00.9	— 0 .82.2	+ 47 .68	
	17	4 25 14 .31	4 24 27 .46	+ 0 .00.8	— 0 .90.2	+ 47 .74	
	14	3 27 40 .42	3 26 53 .72	+ 0 .02.8	— 1 .09.6	+ 47 .77	
	16	3 57 28 .35	3 56 41 .69	+ 0 .04.2	— 1 .10.9	+ 47 .73	

Segue TABELLA II.

Data	*	$\alpha_{\text{app.}}$	t_{oss}	$i \cos z$ sec δ	$a \sin z$ sec δ	Δt	Medie serali Δt
1942							
Feb. 4. .	18	4h59m 38s.45	4h58m 51s.23	+ 0s.00.9	— 0s.72.2	+ 47s.93	+ 47s.91.5
	13	3 08 18.79	3 07 31.64	+ 0.00.4	— 0.77.7	+ 47.92	
	14	3 27 40.41	3 26 53.41	+ 0.05.2	— 0.96.2	+ 47.91	
	16	3 57 28.34	3 56 41.36	+ 0.05.3	— 0.97.3	+ 47.90	
» 13. .	15	3 44 02.32	3 43 13.26	— 0.01.8	— 0.50.6	+ 49.58	+ 49.57.0
	18	4 59 38.31	4 58 49.34	— 0.02.6	— 0.56.2	+ 49.56	
	17	4 25 14.16	4 24 25.20	+ 0.01.0	— 0.61.7	+ 49.56	
	16	3 57 28.19	3 56 39.35	+ 0.02.0	— 0.75.8	+ 49.58	
» 16. .	15	3 44 02.26	3 43 12.37	— 0.00.4	— 0.54.4	+ 50.44	+ 50.44.2
	18	4 59 38.26	4 58 48.41	+ 0.00.6	— 0.60.3	+ 50.45	
	13	3 08 18.58	3 07 28.82	+ 0.00.2	— 0.65.0	+ 50.41	
	17	4 25 14.10	4 24 24.28	— 0.00.2	— 0.66.2	+ 50.48	
	14	3 27 40.21	3 26 50.51	+ 0.03.8	— 0.80.4	+ 50.47	
	16	3 57 28.14	3 56 38.51	+ 0.04.2	— 0.81.3	+ 50.40	
Mar. 4. .	18	4 59 37.97	4 58 44.37	+ 0.00.9	— 0.48.6	+ 54.08	+ 54.07.3
	20	5 34 11.18	5 33 17.55	+ 0.03.6	— 0.49.2	+ 54.09	
	17	4 25 13.81	4 24 20.26	+ 0.03.5	— 0.53.3	+ 54.05	
» 9. .	19	5 22 37.87	5 21 42.80	+ 0.00.9	— 0.25.4	+ 55.31	+ 55.27.7
	18	4 59 37.87	4 58 42.96	+ 0.02.4	— 0.36.2	+ 55.25	
	20	5 34 11.09	5 33 16.16	+ 0.03.2	— 0.36.8	+ 55.27	

2. — Le osservazioni dei passaggi di *Urano* sono state fatte in modo del tutto identico che per le stelle di confronto. Per *Marte* è stato preso il primo bordo (bordo ad ovest), avendo il pianeta già passato l'opposizione e presentando un notevole effetto di fase. Invece per *Saturno* sono stati presi ad ogni filo ambedue i bordi, che si presentavano ben stac-

cati dagli anelli. Quanto a *Giove* ho dovuto limitarmi ad osservare i passaggi del solo primo bordo (bordo ad ovest). perchè il diametro apparente del pianeta copriva quasi interamente la distanza tra due fili successivi del micrometro, rendendo in tal modo impossibile di prendere gli appulsi ai due bordi senza scapito della precisione. Per avere però il valore del diametro osservato del pianeta, ho utilizzato il filo mobile del micrometro disponendolo avanti al primo fascetto di fili, ottenendo così, in ogni serata, due valori del diametro apparente del pianeta.

Nelle tabelle III, IV, V, VI sono riassunti i risultati finali ottenuti per i quattro pianeti osservati. Le ascensioni rette indicate con α_{app} sono state interpolate, per l'epoca indicata dell'osservazione, dalle effemeridi pubblicate dal *Berliner Astronomisches Jahrbuch*, adoperando la formula di interpolazione di BESSEL e tenendo conto delle differenze seconde. Le ascensioni rette osservate, indicate con α_{oss} si riferiscono al centro del pianeta. Per *Marte* e per *Giove* sono state ottenute aggiungendo al t_{oss} e alle varie correzioni, il semi-diametro desunto, rispettivamente, dal *Nautical Almanac 1941* e quello osservato, moltiplicati per $\sec \delta$; per *Saturno* invece si è assunto come tempo del passaggio del centro del pianeta la media dei tempi dei passaggi dei due bordi. Tra le correzioni, C_A indica quella dell'andamento dell'orologio, nel senso che è stato già dichiarato, e C_D quella per il semi-diametro.

Lo scrivente ritiene che le osservazioni di Marte del Dicembre 3, 4 e 5 siano da scartare. Facendo una media delle rimanenti osservazioni si ottiene, per ciascun pianeta, il valore dell' $O - C$ da attribuire alla data media di ciascuna serie di osservazioni.

Marte	1941 Dicembre	6.907 T. U.	$O - C = -0^s.20$
Giove	1942 Febbraio	16.043 »	» = - 0 .02
Saturno	1942 Febbraio	2.025 »	» = - 0 .05
Urano	1942 Febbraio	4.244 »	» = + 0 .05.

TABELLA III.

Osservazioni di Marte.

Data	T. U.	t_{oss}	Δt	C_A	$i \cos z$ sec δ	$a \sin z$ sec δ	C_D	O α_{oss}	C $\alpha_{\text{app.}}$	$O-C$	Note
1941		0h					+	0h	0h		
Nov. 26 . .	19h36m.38	47m 04s.62	+ 25s.79.7	+ 0s.02.0	0s.00.0	+ 0s.56.1	0s.50.1	47m 32s.50	47m 32s.69	— 0s.19	
» 28 . .	29.94	48 28.23	+ 26.86.5	+ 0.02.0	+ 0.00.8	+ 1.43.5	0.49.2	48 57.05	48 57.29	— 0.24	
» 29 . .	26.77	49 13.53	+ 27.34.9	+ 0.01.0	+ 0.04.2	+ 1.49.1	0.48.2	49 42.90	49 43.10	— 0.20	
Dic. 1 . .	20.54	50 50.95	+ 28.34.0	+ 0.02.1	+ 0.02.5	+ 1.52.8	0.47.2	51 21.34	51 21.53	— 0.19	
» 2 . .	17.48	51 42.92	+ 28.97.3	+ 0.00.9	+ 0.04.7	+ 1.40.6	0.47.2	52 13.83	52 14.02	— 0.19	
» 3 . .	14.44	52 38.93	+ 29.43.0	+ 0.01.0	+ 0.08.1	— 0.43.2	0.46.2	53 08.48	53 08.64	— 0.16	(a)
» 4 . .	11.47	53 35.03	+ 30.07.6	+ 0.01.1	+ 0.06.6	— 0.62.0	0.46.2	54 05.03	54 05.36	— 0.33	(b)
» 5 . .	08.51	54 33.36	+ 30.45.4	+ 0.01.4	+ 0.04.5	— 0.52.5	0.45.2	55 03.80	55 04.11	— 0.31	(c)
» 9 . .	18 57.01	58 46.49	+ 32.05.5	+ 0.00.9	+ 0.03.0	— 0.61.6	0.43.3	59 18.40	59 18.59	— 0.19	
		1h						1h	1h		
» 11 . .	51.45	01 03.99	+ 32.92.3	+ 0.00.4	+ 0.03.6	0.59.2	0.42.3	01 36.78	01 36.98	— 0.20	
» 13 . .	46.00	03 28.58	+ 33.72.7	+ 0.00.5	+ 0.07.0	— 0.55.2	0.41.3	04 02.24	04 02.43	— 0.19	
» 26 . .	13.18	21 47.53	+ 39.10.0	— 0.00.2	+ 0.00.9	— 4.49.9	0.36.5	22 22.50	22 22.71	— 0.21	

Note: (a) cronografo irregolare; (b) Forte vento, notevole scintillazione parallattica, fuoco incerto; (c) cambiato il micrometro.

TABELLA IV.

Osservazioni di Giove.

Data	T. U.	t_0 s	Δl	C_A	$i \cos z$ sec δ	$\alpha \sin z$ sec δ	C_D	O α_{oss}	C $\alpha_{app.}$	$O-C$	note
1942		4h					+	4h	4h		(d)
Feb. 2 . . .	19h00.m55	38m 53s.17	+ 47s.52.0	+ 0s.00.2	+ 0s.03.4	1s.06.7	1s.70.5	39m 41s.36	39m 41s.41	— 0s.05	
" 3 . . .	18 56 .58	38 50 .78	+ 47 .72.8	+ 0.00.4	+ 0 .01.7	— 0 .81.6	1 .73.5	39 39 .45	39 39 .45	0 .00	
" 4 . . .	52 .63	38 49 .40	+ 47 .91.5	+ 0.00.6	— 0 .00.7	— 0 .71.6	1 .65.7	39 38 .26	39 38 .36	— 0 .10	
" 13 . . .	17 .72	39 16 .47	+ 49 .57.0	+ 0.00.5	+ 0 .00.4	0' .55.7	1 .60.5	40 07 .10	40 07 .18	— 0 .08	
" 16 . . .	06 .34	39 40 .65	+ 50 .44.2	+ 0.00.7	— 0 .00.4	— 0 .59.8	1 .64.8	40 32 .15	40 32 .13	+ 0 .02	(e)
Mar. 4 . . .	17 07 .69	43 52 .95	+ 54 .07.3	— 0.00.2	+ 0 .01.3	— 0 .47.7	1 .56.0	44 48 .12	44 48 .11	+ 0 .01	
" 9 . . .	16 50 .02	45 51 .27	+ 55 .27.7	— 0.00.6	+ 0 .02.4	— 0 .35.4	1 .52.1	46 47 .73	46 47 .69	+ 0 .04	(f)

Note: (d) Osservazione un poco incerta; (e) Cielo velato, pianeta un po' confuso; (f) Pianeta debole nella luce diurna.

TABELLA V.

Osservazioni di Saturno.

Data	T. U.	t_{oss} I bordo	t_{oss} II bordo	Δt	C_A	$i \cos z$ sec δ	$a \sin z$ sec δ	O α_{oss}	C $\alpha_{\text{app.}}$	$O-C$
1942		3h	3h					3h	3h	
Gen. 12	19h03m.27	39m 00s.67	19m 02s.13	+43s.11.8	+0s.00.5	0s.00.0	— 7s.06.2	19m 37s.46	19m 37s.61	— 0s.15
» 26	18 07 .78	18 25 .61	18 27 .10	+46 .01.7	— 0 .00.1	+ 0 .05.2	— 1 .48.5	19 10 .93	19 11 .03	— 0 .10
» 27	18 03 .87	18 26 .65	18 28 .12	+46 .15.0	0 .00.0	+ 0 .04.4	— 1 .11.2	19 12 .46	19 12 .53	— 0 .07
Feb. 3	17 36 .74	18 48 .14	18 49 .63	+47 .72.8	— 0 .00.6	+ 0 .03.7	— 0 .99.0	19 35 .65	19 35 .60	+ 0 .05
» 4	17 32 .89	18 52 .73	18 54 .21	+47 .91.5	— 0 .00.4	+ 0 .04.4	— 0 .86.9	19 40 .56	19 40 .68	— 0 .12
» 13	16 58 .59	19 56 .67	19 58 .06	+49 .57.0	— 0 .01.1	+ 0 .02.6	— 0 .67.4	20 46 .27	20 46 .20	+ 0 .07
» 16	16 47 .28	20 25 .34	20 26 .73	+50 .44.2	— 0 .00.6	+ 0 .01.6	— 0 .72.2	21 15 .77	21 15 .82	— 0 .05

TABELLA VI.

Osservazioni di Urano.

Data	T. U.	t_{oss}	Δt	C_A	$i \cos z$ sec δ	$a \sin z$ sec δ	O α_{oss}	C α_{app}	$O-C$	Note
1942		3b					3b	3b		
Gen. 23. . . .	18h36m.90	35m 48s.16	+ 45s.67.7	+ 0s.00.1	+ 0s.01.4	— 0s.56.7	36m 33s.29	36m 33s.26	+ 0s.03	
» 26.	18 25 .00	35 42 .47	+ 46 .01.7	0 .00.0	+ 0 .05.1	— 1 .34.4	36 27 .19	36 27 .18	+ 0 .01	
Feb. 2.	17 57 .37	35 34 .17	+ 47 .52.0	— 0 .00.7	+ 0 .05.0	— 1 .17.4	36 20 .56	36 20 .49	+ 0 .07	
» 3.	17 53 .44	35 33 .63	+ 47 .72.8	— 0 .00.4	+ 0 .00.2	— 0 .89.8	36 20 .46	36 20 .39	+ 0 .07	
» 13.	17 14 .30	35 42 .46	+ 49 .57.0	— 0 .00.8	+ 0 .01.0	— 0 .61.4	36 31 .42	36 31 .36	+ 0 .06	
» 16.	17 02 .63	35 49 .18	+ 50 .44.2	— 0 .00.3	+ 0 .01.7	— 0 .65.9	36 38 .98	36 38 .90	+ 0 .08	(g)

Note: (g) Velato, pianeta assai debole.

Astronomia. — *Sulle relazioni tra luminosità e colore dei nuclei cometari.* — III. *La cometa Van Gent-Bernasconi (1941 d)* ⁽¹⁾. Nota di LUCIO GIALANELLA, presentata ⁽²⁾ da GIUSEPPE ARMELLINI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. — Da qualche tempo ho iniziato all'Osservatorio di Monte Mario ricerche sistematiche sulle relazioni tra luminosità e colore dei nuclei cometari, determinando, a mano a mano che se ne è presentata l'occasione, le grandezze apparenti e gli indici di colore dei nuclei stessi mediante osservazioni fotometriche visuali sia in luce normale che in luce monocromatica.

La prima cometa studiata a tal fine è stata quella di KOZIK-PELTIER (1939 a), che ho potuto seguire — nonostante la sua poco felice posizione in cielo e le sfavorevoli condizioni meteorologiche — per un periodo di 17 sere *dopo* il passaggio al perielio, trovando che il suo indice di colore, compreso tra $+1^m,21$ e $+0^m,76$, è andato sempre continuamente diminuendo coll'allontanarsi della cometa dal Sole ⁽³⁾. Tuttavia non mi è stato possibile precisare alcuna sensibile relazione con la distribuzione delle grandezze integrali del nucleo, sia apparenti che ridotte alla unità di distanza dalla Terra; come pure, dato il numero limitato di osservazioni, la legge di variazione di queste grandezze col diminuire della distanza eliocentrica.

Ho potuto invece osservare la cometa di CUNNINGHAM (1940 a) per un periodo di oltre due mesi, immediatamente prima del passaggio al perielio, pervenendo a risultati di maggiore importanza ⁽⁴⁾.

Per quanto riguarda la luminosità del nucleo, le mie osservazioni hanno mostrato che la sua intensità è aumentata, coll'avvicinarsi della cometa al Sole, molto più rapidamente di quanto sarebbe aumentata la

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nel R. Osservatorio Astronomico di Roma (su Monte Mario).

⁽²⁾ Nell'Adunanza del 21 marzo 1942-XX.

⁽³⁾ L. GIALANELLA, *Osservazioni fotometriche e indice di colore del nucleo della cometa Kozik-Peltier (1939a)*. « Rendiconti Lincei », 1939.

⁽⁴⁾ L. GIALANELLA, *Fotometria visuale e indici di colore del nucleo della cometa Cunningham (1940 c)*. « Rend. fis. R. Acc. d'Ital. », 1941.

sola illuminazione (per parte del Sole) del nucleo, supposto dotato di potere riflettente. Infatti la sua curva di luce osservata si è mostrata molto simile alla curva teorica dedotta dalla legge $\frac{k}{r^4 \Delta^2}$ (r distanza dal Sole, Δ distanza dalla Terra), quando in essa vengano trascurate delle ondulazioni o fluttuazioni sinusoidali, imputabili a periodiche emissioni di getti luminosi nucleari e a successive estinzioni. Laonde, il nucleo sarebbe stato dotato di luce propria con intensità variabile in ragione inversa della quarta potenza della distanza dal Sole. Da notare ancora che l'aderenza della nostra curva osservata con la teorica dedotta dalla legge in parola si è mostrata per questa cometa assai più perspicua che in precedenti esami di altre comete, per le quali pure gli astronomi che le avevano discusse si erano mostrati decisamente favorevoli a tale legge.

Per quanto riguarda poi l'indice di colore del nucleo di questa cometa e del suo variare in relazione con la sua luminosità, ho trovato che tale indice di colore è variato tra $+1^m, 13$ e $+0^m, 27$ mostrando rapide oscillazioni e fluttuazioni; in particolare ho potuto rilevare che quanto più il nucleo era brillante e puntiforme tanto più esso appariva azzurro, mentre si arrossava quanto più era diffuso. Non è apparso invece nessun andamento regolare e sensibile in diminuzione o in crescita.

Nella presente Nota dò conto delle osservazioni da me eseguite nell'estate 1941 sulla cometa VAN GENT-BERNASCONI (1941 *d*).

LA COMETA VAN GENT-BERNASCONI (1941 *d*).

2. — Questa cometa è stata scoperta il 27 maggio 1941 a 23^h 16^m T. U. da VAN GENT del Bosscha Observatory, mentre era di 11^{ma} grandezza e di declinazione fortemente australe; ma non se ne sono avute altre osservazioni fino alla sua comparsa nell'emisfero boreale, quando è stata rivista la sera del 16 giugno da BERNASCONI a Cagno (Como), mentre era di 10^{ma} grandezza. Elementi ed effemeride calcolati da E. RABE⁽⁵⁾ di Berlin-Dahlem hanno assegnato come data del passaggio al perielio il giorno 3 settembre 1941 e come distanza perielica 0,86 u. a.; mentre all'epoca della scoperta essa era già passata al perigeo.

La cometa è stata subito trovata e osservata all'Osservatorio di Roma (su Monte Mario), dove lo scrivente, oltre alle solite misure micrometriche di posizione, già pubblicate in altra sede⁽⁶⁾, ha eseguito anche osservazioni fotometriche, sia in luce normale e sia in luce monocroma-

⁽⁵⁾ *Beobachtungs-Zirkulare*, vol. 23, nn. 18-19-20, 1941.

⁽⁶⁾ *Beobachtungs-Zirkulare*, vol. 23, n. 23, 1941; e « *Circ. Copenhagen* », nn. 873-877.

tica, adoperando, come negli altri precedenti simili lavori, un fotometro a cuneo di Toepfer applicato al cannocchiale rifrattore di mm. 155 di apertura e 2.240 di focale.

La prima osservazione utile è stata quella del 19 giugno 1941 quando la cometa appariva circa di $8^m, 5$ (il nucleo era di $9^m, 6$); le osservazioni sono state poi continuate con regolarità fino a tutto il mese di luglio. In seguito la cometa, pur conservando ancora una buona posizione in cielo, si è resa meno bene osservabile, avendo quasi raggiunto il limite di visibilità col filtro azzurro; d'altra parte le mie osservazioni sono diventate meno regolari, essendo io stato, proprio in quell'epoca, incaricato della temporanea direzione della R. Specola di Collurania (Teramo), dopo la morte del prof. MAGGINI; incarico che mi ha costretto ad assentarmi assai spesso da Roma. Mi limito, pertanto, a pubblicare la serie delle mie osservazioni fino a tutto luglio, anche se non troppo estesa, sembrandomi ugualmente interessanti i risultati a cui sono pervenuto.

GRANDEZZE INTEGRALI DEL NUCLEO.

3. - La cometa VAN GENT ha presentato generalmente un nucleo distinto, assai spesso brillante e di apparenza stellare, in modo che esso si poteva estinguere sotto il cuneo del fotometro a guisa di stella, colla medesima facilità e col medesimo ordine di precisione; soltanto in qualche serata esso non è apparso nettamente distinto rispetto al resto della chioma. In tali casi le misure sono state fatte puntando le regioni più luminose della chioma stessa.

Le stelle di confronto sono state scelte nelle immediate vicinanze della cometa (la distanza ha raggiunto al più un grado) onde evitare errori dovuti alla estinzione atmosferica differenziale. Come per le altre volte, i confronti della luminosità integrale del nucleo sono stati fatti sempre con un'immagine extra-focale della stella di paragone, ricoprente all'incirca la medesima area del nucleo. Per la costante del cuneo è stato preso il valore $0^m, 166$ già in precedenza sicuramente determinato. La tabella I raccoglie i risultati delle mie osservazioni; le singole colonne contengono: (1) data; (2) stella di confronto; (3) tempo siderale locale all'istante medio della osservazione; (4) tempo universale corrispondente; (5) numero dei confronti della stella e della cometa; (6) medie delle letture della scala del fotometro; (7) differenza delle grandezze; (8) grandezze apparenti del nucleo; (9) medie serali concluse.

TABELLA I.

Fotometria visuale del nucleo della cometa Van Gent-Bernasconi (1941 d).

Data 1941 (1)	*	t_s (2)	T. U. (3)	Cfr.		letture foto- metro mm.		Δm (7)	Mag. nucleo (Harvard) (8)	Medie serali (9)
				*	$\bigcirc \equiv$	*	$\bigcirc \equiv$			
Giug. 19. .	1	16h 10m	21h 40m	5	5	36.04	45.42	1m.56	9m.6	9m.6
» 20. .	2	16 07	21 25	8	8	41.80	52.66	1 .81	9 .6	9 .6
» 25. .	3	16 21	21 10	8	8	34.90	50.32	2 .56	9 .04	9 .04
» 26. .	4	16 46	21 38	10	10	34.52	50.58	2 .63	9 .29	9 .29
» 30. .	5	16 45	21 20	10	10	35.27	49.48	2 .36	9 .27	9 .27
Lugl. 1. .	5	16 40	21 10	6	6	32.54	48.14	2 .53	9 .50	9 .50
» 9. .	6	16 44	20 40	8	8	30.93	46.02	2 .51	9 .27	9 .27
» 12. .	7	17 37	21 20	10	10	34.86	44.04	1 .53	9 .03	9 .03
» 13. .	8	17 20	21 08	8	8	40.68	52.61	1 .98	8 .88	8 .88
» 14. .	8	17 55	21 35	12	12	41.22	51.08	1 .64	8 .54	8 .54
» 16. .	9	17 00	20 35	10	10	37.80	53.06	2 .54	8 .95	8 .95
» 17. .	9	17 05	20 35	5	10	41.94	56.00	2 .34	8 .75	8 .80
» 17. .	10	17 05	20 35	5	10	41.94	60.34	3 .05	8 .85	
» 19. .	11	17 20	20 45	5	10	41.73	53.76	1 .99	8 .17	8 .41
» 19. .	12	17 20	20 45	5	10	41.73	57.75	2 .75	8 .65	
» 24. .	13	17 29	20 30	10	10	42.58	52.12	1 .63	7 .99	7 .99
» 25. .	13	17 40	20 35	12	12	43.70	54.04	1 .71	8 .07	8 .07
» 27. .	13	17 38	20 33	10	10	46.24	56.16	1 .65	8 .01	8 .01
» 29. .	14	18 15	21 01	10	10	38.38	45.38	1 .16	8 .08	8 .08
» 31. .	14	17 46	20 20	8	8	36.02	45.79	1 .62	8 .54	8 .54

Note alla tab. I: Giu. 20: testa ampia, nucleo brillante, piccola coda. - Giu. 25: nucleo distintissimo, stelliforme. - Giu. 30: nucleo brillante. - Lug. 1: cometa meno luminosa, nucleo poco distinto, chiarore lunare. - Lug. 9: non proprio nucleo, ma condensazione centrale. - Lug. 12: nucleo poco distinto, condensazione centrale. - Lug. 14: nucleo distinto, non puntiforme, piccola coda. - Lug. 16: nucleo vivo, stelliforme, azzurro; testa grande, rotonda; coda di 15'-20'. - Lug. 17: nucleo meno vivo di ieri. - Lug. 19: nucleo grande, distinto, non puntiforme. - Lug. 24: cometa più luminosa, nucleo ben distinto; coda visibilissima. - Lug. 25: nucleo più vivo. - Lug. 29: cometa forse meno luminosa, nucleo distinto; debole chiarore lunare. - Lug. 30: diffuso chiarore lunare; cometa ben distinta con nucleo brillante stelliforme. - 1 Ago: chiarore lunare, cometa al limite della visibilità, misure insufficienti.

4. - La tabella II contiene l'elenco delle stelle adoperate per i confronti. Le grandezze sono nella scala di HARVARD (R. H. P.).

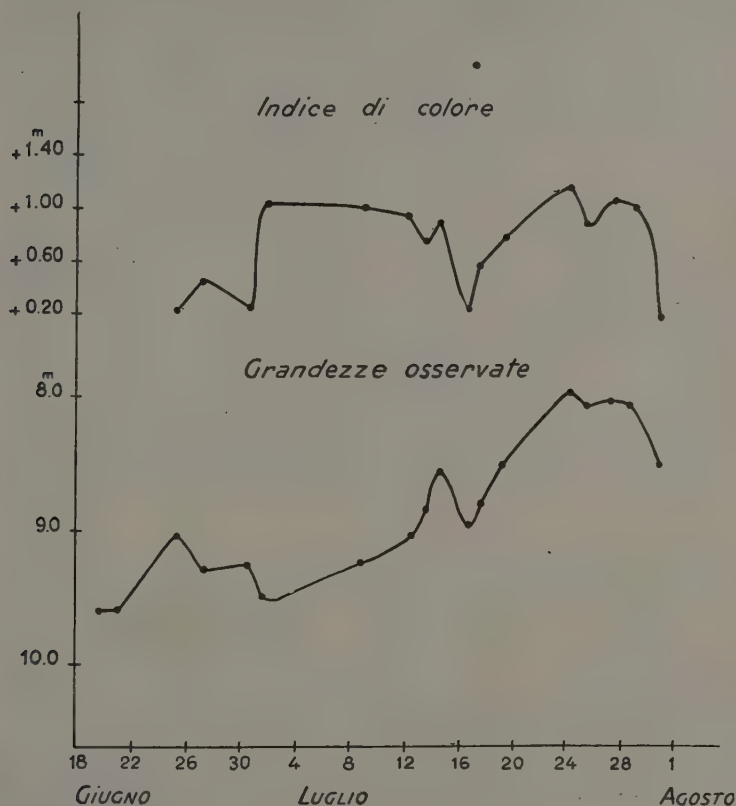


Fig. 1. - Cometa VAN GENT-BERNASCONI (1941 d). Grandezze apparenti e indice di colore del nucleo.

5. - I valori delle medie serali (tabella I, colonna 9) sono stati riportati in grafico nella figura 1 (in basso). È ben visibile il continuo incremento della luminosità apparente del nucleo della cometa al suo avvicinarsi al Sole; ma sono altrettanto evidenti le improvvise variazioni di splendore dovute a rapidi aumenti ed estinzioni della luce nucleare.

Per rendere, poi, minori gli effetti degli errori accidentali, specialmente per quanto riguarda la diversità e le variazioni delle condizioni atmosferiche e meteorologiche terrestri da sera a sera, ho proceduto ad una conveniente perequazione dei valori bruti forniti dalle osservazioni serali, riunendo in media a due a due o a tre a tre (secondo i casi) i risul-

tati delle singole sere. Ho ottenuto così, per le date scritte nella prima colonna della tabella III, le *grandezze perequate* m_p del nucleo della cometa, grandezze che sono riportate nella colonna 2^a della medesima tabella.

• TABELLA II.

Stelle di confronto.

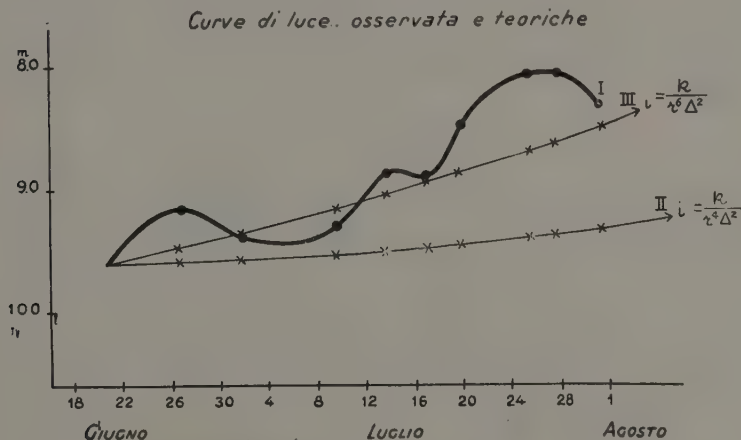
Num.		Mag.	Sp.	Num.		Mag.	Sp.
1	B. D.-13° 4260	8 ^m . 0	—	8	Boss Gen. Cat. 18860	6 ^m . 90	Ko
2	B. D.-12° 4286	7 . 7	—	9	Boss G. C. 18564	6 . 41	K 2
3	Boss Gen. Cat. 20228	6 . 48	A 2	10	Boss G. C. 18499	5 . 80	G 5
4	Boss G. C. 20475	6 . 66	Ko	11	Boss G. C. 18313	6 . 18	G 5
5	Boss G. C. 19617	6 . 91	G 5	12	Boss G. C. 18399	5 . 90	Ma
6	Boss G. C. 19043	6 . 76	Ma	13	Boss G. C. 18491	6 . 36	Ko
7	Boss G. C. 19002	7 . 50	F 5	14	Boss G. C. 18096	. 926	Ko

TABELLA III.

Data 1941 T. U. (1)	m_p (2)	Quantità calcolate			
		r (3)	Δ (4)	M_1 (5)	M_2 (6)
Giugno 20,35.	9 ^m . 60	1.550	0.565	9 ^m . 60	9 ^m . 60
» 26,35.	9 . 17	1.475	0.600	9 . 55	9 . 42
Luglio 1,32.	9 . 39	1.413	0.649	9 . 49	9 . 30
» 9,85.	9 . 27	1.306	0.742	9 . 45	9 . 08
» 13,88.	8 . 82	1.257	0.799	9 . 43	8 . 98
» 17,28.	8 . 87	1.216	0.848	9 . 42	8 . 90
» 19,86.	8 . 41	1.185	0.887	9 . 41	8 . 83
» 25,28.	8 . 03	1.124	0.968	9 . 37	8 . 66
» 27,85.	8 . 03	1.096	1.006	9 . 35	8 . 60
» 30,81.	8 . 31	1.065	1.049	9 . 31	8 . 51

Con i valori m_p ho costruito la curva di luce del nucleo cometario, rappresentata nella figura 2 a tratto marcato: in essa sono ben distinte e appariscenti delle ondulazioni sinusoidali, potendosi nel periodo delle mie

osservazioni contare chiaramente tre onde, anche di notevole ampiezza. Da essa ho potuto inoltre determinare — come già feci per le comete precedenti — la legge con la quale è variato lo splendore del nucleo in funzione della distanza Δ dalla Terra e della distanza r dal Sole. I valori di r e Δ corrispondenti alle date della tabella III sono stati ricavati dall'effemeride di Rabe, extrapolando per ottenere i valori del 20 e 26 giugno, poichè la detta effemeride comincia solo il 29 giugno. Tali valori sono riportati nelle colonne (3) e (4) della tabella III.



Per quanto riguarda la variazione dello splendore di una cometa colla distanza r dal Sole, è noto che essa implica alcune considerazioni fisiche che riguardano lo stato dei gas che compongono la testa dell'astro. Se questi gas riflettessero semplicemente la luce solare, come fanno i pianeti, è evidente che lo splendore intrinseco dovrebbe crescere come $\frac{1}{r^2}$, così come accade per le variazioni dello splendore al variare della distanza Δ dalla Terra, onde in tal caso le variazioni complessive delle intensità luminose dipenderebbero dalla legge $\frac{k}{r^2 \Delta^2}$.

Si osserva invece generalmente nelle comete un aumento ben più rapido che rivela un'influenza della radiazione solare sulle particelle che compongono la testa e il nucleo delle comete, influenza capace di determinare su di esse un'eccitazione, da cui hanno origine radiazioni luminose alle lunghezze d'onda caratteristiche delle molecole stesse. Ciò porta in definitiva a dare ad r un esponente maggiore di due, e in particolare quattro. Invero nella cometa di Cunningham, da noi precedente-

mente osservata, avevamo notato — come abbiamo già ricordato in principio — una ben soddisfacente aderenza della curva di luce osservata con quella teorica dedotta dalla legge $\frac{k}{r^4 \Delta^2}$.

Nella presente cometa di VAN GENT-BERNASCONI abbiamo ripetuto l'indagine, calcolando le grandezze teoriche M_1 e M_2 :

$$[1] \quad M_1 = m_0 + 5 \log(r^2 \Delta) \quad \text{e} \quad M_2 = m_0 + 5 \log(r^3 \Delta)$$

che si sarebbero osservate qualora valessero, per le variazioni delle intensità luminose del nucleo cometario in dipendenza delle variazioni della sua distanza dal Sole e dalla Terra, rispettivamente le leggi:

$$[2] \quad i = \frac{k}{r^4 \Delta^2} \quad \text{e} \quad i' = \frac{k}{r^6 \Delta^2}.$$

Questi valori M_1 e M_2 sono riportati nelle ultime due colonne della tabella III, e con essi abbiamo costruito le curve di luce teoriche II e III della figura 2 (a tratto sottile). Naturalmente, il punto iniziale è arbitrario, ciascuna potendosi immaginare spostata parallelamente all'asse delle ordinate. In figura, esse sono tracciate facendole partire dallo stesso punto iniziale corrispondente al valore della prima osservazione (compensata) del giugno 20,35. Per esso corrispondono rispettivamente i valori di m_0 delle formule [1]:

$$m_0 = 8^m, 94 \quad \text{per} \quad M_1$$

$$m_0 = 7, 99 \quad \text{per} \quad M_2.$$

Il confronto della curva di luce osservata con quelle teoriche mostra subito che, per la cometa in questione, si è avuto un aumento di splendore del nucleo assai più rapido che non in quella di Cunningham, con una legge che si avvicina molto alla teorica $\frac{k}{r^6 \Delta^2}$; ed anzi forse, nell'ultima parte, l'esponente di r dovrebbe essere ancora aumentato (sempre prescindendo naturalmente dalle ondulazioni periodiche dovute ad emissioni di getti di materia nucleare e susseguenti estinzioni). Questa cometa ha assunto, pertanto, un alto interesse, mostrandosi quasi eccezionale, poichè di solito nelle comete si raggiungono per r esponenti compresi tra 4 e 6, ma generalmente assai più vicini al 4, come altra volta abbiamo avuto occasione di mostrare con numerosi esempi.

Ma l'interesse di questa cometa diventa ancora più grande se si mettono in relazione le variazioni di splendore della luce integrale del nucleo con quelle ottenute in luci monocromatiche e precisamente le variazioni del suo indice di colore.

TABELLA IV.

Indici di colore del nucleo della cometa Van Gent-Bernasconi.

Data 1941 (1)	L_G (2)	L_V (3)	$L_G - L_V$ (4)	K (5)	Stelle di confronto (6)	c (7)
Giug. 25. . . .	27.58	25.47	2.11	0.113	3-5-6	+0 ^m .24
» 26. . . .	31.12	28.70	2.42	0.188	5-6-7	+0 .45
» 30. . . .	29.98	28.01	1.97	0.113	3-5-6	+0 .22
Lugl. 1. . . .	29.42	24.88	4.54	0.229	14-15-18	+1 .04
» 9. . . .	29.48	25.78	3.70	0.268	11-12-16-17	+0 .99
» 12. . . .	31.16	27.80	3.36	0.273	11-12-13-16	+0 .92
» 13. . . .	34.13	31.15	2.98	0.263	7-8-9-10-11-13	+0 .78
» 14. . . .	34.28	31.05	3.23	0.269	8-9-10-11-12-13-14-16-17	+0 .87
» 16. . . .	30.85	29.02	1.83	0.113	3-5-6	+0 .21
» 17. . . .	33.22	30.71	2.51	0.235	5-6-7-8-9	+0 .59
» 19. . . .	35.58	32.30	3.28	0.273	11-12-13-16	+0 .89
» 24. . . .	34.72	30.00	4.72	0.250	14-15-16-17-18	+1 .18
» 25. . . .	35.77	32.57	3.20	0.273	11-12-13-16	+0 .87
» 27. . . .	38.96	34.57	4.39	0.250	14-15-16-17-18	+1 .10
» 29. . . .	33.32	29.00	4.32	0.250	14-15-16-17-18	+1 .08
» 31. . . .	30.94	29.29	1.65	0.113	3-5-6	+0 .39

INDICI DI COLORE.

6. — Queste determinazioni sono state da me eseguite con lo strumento e i metodi già altre volte dettagliatamente descritti (?). Qui mi limito pertanto a ricordare che ho fatto uso di due filtri di luce (giallo, circa $\lambda = 6000$ Angstrom e violetto, circa $\lambda = 4000$ A.) applicati al fotometro Toepfer, filtri già precedentemente tarati sia con osservazioni astronomiche di stelle di indice di colore noto e sia con esami di laboratorio. Così pure non riporto la tabella delle stelle di confronto, che è stata già pubblicata nel lavoro sopracitato. I risultati delle mie osservazioni presenti sono riportati nella tabella IV, le cui colonne

(?) L. GIALANELLA, *Indici di colore di ammassi globulari e nebuloze, e ricerche sull'assorbimento della luce nello spazio interstellare.* « Rend. fis. R. Acc. d'Ital. », 1940-41.

hanno le significazioni seguenti: (1) data; (2) lettura in mm. col filtro giallo; (3) lettura in mm. col filtro violetto; (4) differenza delle due precedenti letture; (5) valori del rapporto $K = \frac{c}{L_G - L_V}$, dedotto dalle stelle di confronto; (6) numeri delle corrispondenti stelle adoperate per la deduzione del detto rapporto K ; (7) indici di colore conclusi.

Ricordiamo ancora che la nostra scala degli indici di colore corrisponde sensibilmente a quella cosiddetta « di Harvard » o « internazionale ». Precisamente, l'equazione di colore del nostro sistema è:

$$gKo - Ao = 1^m, 30 \quad (\text{per le stelle giganti}).$$

Come per le altre comete, in ogni serata sono state fatte generalmente due serie di osservazioni di almeno 10 puntate per ognuno dei due filtri, con un intervallo di tempo dall'una serie all'altra (di solito prima e dopo l'osservazione in luce normale), per eliminare dalle medie le eventuali imponderabili variazioni dell'assorbimento selettivo dell'atmosfera terrestre. I valori conclusi nella colonna (7) sono le medie serali. L'epoca media delle osservazioni è all'incirca la stessa di quella delle precedenti osservazioni fotometriche in luce normale.

7. — Con i valori della colonna (7) ho costruito il diagramma della fig. 1 (in alto). In questa cometa, ancora di più che per la precedente Cunningham, sono bene evidenti rapide variazioni e fluttuazioni del colore del nucleo cometario. Allo scopo, anzi, di lasciare più evidenti queste oscillazioni (che debbono considerarsi reali, poichè anche le più piccole sono superiori agli errori medi di osservazione), non ho fatto alcuna compensazione o perequazione delle singole osservazioni serali, ed ho presentato insieme le due curve delle grandezze apparenti (in luce normale) e degli indici di colore, al fine di mettere meglio in evidenza le correlazioni tra gli incrementi e le estinzioni della luce normale del nucleo con le variazioni del suo indice di colore.

L'esame delle due curve mostra che le relazioni tra la luminosità e il colore del nucleo cometario hanno subito, coll'avvicinarsi della cometa al perielio, delle modificazioni abbastanza notevoli. Mentre nella prima metà sembra confermata la legge già intravista nello studio della cometa di Cunningham, secondo cui il nucleo appariva più azzurro (indice di colore minore) quando era più brillante e puntiforme e invece si arrossava (indice di colore maggiore) quando meno luminoso e più diffuso; nella seconda parte tale legge non solo non è più soddisfatta, ma si mostra addirittura invertita. E cioè ad un aumento di splendore del nucleo corrisponde un aumento dell'indice di colore e viceversa; l'andamento

delle due curve è infatti pressochè esattamente parallelo, e più accentuatamente in corrispondenza delle più rapide variazioni di splendore.

Il risultato ci sembra assai notevole e meritevole di richiamare l'attenzione degli astronomi; esso mostra quanto interesse per gli studi di fisica cometaria possano avere le ricerche fotometriche e colorimetriche, le quali, opportunamente proseguite, non mancheranno di portare altri importanti contributi.

Geodesia. — *Estensione alla quarta approssimazione della trigonometria dei piccoli triangoli curvilinei sopra una superficie qualunque.* Nota di CARLO MORELLI, presentata ⁽¹⁾ da FRANCESCO VERCELLI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Sia P un punto fisso generico di una superficie σ dello spazio ordinario, e C una curva di σ passante per P , di cui Q sia un altro punto (variabile) qualunque ed l la sua ascissa curvilinea contata a partire da P ; introducendo le *coordinate normali di Riemann* x^1, x^2 col polo in P , supponiamo che la linea coordinata x^1 ($x^2 = \text{cost.}$) sia tangente alla curva C in P .

Indicando allora con $\gamma, \dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \ddot{\gamma}''$ i valori nel punto P della curvatura geodetica di C e delle sue prime tre derivate rispetto all'arco, ed analogamente con k, \dot{k} le determinazioni in P della curvatura totale di σ e della sua derivata prima rispetto ad l , si hanno [8] le seguenti formule di 4^a approssimazione per la corda geodetica a che unisce i punti P e Q e per l'angolo θ che questa forma in P con la linea coordinata x^1

$$[1] \quad \theta = \frac{1}{2!} \gamma l + \frac{1}{3!} \dot{\gamma} l^2 + \frac{1}{4!} (\ddot{\gamma} + k\gamma) l^3 + \\ + \frac{1}{5!} \left(\ddot{\gamma}'' - \frac{1}{6} \gamma^2 \dot{\gamma} + \frac{7}{3} k\dot{\gamma} - 2\dot{k}\gamma \right) l^4 + (5),$$

$$[2] \quad a = l \left[1 - \frac{1}{24} \gamma^2 l^2 - \frac{1}{24} \gamma \ddot{\gamma} l^3 + \right. \\ \left. + \frac{1}{10} \left(\frac{1}{192} \gamma^4 + \frac{1}{8} k\gamma^2 - \frac{1}{8} \gamma \ddot{\gamma} - \frac{1}{9} \dot{\gamma}^2 \right) l^4 + (5) \right],$$

valide per un intorno — che denotiamo pure con σ — sufficientemente piccolo di P a cui C sia tutta interna; e di questa piccolezza si è già precisato il significato [8]. Nella scrittura (5) sono conglobate le quantità che sono almeno del quinto ordine.

(1) Nell'Adunanza del 21 marzo 1942-XX.

Queste due formule, esprimendo la distanza di due punti e l'angolo di due direzioni, costituiscono gli elementi fondamentali per lo studio in quarta approssimazione delle proprietà metriche dei piccoli triangoli curvilinei sopra una superficie qualunque. E poichè danno le espressioni dell'arco di una geodetica e dell'angolo da essa formato in funzione degli elementi geometrici di una curva qualunque, ci permetteranno ora di determinare senz'altro in 4^a approssimazione le relazioni che intercedono fra i lati e gli angoli di un triangolo curvilineo della superficie e gli elementi del corrispondente triangolo formato dalle corde geodetiche.

Con ciò è aperta la via per l'estensione alla 4^a approssimazione della trigonometria dei piccoli triangoli curvilinei sopra una superficie qualunque.

Ne faremo un'applicazione determinando le formule che esprimono per un triangolo curvilineo qualunque tracciato sopra σ il teorema del coseno in quarta approssimazione. Così si sarà anche costruita la base della nuova trigonometria in quarta approssimazione, in quanto il teorema del coseno, mettendo in relazione gli elementi fondamentali, cioè i lati e gli angoli del triangolo in esame, costituisce, analogamente a quanto accade per la trigonometria sferica ⁽¹⁾, il fondamento teorico per la risoluzione di questo triangolo.

Invece in trigonometria piana sono le formule del teorema dei seni che, insieme con la relazione $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, sono teoricamente sufficienti per risolvere qualsiasi triangolo; ed è da esse che si deducono tutte le altre relazioni che più si prestano ad essere adoperate nei vari casi pratici.

Ed è proprio il teorema dei seni che viene esteso, dal LEVI-CIVITA [6] fino alla seconda approssimazione e dal TONOLO [7] fino alla terza, per i piccoli triangoli curvilinei situati sopra una superficie a curvatura di Gauss qualsiasi.

Ma esso non si può estendere alla quarta approssimazione. Ricordiamo infatti a questo proposito le conclusioni cui arriva il SEVERI [2]: *Per l'intorno di un punto P di una superficie qualunque σ vale in seconda approssimazione, a meno d'infinitesimi del terzo ordine, la trigonometria sferica ($k > 0$) o pseudosferica ($k < 0$), mentre in prima approssimazione vale la trigonometria piana. Talune relazioni di trigonometria sferica o pseudosferica valgono anzi a meno d'infinitesimi del quarto ordine (per*

(1) Si ricordi che in trigonometria sferica le formule del teorema del coseno sono teoricamente sufficienti per determinare tre delle sei quantità costituite dai lati e dagli angoli del triangolo sferico, date le altre tre; e che tutte le altre formule, che da esse si deducono, hanno soltanto la funzione pratica di essere più semplici o più atte al calcolo.

esempio il teorema dei seni), ed altre anche a meno d'infinitesimi del quinto ordine (per esempio il teorema del coseno).

Per questo, il TONOLO può spingere il teorema dei seni fino alla terza approssimazione, valendosi della nozione di *lunghezza ridotta* $\lambda(a)$ di un arco di geodetica ⁽¹⁾, e prendendo come punto di partenza la formula ⁽²⁾

$$\frac{\lambda(a)}{\sin \alpha} = l,$$

che il DARBOUX dimostra valida a meno di termini del quarto ordine. Ma questa formula, quando si voglia tener conto anche di questi termini, diventa ⁽³⁾

$$\lambda(a) \sin \beta - \lambda(b) \sin \alpha = \frac{u^2 u_0^2 \sin^2(v - v_0)}{6} \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial v_0} \right),$$

ed il procedimento del TONOLO non si può spingere oltre.

Dalle conclusioni del SEVERI risulta invece giustificata la ricerca che qui svolgeremo delle formule di quarta approssimazione per il teorema del coseno.

Prima di iniziirla conviene qui modificare lievemente le formule fondamentali [1], [2]. In esse abbiamo convenuto di considerare le determinazioni di $\gamma, \dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \ddot{\gamma}, k, \dot{k}$ riferite al punto P ; nelle operazioni che seguiranno invece considereremo le determinazioni di questi elementi geometrici riferite non più al punto P , ma al punto di mezzo dell'arco PQ , che indicheremo con M : risulta quindi opportuno trasformare le formule [1], [2] in altre che dipendano da queste nuove determinazioni.

A tal fine, sviluppiamo in serie di Taylor le funzioni $\gamma(l), \dot{\gamma}(l), \ddot{\gamma}(l), \ddot{\gamma}(l), k(l), \dot{k}(l)$; avremo:

$$[3] \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_M = \gamma_P + \frac{1}{2} \dot{\gamma}_P l + \frac{1}{8} \ddot{\gamma}_P l^2 + \frac{1}{48} \ddot{\gamma}_P l^3 + \dots, \\ \dot{\gamma}_M = \dot{\gamma}_P + \frac{1}{2} \ddot{\gamma}_P l + \frac{1}{8} \ddot{\gamma}_P l^2 + \dots, \\ \ddot{\gamma}_M = \ddot{\gamma}_P + \frac{1}{2} \ddot{\gamma}_P l + \dots, \\ \ddot{\gamma}_M = \ddot{\gamma}_P + \dots, \end{array} \right.$$

$$[4] \quad \left\{ \begin{array}{l} k_M = k_P + \frac{1}{2} \dot{k}_P l + \dots, \\ \dot{k}_M = \dot{k}_P + \dots, \end{array} \right.$$

⁽¹⁾ V. [1], pag. 110.

⁽²⁾ V. [1], pag. 170.

⁽³⁾ V. [1], pag. 169.

dove ci siamo arrestati a quei termini che, introdotti poi nella [1], ci daranno dei termini di ordine non superiore al quarto.

Risolvendo allora con questo criterio il sistema [3] rispetto a γ_P ed alle sue derivate, ed analogamente operando sul sistema [4], e sostituendo le espressioni così ottenute nella [1], si ottiene dopo opportune semplificazioni

$$[5] \quad \theta = \frac{1}{2} \gamma l + \frac{1}{12} \dot{\gamma} l^2 + \frac{1}{48} (\ddot{\gamma} + 2 k \gamma) l^3 - \frac{1}{240} \left(\frac{1}{2} \ddot{\gamma} + \frac{1}{3} \gamma^2 \dot{\gamma} + \frac{1}{3} k \dot{\gamma} + 9 k \gamma \right) l^4 + (5) ,$$

dove ora ogni elemento geometrico è riferito al punto di mezzo dell'arco PQ e si è ommesso quindi senza pericolo di ambiguità l'indice M .

Per trasformare infine la seconda formula fondamentale [2], sviluppando in serie di TAYLOR la funzione $\gamma^2(l)$, otteniamo

$$\gamma_M^2 = \gamma_P^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\gamma^2}{dl} \right)_P l + \dots ,$$

da cui segue che il secondo ed il terzo termine della [2] si possono scrivere

$$- \frac{1}{24} (\gamma_P^2 + \gamma_P \dot{\gamma}_P l) l^2 = - \frac{1}{24} \gamma_M^2 l^2 .$$

Tenendo conto di questa e delle formule che si ottengono risolvendo rispetto all'indice P i sistemi [3] e [4], la [2] diventa

$$[6] \quad a = l \left[1 - \frac{1}{24} \gamma^2 l^2 + \frac{1}{10} \left(\frac{1}{192} \gamma^4 + \frac{1}{8} k \gamma^2 - \frac{1}{8} \gamma \ddot{\gamma} - \frac{1}{9} \dot{\gamma}^2 \right) l^4 + (5) \right] ,$$

dove pure abbiamo tralasciato l'indice M in quanto tutti gli elementi geometrici sono riferiti al punto di mezzo dell'arco PQ .

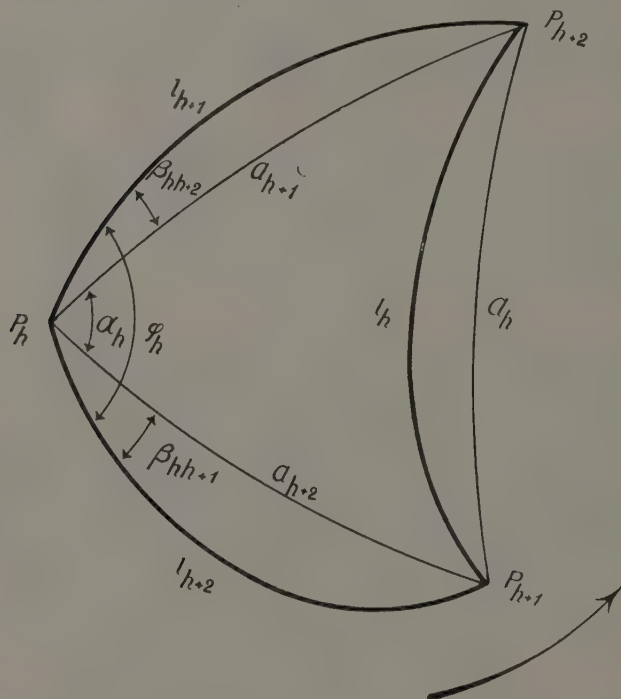
1. - *Relazioni fra gli angoli ed i lati di un triangolo curvilineo della superficie, e gli elementi del corrispondente triangolo formato dalle corde geodetiche.*

Sia $P_h P_{h+1} P_{h+2}$ (con la convenzione di considerare coincidenti gli indici che differiscono di 3 o di un multiplo di 3) un triangolo, che denoteremo anche con Δ , tutto situato in σ e formato con archi di linee regolari, ma del resto qualunque.

Fissato come verso positivo di circolazione sul perimetro del triangolo quello definito dall'ordine crescente degli indici (accennato dalla

freccia nella figura), designiamo con l_h la lunghezza del lato opposto al vertice P_h , cioè del tratto di curva $P_{h+1} P_{h+2}$, e con φ_h l'angolo in P_h formato dalle curve $P_h P_{h+1}$, $P_h P_{h+2}$.

I tre punti P_h , P_{h+1} , P_{h+2} individuano a due a due tre corde geodetiche le cui lunghezze indicheremo rispettivamente con a_h , a_{h+1} , a_{h+2} , costituenti un triangolo Δ_g di angoli α_h , α_{h+1} , α_{h+2} .



Designeremo inoltre con β_{hh+1} , β_{hh+2} i due angoli che gli archi curvilinei $P_h P_{h+1}$, $P_h P_{h+2}$ formano nel vertice P_h rispettivamente con le corde geodetiche $P_h P_{h+1}$, $P_h P_{h+2}$.

I. — Supponiamo che la curva C dianzi considerata sia qui l'arco curvilineo $P_h P_{h+1}$, oppure quello $P_h P_{h+2}$: l'angolo θ precedentemente menzionato diventa ora l'angolo β_{hh+1} , oppure l'angolo β_{hh+2} . Per trovare quindi le espressioni di questi angoli in funzione di elementi geometrici relativi al triangolo Δ ed alla superficie σ , basta ricordare la [5], che ora diventa:

$$[7] \quad \beta_{hh+1} = \frac{1}{2} \gamma_{h+2} l_{h+2} - \frac{1}{12} \dot{\gamma}_{h+2} l_{h+2}^2 + \frac{1}{48} (\ddot{\gamma}_{h+2} + 2 k_{h+2} \gamma_{h+2}) l_{h+2}^3 - \\ - \frac{1}{240} \left(\frac{1}{2} \dddot{\gamma}_{h+2} + \frac{1}{3} \gamma_{h+2}^2 \dot{\gamma}_{h+2} + \frac{1}{3} k_{h+2} \dot{\gamma}_{h+2} + 9 \dot{k}_{h+2} \gamma_{h+2} \right) l_{h+2}^4 + (5),$$

$$[8] \quad \beta_{hh+2} = \frac{1}{2} \gamma_{h+1} l_{h+1} - \frac{1}{12} \dot{\gamma}_{h+1} l_{h+1}^2 + \frac{1}{48} (\ddot{\gamma}_{h+1} + 2 k_{h+1} \gamma_{h+1}) l_{h+1}^3 - \\ - \frac{1}{240} \left(\frac{1}{2} \dddot{\gamma}_{h+1} + \frac{1}{3} \gamma_{h+1}^2 \dot{\gamma}_{h+1} + \frac{1}{3} k_{h+1} \dot{\gamma}_{h+1} + 9 \dot{k}_{h+1} \gamma_{h+1} \right) l_{h+1}^4 + (5),$$

dove, analogamente a quanto avviene per la [5], le determinazioni di $\gamma, \dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \ddot{\gamma}, k, \dot{k}$ s'intendono riferite tutte al punto di mezzo dei lati $P_h P_{h+1}$, $P_h P_{h+2}$ rispettivamente.

Qui però è necessaria un'osservazione sul segno delle derivate delle funzioni $\gamma_{h+2}, \gamma_{h+1}$. Con le notazioni $\dot{\gamma}_{h+2}, \dot{\gamma}_{h+1}$ abbiamo indicato rispettivamente le derivate di queste funzioni rispetto agli archi $P_h P_{h+1}$, $P_h P_{h+2}$, contati da P_h verso P_{h+1} , oppure da P_h a P_{h+2} .

Nel primo caso questo verso è concorde con quello $P_h P_{h+1} P_{h+2}$ adottato come positivo per la circolazione sul perimetro del triangolo Δ , mentre nel secondo caso esso si trova invertito. Se quindi conveniamo che il punto di sovrapposto indichi sempre una derivazione rispetto agli archi dei lati del triangolo curvilineo Δ nel senso circolare ($h, h+1, h+2$), adottato come positivo sul perimetro del triangolo, dobbiamo nella formula [8] cambiare segno alle derivate prime $\dot{\gamma}_{h+1}, \dot{k}_{h+1}$ ed alla derivata terza $\dddot{\gamma}_{h+1}$ (non alla derivata seconda $\ddot{\gamma}_{h+1}$, perchè per essa abbiamo due cambiamenti di segno successivi) ⁽¹⁾. Essa diventa quindi:

$$[9] \quad \beta_{hh+2} = \frac{1}{2} \gamma_{h+1} l_{h+1} + \frac{1}{12} \dot{\gamma}_{h+1} l_{h+1}^2 + \frac{1}{48} (\ddot{\gamma}_{h+1} + 2 k_{h+1} \gamma_{h+1}) l_{h+1}^3 + \\ + \frac{1}{240} \left(\frac{1}{2} \dddot{\gamma}_{h+1} + \frac{1}{3} \gamma_{h+1}^2 \dot{\gamma}_{h+1} + \frac{1}{3} k_{h+1} \dot{\gamma}_{h+1} + 9 \dot{k}_{h+1} \gamma_{h+1} \right) l_{h+1}^4 + (5).$$

Chiarita così la questione del segno, prendiamo in considerazione uno qualunque degli angoli β , per esempio β_{hh+1} . Esso è, in valore assoluto, l'angolo acuto compreso fra l'arco $P_h P_{h+1}$ e la corda geodetica corrispondente; ed il suo segno è quello del termine preponderante al secondo membro della [7], ossia (la lunghezza l_{h+2} essendo positiva) di γ_{h+2} .

In [8] abbiamo introdotto i vettori unitari t , tangente a C , e v , situato sulla sua normale principale, precisandone i versi. Nel caso ora in que-

(¹) Nelle espressioni di β a due indici distinti questi cambiamenti vanno fatti quando nel complesso della formula l'ordine circolare degli indici è retrogrado.

stione, il vettore t sarà diretto nel verso $P_h P_{h+1} P_{h+2}$, e quindi ν verso l'interno del triangolo Δ .

Allora, se il lato curvilineo $P_h P_{h+1}$ è, come in figura, situato all'esterno del triangolo Δ_g , la relativa normale principale, avendo sempre come verso positivo quello rivolto verso la concavità dell'arco $P_h P_{h+1}$, sarà diretta verso l'interno di Δ : cioè, come il vettore ν . Ricordando allora le convenzioni fatte in [8], la curvatura geodetica γ_{h+2} deve essere assunta positiva; e tale sarà anche di conseguenza l'angolo β_{hh+1} .

In modo analogo si conclude che quest'angolo è invece negativo se il lato curvilineo $P_h P_{h+1}$ è situato all'interno del triangolo Δ_g .

Possiamo quindi affermare che, qualunque sia la reciproca posizione dei lati $P_h P_{h+1}$, $P_h P_{h+2}$ del triangolo Δ e delle relative corde geodetiche del triangolo Δ_g uscenti da P_h , vale sempre la relazione

$$[10] \quad \varphi_h = \alpha_h + \beta_{hh+1} + \beta_{hh+2}.$$

Sostituendo allora in questa le [7], [9], otteniamo la formula seguente che ci dà la relazione fra gli angoli di un triangolo curvilineo e quelli del corrispondente triangolo geodetico:

$$[11] \quad \alpha_h = \varphi_h - \delta_h + (5),$$

dove abbiamo posto

$$[12] \quad \begin{aligned} \delta_h = & \frac{1}{2} [\gamma_{h+1} l_{h+1} + \gamma_{h+2} l_{h+2}] + \frac{1}{12} [\dot{\gamma}_{h+1} l_{h+1}^2 - \dot{\gamma}_{h+2} l_{h+2}^2] + \\ & + \frac{1}{48} \left[(\ddot{\gamma}_{h+1} + 2 k_{h+1} \gamma_{h+1}) l_{h+1}^3 + (\ddot{\gamma}_{h+2} + 2 k_{h+2} \gamma_{h+2}) l_{h+2}^3 \right] + \\ & + \frac{1}{240} \left[\left(\frac{1}{2} \ddot{\gamma}_{h+1} + \frac{1}{3} \gamma_{h+1}^2 \dot{\gamma}_{h+1} + \frac{1}{3} k_{h+1} \dot{\gamma}_{h+1} + 9 \dot{k}_{h+1} \gamma_{h+1} \right) l_{h+1}^4 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{2} \ddot{\gamma}_{h+2} + \frac{1}{3} \gamma_{h+2}^2 \dot{\gamma}_{h+2} + \frac{1}{3} k_{h+2} \dot{\gamma}_{h+2} + 9 \dot{k}_{h+2} \gamma_{h+2} \right) l_{h+2}^4 \right]. \end{aligned}$$

II. - Per ottenere infine la formula esprimente la relazione che intercede fra i lati del triangolo curvilineo e quelli del corrispondente triangolo geodetico, basta osservare che, facendo coincidere la curva C con l'arco curvilineo $P_{h+1} P_{h+2}$, è applicabile la [6], dalla quale si trae

$$[13] \quad a_h = l_h [1 - X_h + (5)],$$

ove si è posto

$$[14] \quad X_h = \frac{1}{24} \gamma_h^2 l_h^2 - \frac{1}{10} \left(\frac{1}{192} \gamma_h^4 + \frac{1}{8} k_h \gamma_h^2 - \frac{1}{8} \gamma_h \dot{\gamma}_h - \frac{1}{9} \dot{\gamma}_h^2 \right) l_h^4,$$

intendendo anche qui che le determinazioni di γ_h , $\dot{\gamma}_h$, $\ddot{\gamma}_h$, k_h siano riferite al punto di mezzo del lato l_h .

2. - Il teorema del coseno in quarta approssimazione.

Conservando le notazioni precedenti col loro significato, poniamo

$$[15] \quad k_h = \frac{1}{R_h^2}$$

con la specificazione

$$\begin{aligned} & R_h > 0 \quad \text{per } k > 0 \\ & -iR_h > 0 \quad \text{per } k < 0 \quad (i = \sqrt{-1}), \end{aligned}$$

e ricordiamo che, a meno di termini del quinto ordine, si ha ⁽¹⁾:

$$[16] \quad \cos a'_h = \cos a'_{h+1} \cos a'_{h+2} + \sin a'_{h+1} \sin a'_{h+2} \cos \alpha_h,$$

dove abbiamo posto per brevità di scrittura

$$[17] \quad a'_h = \frac{a_h}{R_h}.$$

Le [16] sono le formule esprimenti il teorema del coseno per il triangolo Δ_g ; ci proponiamo di trasformarle in modo che ne risulti lo stesso teorema per il triangolo Δ .

A tal fine, incominciamo con sostituire nello sviluppo

$$[18] \quad \cos a'_h = 1 - \frac{a'^2_h}{2!} + \frac{a'^4_h}{4!} - \dots$$

l'espressione di a'_h che si ottiene dalla [13]

$$[19] \quad a'_h = \frac{a_h}{R_h} = \frac{l_h}{R_h} [1 - X_h + (5)],$$

con X_h dato dalla [14]; trascurando - come in tutte le operazioni che seguiranno - i termini che sono almeno del quinto ordine, avremo, ricordando lo sviluppo [18]:

$$[20] \quad \cos a'_h = \cos \frac{l_h}{R_h} + \frac{1}{24} \frac{\gamma_h^2}{R_h^2} l_h^4.$$

⁽¹⁾ V. [8], pag. 238.

Per questa, il primo prodotto al secondo membro della [16] diventa:

$$[21] \quad \cos a'_{h+1} \cos a'_{h+2} = \cos \frac{l_{h+1}}{R_{h+1}} \cos \frac{l_{h+2}}{R_{h+2}} + \\ + \frac{1}{24} \frac{\gamma_{h+1}^2}{R_{h+1}^2} l_{h+1}^4 + \frac{1}{24} \frac{\gamma_{h+2}^2}{R_{h+2}^2} l_{h+2}^4,$$

Per trasformare il secondo prodotto al secondo membro della [16], sostituiamo dapprima nello sviluppo

$$[22] \quad \sin a'_h = a'_h - \frac{a_h'^3}{3!} + \dots$$

l'espressione [19]; tenendo conto della [14] e ricordando lo stesso sviluppo [22], otterremo

$$[23] \quad \sin a'_h = \sin \frac{l_h}{R_h} - \frac{1}{24} \frac{\gamma_h^2}{R_h} l_h^3.$$

Per questa si ha intanto

$$[24] \quad \sin a'_{h+1} \sin a'_{h+2} = \sin \frac{l_{h+1}}{R_{h+1}} \sin \frac{l_{h+2}}{R_{h+2}} - \\ - \frac{1}{24} \frac{\gamma_{h+1}^2}{R_{h+1}} \frac{\gamma_{h+2}^2}{R_{h+2}} l_{h+1}^3 l_{h+2} - \frac{1}{24} \frac{\gamma_{h+1}^2}{R_{h+1}} \frac{\gamma_{h+2}^2}{R_{h+2}} l_{h+1} l_{h+2}^3.$$

Per calcolare ancora $\cos \alpha_h$, dalla [11] avremo

$$\cos \alpha_h = \cos \varphi_h \cos \delta_h + \sin \varphi_h \sin \delta_h,$$

e quindi, tenendo conto che δ_h è del primo ordine, e che poi si dovrà moltiplicare $\cos \alpha_h$ per la [24] che è del secondo ordine, possiamo scrivere:

$$\cos \alpha_h = \cos \varphi_h \left(1 - \frac{\delta_h^2}{2} \right) + \delta_h \sin \varphi_h.$$

Sostituendo in questa l'espressione di δ_h data dalla [12], otteniamo

$$\cos \alpha_h = \cos \varphi_h \left(1 - \frac{1}{8} \gamma_{h+1}^2 l_{h+1}^2 - \frac{1}{8} \gamma_{h+2}^2 l_{h+2}^2 - \frac{1}{4} \gamma_{h+1} \gamma_{h+2} l_{h+1} l_{h+2} \right) + \\ + \sin \varphi_h \left[\frac{1}{2} (\gamma_{h+1} l_{h+1} - \gamma_{h+2} l_{h+2}) - \frac{1}{12} (\dot{\gamma}_{h+1} l_{h+1}^2 - \dot{\gamma}_{h+2} l_{h+2}^2) \right].$$

Moltiplicando allora questa per la [24], dopo aver osservato che in questa il primo prodotto al secondo membro si può anche scrivere

$$\sin \frac{l_{h+1}}{R_{h+1}} \sin \frac{l_{h+2}}{R_{h+2}} = \frac{l_{h+1} l_{h+2}}{R_{h+1} R_{h+2}} - \frac{l_{h+1}^3 l_{h+2}}{6 R_{h+1}^3 R_{h+2}} - \frac{l_{h+1} l_{h+2}^3}{6 R_{h+1} R_{h+2}^3},$$

si ottiene:

$$\begin{aligned}
 [25] \quad & \text{sen } \alpha'_{h+1} \text{ sen } \alpha'_{h+2} \cos \alpha_h = \text{sen } \frac{l_{h+1}}{R_{h+1}} \text{ sen } \frac{l_{h+2}}{R_{h+2}} \cos \varphi_h - \\
 & - \frac{1}{24} (\gamma_{h+1}^2 l_{h+1}^2 + \gamma_{h+2}^2 l_{h+2}^2) \frac{l_{h+1} l_{h+2}}{R_{h+1} R_{h+2}} \cos \varphi_h - \\
 & - \frac{1}{8} (\gamma_{h+1}^2 l_{h+1}^2 + \gamma_{h+2}^2 l_{h+2}^2) \frac{l_{h+1} l_{h+2}}{R_{h+1} R_{h+2}} - \frac{1}{4} \frac{\gamma_{h+1} \gamma_{h+2}}{R_{h+1} R_{h+2}} l_{h+1}^2 l_{h+2}^2 + \\
 & + \text{sen } \varphi_h \left[\frac{1}{2} (\gamma_{h+1} l_{h+1} - \gamma_{h+2} l_{h+2}) + \frac{1}{12} (\dot{\gamma}_{h+1} l_{h+1}^2 - \dot{\gamma}_{h+2} l_{h+2}^2) \right] \frac{l_{h+1} l_{h+2}}{R_{h+1} R_{h+2}}.
 \end{aligned}$$

Ponendo infine:

$$\begin{aligned}
 \psi_h &= \frac{1}{24} (k_{h+1} \gamma_{h+1}^2 l_{h+1}^4 + k_{h+2} \gamma_{h+2}^2 l_{h+2}^4 - k_h \gamma_h^2 l_h^4), \\
 \chi_h &= \frac{1}{8} (\gamma_{h+1}^2 l_{h+1}^2 + \gamma_{h+2}^2 l_{h+2}^2) \frac{l_{h+1} l_{h+2}}{R_{h+1} R_{h+2}}, \\
 \omega_h &= \frac{1}{2} (\gamma_{h+1} l_{h+1} - \gamma_{h+2} l_{h+2}) + \frac{1}{12} (\dot{\gamma}_{h+1} l_{h+1}^2 - \dot{\gamma}_{h+2} l_{h+2}^2),
 \end{aligned}$$

e ricordando la [15], la [16] diventa, per le [20], [21] e [25]:

$$\begin{aligned}
 \cos \frac{l_h}{R_h} &= \cos \frac{l_{h+1}}{R_{h+1}} \cos \frac{l_{h+2}}{R_{h+2}} + \text{sen } \frac{l_{h+1}}{R_{h+1}} \text{ sen } \frac{l_{h+2}}{R_{h+2}} \cos \varphi_h + \\
 & + \psi_h - \chi_h \left(1 + \frac{1}{3} \cos \varphi_h \right) + \left(\omega_h \text{sen } \varphi_h - \frac{1}{4} \gamma_{h+1} \gamma_{h+2} l_{h+1} l_{h+2} \right) \frac{l_{h+1} l_{h+2}}{R_{h+1} R_{h+2}},
 \end{aligned}$$

la quale esprime il teorema del coseno in quarta approssimazione per i piccoli triangoli curvilinei situati sopra una superficie a curvatura di Gauss qualsiasi.

BIBLIOGRAFIA

-
- [1] G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. III, (Paris, Gauthier-Villars, 1894).
- [2] F. SEVERI, *Sulla curvatura delle superfici e varietà*. (« Rend. Circolo Matem. di Palermo », t. XLII, 1917).
- [3] A. TONOLO, *Il teorema dei seni per i triangoli tracciati sopra una superficie*. (« Rend. Lincei », vol. XIX, ser. 6^a, fasc. 8, 1934).
- [4] A. TONOLO, *Studi di trigonometria dei triangoli tracciati sopra una superficie*. (« Atti Ist. Veneto », t. XCIII, p. II, 1934).
- [5] A. TONOLO, *Il teorema dei seni per i triangoli infinitesimi tracciati sopra una superficie*. (« Comp. Math. », vol. II, fasc. 2, 1935).
- [6] T. LEVI CIVITA, *La trigonometria dei piccoli triangoli curvilinei sopra una superficie*. (« Rend. Semin. Mat. e Fis. », Milano, vol. XII, 1938).
- [7] A. TONOLO, *Studi di trigonometria dei piccoli triangoli curvilinei sopra una superficie*. (*Ibidem*, vol. XIII, 1939).
- [8] C. MORELLI, *Formule fondamentali per l'estensione alla quarta approssimazione della trigonometria dei piccoli triangoli curvilinei sopra una superficie qualunque*. (« Mem. della R. Acc. d'Italia », vol. III, anno 1942-XX).
-

Geofisica. — *Sulla variazione della pressione nell'interno della Terra con riferimento a variazione discontinua di densità.* Nota di GIOVANNI BOAGA, presentata ⁽¹⁾ da GINO CASSINIS, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Il corpo terrestre secondo le ricerche analitico-numeriche del BULLEN ⁽²⁾ basate sulle dromocrone sismiche, dovrebbe essere costituito da un nucleo centrale di 3.451 chilometri di raggio e da quattro zone o corone sferiche concentriche, sovrapposte, rispettivamente di 2.439, 439, 28 e 14 chilometri di spessore.

Nel nucleo centrale e nella prima zona ad esso sovrapposta e quindi per un corpo sferico complessivo di 5.890 chilometri di raggio, le densità dei materiali di cui esso è costituito, variano secondo funzioni paraboliche delle distanze computate dal centro della terra. Nelle altre due zone consecutive le densità variano secondo funzioni lineari e nell'ultima zona, terminante con la superficie esteriore del pianeta, la densità è costante. In base ai dati numerici riportati dal BULLEN, in uno studio precedente ⁽³⁾ abbiamo stabilito i valori dei coefficienti numerici delle funzioni delle densità nelle varie zone e nel nucleo, pervenendo ai risultati più avanti riportati. A completamento dello studio richiamato ci proponiamo ora di stabilire una funzione analitica atta a dare la pressione nell'interno della terra in funzione della profondità, o della distanza dello strato considerato dal centro, prendendo a base degli sviluppi le funzioni analitiche sulle variazioni delle densità interne.

Per ottenere risultati simmetrici nei coefficienti che dovremo via, via, stabilire, considereremo il problema dal lato generale ritenendo non solo nel nucleo e nella zona ad esso immediatamente sovrapposta, ma

⁽¹⁾ Nell'Adunanza del 21 marzo 1942-XX.

⁽²⁾ Cfr. E. ODDONE, *Discontinuità, densità e compressibilità cubica nell'interno della Terra - Geofisica pura ed applicata*, vol. I, 1939.

⁽³⁾ Cfr. G. BOAGA, *Sopra l'ipotesi di Bullen sulla variazione discontinua della densità nell'interno della Terra e sulla conseguente variazione della gravità.* (« Pontificia Academia Scientiarum », anno V, vol. V, n. 2, 1941).

anche nelle altre, che la densità sia rappresentata da funzioni paraboliche secondo forme del tipo

$$[1] \quad \rho_i = \alpha_i + \beta_i \left(\frac{r}{R} \right) + \gamma_i \left(\frac{r}{R} \right)^2 \quad (i = 1, 2, \dots, 5)$$

salvo poi nel calcolo numerico considerare di valore nullo i coefficienti γ per le zone: terza, quarta e quinta e β per la zona quinta.

Nella [1] con l'indice $i = 1$ si indicherà la densità ρ ed i coefficienti α, β, γ riferentisi al nucleo e con $i = 2, 3, 4, 5$ i corrispondenti nelle zone seconda, terza, quarta e quinta rispettivamente. Inoltre con R viene indicato il raggio medio terrestre espresso in chilometri (6.371) e con r la distanza dello strato considerato computata dal centro ed espressa pure in chilometri.

Le superficie di discontinuità per le densità si hanno per i seguenti valori r_i i cui complementi ad R danno le corrispondenti profondità P_i riferite, s'intende, alla superficie esteriore del pianeta:

$$r_1 = \text{km. } 3.461; \quad r_2 = \text{km. } 5.890; \quad r_3 = \text{km. } 6.329; \quad r_4 = \text{km. } 6.357$$

I coefficienti numerici delle [1] sono riassunti nel quadro che segue:

SPECCHIO I.

Parte interna	ρ_i	α_i	β_i	γ_i	Limiti di variabilità delle distanze r
Nucleo o I zona. .	1	+ 12,206	+ 0,099	— 8,432	$0 \leq r \leq r_1$
II zona. .	2	+ 6,254	— 0,124	— 2,222	$r_1 \leq r \leq r_2$
III zona. .	3	+ 8,629	— 5,339	0,000	$r_2 \leq r \leq r_3$
IV zona. .	4	+ 48,189	— 45,489	0,000	$r_3 \leq r \leq r_4$
V zona. .	5	+ 2,640	0,000	0,000	$r_4 \leq r \leq R$

Ciò posto, ricordiamo che la gravità g nell'interno della terra, quando non si considera la forza centrifuga, viene espressa dalla funzione

$$[2] \quad g(r) = \frac{4\pi\varepsilon}{r^2} \int_0^r \rho r^2 \cdot dr$$

con ε costante dell'attrazione.

Nel caso particolare in cui si consideri uno strato generico nell'ultima zona, caratterizzato da un valore r compreso fra i limiti 6.357 e 6.371 chilometri, l'integrale messo in evidenza nella [2] si spezza in cinque inte-

grali definiti i cui limiti sono rispettivamente: $(0, r_1) (r_1, r_2) (r_2, r_3) (r_3, r_4) (r_4, r)$.

Effettuando le integrazioni si ottiene la seguente formula fondamentale per la gravità interna nell'ultima zona:

$$[3] \quad g(r) = 4\pi\epsilon R \left\{ \left(\frac{R}{r}\right)^2 \sum_{i=1}^4 \left(\frac{r_i}{R}\right)^3 \left[\frac{1}{3} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) + \frac{1}{4} (\beta_i - \beta_{i+1}) \left(\frac{r_i}{R}\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{5} (\gamma_i - \gamma_{i+1}) \left(\frac{r_i}{R}\right)^2 \right] + \frac{r}{R} \cdot \left[\frac{1}{3} \alpha_5 + \frac{1}{4} \beta_5 \left(\frac{r}{R}\right) + \frac{1}{5} \gamma_5 \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right] \right\}$$

e conseguentemente la più generale per la zona j -esima

$$[4] \quad g_j(r) = 4\pi\epsilon R \left\{ \left(\frac{R}{r}\right)^2 N_j + \frac{r}{R} \cdot \left[\frac{\alpha_j}{3} + \frac{\beta_j}{4} \left(\frac{r}{R}\right) + \frac{\gamma_j}{5} \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right] \right\}$$

con N_j quantità costanti definite dalle

$$[5] \quad N_j = \sum_{i=1}^{j-1} \left(\frac{r_i}{R}\right)^3 \left\{ \frac{1}{3} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) + \frac{1}{4} (\beta_i - \beta_{i+1}) \left(\frac{r_i}{R}\right) + \frac{1}{5} (\gamma_i - \gamma_{i+1}) \left(\frac{r_i}{R}\right)^2 \right\}$$

dove è $1 < j \leq 5$.

In base ai valori dei coefficienti α, β, γ di cui allo specchio I, il termine N_j per i vari valori di j , assume i seguenti importi:

$$[6] \quad N_2 = +0,262225; N_3 = +0,289427; N_4 = -2,827594; N_5 = +0,982916.$$

Posto per opportunità calcolativa $r: R = a$ con che a varia dal centro alla superficie del pianeta da zero a uno, si ottiene per la [4] la espressione

$$[7] \quad g_i(a) = 4\pi\epsilon R \left\{ \frac{N_j}{a^2} + a \left(\frac{\alpha_i}{3} + \frac{\beta_i}{4} a + \frac{\gamma_i}{5} a^2 \right) \right\}.$$

Sulla unità di superficie dello strato generico di raggio r appartenente alla zona j -esima, per una variazione dr della distanza r , gravita, come facilmente si verifica, la pressione elementare

$$[8] \quad dp = \rho_j \left(\frac{r}{R}\right) \cdot g_j \left(\frac{r}{R}\right) \cdot dr = \rho_j(a) \cdot g_j(a) \cdot R da$$

ed integrando fra i limiti r ed r_j , si ottiene la pressione gravitante sulla unità superficiale dello strato considerato e limitata al contributo della zona j -esima. Effettuando la integrazione, dopo semplici semplificazioni, si giunge alla formula generale

$$[9] \quad p_j = 4\pi\epsilon R^2 \left\{ C_{0,j} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a_j} \right) + C_{1,j} \log_e \frac{a_j}{a} + \sum_{s=2}^7 \frac{C_{s,j}}{s-1} (a_j^{s-1} - a^{s-1}) \right\}$$

dove i coefficienti $C_{s,j}$ risultano dati dalle:

$$[10] \quad \left\{ \begin{array}{ll} C_{0,j} = N_j \alpha_j & C_{4,j} = \frac{7}{12} \alpha_j \beta_j \\ C_{1,j} = N_j \beta_j & C_{5,j} = \frac{8}{15} \alpha_j \gamma_j + \frac{1}{4} \beta_j^2 \\ C_{2,j} = N_j \gamma_j & C_{6,j} = \frac{9}{20} \beta_j \gamma_j \\ C_{3,j} = \frac{1}{3} \alpha_j^2 & C_{7,j} = \frac{1}{5} \gamma_j^2 \end{array} \right.$$

Se lo strato r è compreso nell'ultima zona è necessario limitare l'integrazione allo strato superficiale e quindi porre $\alpha_j = 1$.

Se invece lo strato r è nella quarta zona, compreso fra r_3 e r_4 , si deve porre $j = 4$ e $\alpha_j = \alpha_4$, e così di seguito. In questi casi alle pressioni trovate si devono aggiungere i contributi delle zone soprastanti.

In particolare poi, per il nucleo centrale, tenendo conto dei risultati [6], le prime tre costanti [[10] sono di valore nullo e la [9] assume la forma ridotta:

$$[11] \quad p_1(a) = 4\pi\epsilon R^2 \cdot \sum_{s=3}^7 \frac{C_{s,1}}{s-1} (a_1^{s-1} - a^{s-1}).$$

La variazione della gravità nel nucleo discende subito dalla [7] ponendo $j = 1$ e $N_1 = 0$.

Ulteriormente, svolgendo la sommatoria e ricorrendo alle [10] si arriva per la pressione esercitata dal nucleo nel centro del corpo terrestre, ad una espressione, che per brevità non si trascrive, e dove sono messi in evidenza i coefficienti della funzione della densità.

Desiderando una espressione che fornisca p in funzione della profondità P basterà nella [9] sostituire ad a il quoziente $(R - P): R$ cioè

$$1 - P^{(km)} \times 0,0001583.$$

Altrettanto dicasi per la [11].

Nelle [9] e [11], esprimendo R in cm la pressione viene espressa in dine/cm². Volendo esprimere la pressione in atmosfere, è necessario dividere i due membri delle formule citate per

$$b = h D g_0 = \frac{4}{3} \pi \epsilon (h D) R \rho_m$$

dove h , come di consueto, rappresenta l'altezza del barometro (cm 76), D la densità del mercurio a zero gradi e ρ_m la densità media terrestre (5,52).

Introducendo nelle [10] i valori numerici dei coefficienti $\alpha_j \beta_j \gamma_j$ raccolti nello specchio I e tenendo conto dei risultati [6] si perviene per i coefficienti $C_{s,j}$ ai seguenti importi:

SPECCHIO II.

$s \backslash j$	1	2	3	4	5
0	0	+ 1,63996	+ 2,49747	— 136,25893	+ 2,59489
1	0	— 0,03252	— 1,54930	— 128,62442	0
2	0	— 0,58266	0	0	0
3	+ 49,66214	+ 13,03750	+ 24,81988	+ 774,05991	+ 2,32320
4	+ 0,70489	— 0,45237	— 26,87941	— 1290,23236	0
5	— 54,88874	— 7,40757	+ 7,12623	+ 517,31228	0
6	— 0,37564	+ 0,12399	0	0	0
7	+ 14,21972	+ 0,98746	0	0	0

Le formule stabilite possono essere convenientemente utilizzate nelle ricerche di carattere teorico dove interviene la funzione della pressione interna.

In ultima analisi facciamo presente che desiderando risultati approssimati per le pressioni interne, anzichè utilizzare le formule da noi stabilite, si potrà utilizzare direttamente la [8] scomponendo la profondità $P = R - r$ in più parti, calcolando con la [8] stessa i contributi di ogni parte, addizionando poi i risultati. Questi calcoli vengono facilitati disponendo di una tabella numerica dove siano raccolti a varie profondità e le densità e le gravità, calcolate mediante le [1] e [4]. Se in particolare è $dr = r_m - r_n$, converrà prendere per ρ e g da introdurre nella [8] i valori medi che si hanno per le superficie r_m e r_n .

Onde avere un criterio circa la variabilità della pressione nell'interno del corpo terrestre abbiamo dapprima calcolate, seguendo questo procedimento, le pressioni alle profondità di 14, 42, 481 e 2.920 chilometri, corrispondenti alle superficie di discontinuità della densità, ottenendo i risultati:

$P =$	14 km.	$p = 0,003.6 \times 10^{12}$ dine. cm ⁻²	$= 0,003.7 \times 10^6$ kg. cm ⁻²
	42 »	0,010.8	0,011.0 »
	481 »	0,163.7	0,166.8 »
	2920 »	1,347.2	1,374.4 »

poscia quelle corrispondenti alle prime cinque centinaia di chilometri:

$P = 100$ km.	$p = 0,029.5 \times 10^{12}$ dine. cm. ⁻²	$= 0,030.0 \times 10^6$ kg. cm. ⁻²
200 »	0,063.0	0,064.2 »
300 »	0,098.5	0,100.4 »
400 »	0,134.0	0,136.7 »
500 »	0,172.0	0,075.4 »

Per una visione generale della costituzione interna terrestre si ritiene interessante riportare nello specchio III per le profondità equidistanti di km. 637 in km. 637 le densità espresse in gr. cm³, le gravità in cm. sec⁻²(gal) e le pressioni interne espresse in kg. cm⁻², calcolate con i procedimenti esposti.

SPECCHIO III.

parametro <i>a</i>	profondità <i>p</i> (km.)	densità <i>ρ</i> (gr. cm ³)	gravità <i>g</i> (cm. sec ⁻²)	pressioni <i>p</i> (kg. cm ⁻²)
1,0	0	2,64	983	$0,000.0 \times 10^6$
0,9	637	4,34	995	0,219.4
0,8	1274	4,37	984	0,511.7
0,7	1911	5,08	983	0,824.2
0,6	2548	5,38	1006	1,161.5
0,5	3185	10,15	984	1,644.2
0,4	3823	10,90	821	2,259.4
0,3	4460	11,48	636	2,788.2
0,2	5097	11,89	435	3,194.3
0,1	5734	12.13	223	3,450.6
0,0	6371	12.21	0	3,538.6

Dai computi effettuati risulta che il centro della terra è sollecitato dalla enorme pressione

$$3,539 \times 10^6 \text{ kg. cm}^{-2}.$$

Gli scostamenti fra le pressioni trovate con riferimento alla variazione discontinua della densità e quelle determinate in altro studio prendendo a base dei calcoli la ipotesi bicubica

$$\rho = 11,63 (1 - 1,2795 \cdot a^2 + 0,7642 \cdot a^4 - 0,2552 \cdot a^6)$$

sulla variazione continua della densità, soddisfacente tutti i dati geodetici e geofisici oggi ammessi ⁽¹⁾, sono riuniti nello specchio IV.

SPECCHIO IV.

Parametro <i>a</i>	pressioni determinate con		diff. (kg. cm ⁻²)
	Ipotesi cont. (kg. cm ⁻²)	Ipotesi scont. (kg. cm ⁻²)	
1,0	0,000 × 10 ⁸	0,000 × 10 ⁸	0,000 × 10 ⁸
0,9	0,154	0,219	— 0,065
0,8	0,425	0,512	— 0,087
0,7	0,780	0,824	— 0,044
0,6	1,203	1,162	+ 0,041
0,5	1,663	0,644	+ 0,019
0,4	2,125	2,259	— 0,134
0,3	2,546	2,788	— 0,242
0,2	2,888	3,194	— 0,306
0,1	3,110	3,451	— 0,341
0,0	3,188	3,539	— 0,351

Dai sensibili scostamenti che si ottengono per le pressioni interne valutate con le due ipotesi sulla variazione della densità e che raggiungono nel nucleo importi di oltre 300.000 kg. cm⁻² e da quelli che si ottengono per le gravità e per le densità, come è stato messo in evidenza nello studio richiamato nella Nota ⁽²⁾, si conclude che bisogna essere molto cauti nello scegliere l'ipotesi continua o quella discontinua per le densità interne e conseguentemente per le gravità e le pressioni, da utilizzare nei problemi teorico-pratici che investono fenomeni il cui campo d'azione è l'interno del corpo terrestre.

⁽¹⁾ G. BOAGA, *Sopra una ipotesi relativa alla variazione della densità nell'interno della Terra compatibile con i moderni dati geodetici e geofisici*. (« Atti R. Ist. Lombardo », 1939, V, 57).

⁽²⁾ G. BOAGA, *Sulla variazione della pressione nell'interno della Terra*. (« Rend. Sc. della R. Accademia d'Italia », 1942).

Biologia. — *Contributo all'istochimica delle cellule cromaffini della midolla surrenale.* Nota I ⁽¹⁾ di CARMELO CIACCIO, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Per quanto siano abbastanza progredite le nostre conoscenze relative ad alcune specie di cellule cromaffini e particolarmente di quelle enterocromaffini — grazie alle ricerche di CORDIER e LISON ⁽²⁾, MAX CLARA ⁽³⁾, VIALLI ed ERSPAMER ⁽⁴⁾ — scarsi dati invece possediamo in rapporto alle cellule della midolla surrenale. Infatti per questo tipo di cellule cromaffini — che è stato il primo ad essere individualizzato — le nostre conoscenze si limitano ancora alle seguenti reazioni istochimiche effettuate molto tempo fa, e dopo quella cromaffine:

1° reazione al cloruro ferrico (C. CIACCIO) ⁽⁵⁾;

2° riduzione del tetrossido di Osmio (MULON) ⁽⁶⁾;

3° riduzione del nitrato d'argento ammoniacale (C. CIACCIO ⁽⁷⁾; KUTSCHERA-AICHBERGEN ⁽⁸⁾; OGATA ⁽⁹⁾; BAGINSKI ⁽¹⁰⁾;

4° reazione al jodato potassico (CORDIER e LISON) ⁽¹¹⁾.

Queste reazioni però sono soltanto realizzabili col trattamento diretto dell'organo coi reattivi, mentre finora — contrariamente a quanto si verifica per altri tipi di cellule cromaffini — i risultati sono stati negativi eseguendo queste ed altre reazioni su sezioni di organo fissato in formolo.

Tale condizione, come è facile comprendere, ha appunto arrestato non solo le nostre conoscenze istochimiche, ma anche quelle citologiche in quanto solo con date miscele contenenti formolo si ottiene una fissa-

⁽¹⁾ Presentata nell'Adunanza del 21 marzo 1942-XX.

⁽²⁾ CORDIER e LISON, «Bull. d'Hist. appl.», VII, 1930.

⁽³⁾ MAX CLARA, «Zeitschr. f. d. ges. Anat.», III, Abt. Bd. 30.

⁽⁴⁾ VIALLI ed ERSPAMER, «Arch. ital. Anat. ed Embr.», XXXVII, 1936.

⁽⁵⁾ C. CIACCIO, «Anat. Anz.», XXIII; XXIV, 1903-1904.

⁽⁶⁾ MULON, «C. R. Soc. biol.», 57, 1905.

⁽⁷⁾ C. CIACCIO, «Anat. Anz.», XXXIII, 1908.

⁽⁸⁾ KUTSCHERA-AICHBERGEN, «Frank. Z. f. Path.», 27, 1922.

⁽⁹⁾ OGATA, «Ziegler Beitr.», 71, 1923.

⁽¹⁰⁾ BAGINSKI, «Bull. d'Hist. appl.», V, 1928.

⁽¹¹⁾ CORDIER e LISON, «Bull. d'Hist. appl.», VII, 1930.

zione utilizzabile per la localizzazione delle sostanze elaborate; e pertanto solo con l'uso di miscele fissatrici a base di formolo e bicromato potassico si sono ottenuti risultati attendibili in rapporto alla cosiddetta sostanza cromaffine (CIACCIO ⁽¹⁾—GRYNFELT) ⁽²⁾ mentre i risultati ottenuti con la reazione all'argento ammoniacale e al cloruro ferrico sono incerti per lo meno per quanto riguarda la topografia citologica della sostanza elaborata.

Stando così le cose ho creduto di insistere in proposito per vedere se è possibile realizzare condizioni tali da permettere di eseguire su sezioni di surrenali fissate quelle reazioni in uso per altri organi a cellule cromaffini e considerate come più o meno caratteristiche per l'identificazione di sostanze aventi uno o più ossidrili fenolici.

Dopo vari tentativi sono riuscito allo scopo per alcune specie animali e rispettivamente con opportuna fissazione in formolo.

MATERIALE E TECNICA PRELIMINARE.

Tra le specie esaminate hanno dato risultati positivi il bue, il montone ed il pollo, mentre hanno dato finora risultati negativi il cane, il maiale, la cavia, il coniglio, il ratto.

La fissazione più adatta è quella eseguita con formolo tamponato con acetato di Magnesio e precisamente secondo la seguente formula:

Formolo Schering	cc. 20-25
Acetato di Magnesio crist. in sol. 5-8 % . .	cc. 40
Acqua distillata	cc. 40

Buoni risultati si ottengono anche con formolo tamponato con acetato di Zinco, mentre col formolo come tale o addizionato con cloruro sodico non ho ottenuto risultati soddisfacenti.

Sezioni di organo di mm. 1-2 di spessore sono mantenute nella soluzione fissatrice per 36-48 ore a 6°-10°; dopo di che lavaggio in una soluzione 0,1 m di acetato di magnesio; allestimento al congelatore di sezioni di μ 10-20; lavaggio ripetuto delle sezioni in acqua in modo da allontanare ogni traccia di formolo — specialmente quando si tratta di procedere ad alcune reazioni come per esempio quella all'argento ammoniacale.

In alcuni casi — ma ancora non ho potuto fissare le condizioni — le rispettive reazioni sono realizzabili anche su sezioni di pezzi inclusi in paraffina.

⁽¹⁾ C. CIACCIO, « Anat.-Anz. », XXIII; XXIV, 1903-1904.

⁽²⁾ GRYNFELT ED., « C. R. Ass. d. Anat. », Liège, 1903.

REAZIONI ISTOCHIMICHE.

Prima di passare in rassegna le varie reazioni eseguite faccio rilevare che la surrenale offre il vantaggio, rispetto ad altri organi a cellule cromaffini, che le reazioni cromatiche si possono seguire a vista e quindi è facile arrestarle al momento opportuno.

1° *Diazoreazione.* — La copulazione è stata eseguita coi sali di diazonio dell'acido solfanilico e della benzidina seguendo la tecnica abituale.

Questa reazione è negativa in ambiente acido; mentre in mezzo nettamente alcalino dopo pochi secondi la sostanza midollare appare nettamente colorata in arancio o aranciobruno, mentre la corticale assume una tinta gialletta appena apprezzabile; all'osservazione microscopica la reazione è localizzata alle granulazioni note del citoplasma.

2° *Reazione al nitrato d'argento ammoniacale.* — Eseguita secondo la tecnica di MASSON e di HAMPERL i risultati sono già nettamente positivi dopo 30-60 minuti, assumendo la midollare una tinta bruna che si va intensificando sino al nero-bruno.

Al microscopio la reazione è localizzata alle granulazioni delle cellule cromaffini ed alla guaina mielinica delle fibre nervose anche extra-midollari, nella quale però la tinta è solo brunastra.

3° *Reazione al bicromato.* — Eseguita sia con soluzioni concentrate, come è in uso nella tecnica istologica, sia con soluzioni molto diluite, 2-3 gocce di una soluzione al 5 % in cc. 10 di acqua distillata o di acido solfanilico a 0,25 %; le soluzioni diluite sono più adatte in quanto, dopo lavaggio delle sezioni in acqua, la reazione è nettamente limitata alla sostanza midollare, che dopo poche ore a temperatura ambiente presenta una tinta giallo-bruna evidentissima, che si intensifica successivamente e rispettivamente con l'aumento della temperatura; anche la presenza di acido solfanilico accelera la reazione.

Al microscopio netta localizzazione alle granulazioni delle cellule cromaffini che presentano una tinta giallo-bruna quasi eguale per intensità a quella determinata dalla fissazione diretta dell'organo in miscele di formolo-bicromato.

4° *Reazione al cloruro mercurico.* — Eseguita secondo il procedimento consigliato da Denigés per la ricerca del pirocatecolo e dell'adrenalina — 2 gocce di soluzione a 5 % di bicloruro mercurico in cc. 10 di soluzione a 40 % di acetato sodico.

Dopo qualche ora a temperatura ambiente o dopo pochi minuti a 50° la midollare assume una tinta giallo-bruna che si va intensificando; al microscopio netta localizzazione alle granulazioni delle cellule cromaffini.

5° *Reazioni ai sali di ferro.* — Si son seguiti due procedimenti:

a) con soluzioni diluitissime di cloruro ferrico in acqua leggermente acidulata con HCl, già dopo qualche minuto la sostanza midollare assume una netta tinta verde o verde-bluastro; all'osservazione microscopica delle sezioni mantenute in acqua leggermente acidulata, le granulazioni delle cellule cromaffini appaiono con una tinta verdastra o verde brunastra che successivamente passa al giallo-bruno; un trattamento successivo con acqua leggermente alcalinizzata determina un viraggio al bruno violaceo.

b) con soluzione 1 % di sale di Mohr si ottengono reperti analoghi.

6° *Reazione al molibdato di ammonio.* — Eseguita secondo QUASTEL — molibdato in soluzione acetica — la midollare dopo 15–30 minuti assume una tinta gialla poco intensa, ma evidente, che rimane costante; all'osservazione microscopica le granulazioni delle cellule cromaffini presentano una tinta giallo-brunastra.

7° *Azione del formolo.* — Il trattamento con formolo nei limiti di tempo e nelle condizioni avanti stabilite, determina una tinta leggermente gialletta delle granulazioni delle cellule cromaffini.

Prolungando l'azione del formolo la tinta si intensifica e la reazione è rispettivamente accelerata dalla luce e dalla temperatura; però le reazioni cromatiche e rispettivamente la riduzione del nitrato d'argento ammoniacale sono abbastanza evidenti anche dopo una settimana di soggiorno delle fette di organo in formolo.

* * *

Il complesso delle reazioni descritte solleva una serie di problemi, di ordine istochimico ed istofisiologico, già avanzati non solo in rapporto alle cellule della midolla surrenale, ma anche per altre specie di cellule cromaffini, problemi non ancora risolti, malgrado la notevole quantità di dati raccolti; i punti principali da definire in proposito sono: 1° azione del formolo; 2° natura delle sostanze elaborate; 3° localizzazione cellulare di tali sostanze; 4° differenza o meno tra i prodotti elaborati da vari tipi di cellule cromaffini.

Avendo in proposito stabilito un piano di ricerche, tuttora in corso, rimando per la discussione di questi problemi a note successive.

Zoologia. — *La specificità parassitaria dei Nictetibidi («Diptera Pupipara») indagata sperimentalmente* ⁽¹⁾. Nota di ALBERTO STEFANELLI, presentata ⁽²⁾ dall'Accademico FILIPPO SILVESTRI.

Mi sono occupato in questi ultimi anni (dal 1938) della ecologia di alcuni Ditteri Pupipari parassiti dei Chiroterri facendo periodiche osservazioni mensili in una antica cava di pozzolana, scavata in caverna, nei pressi di Monte Sacro in Roma. Questa cava è sede abituale di sei specie di Chiroterri infestati, oltre che da altri parassiti, da sette specie di Nictetibidi. Le osservazioni in natura, da me riferite in un lavoro in corso di stampa nella Rivista di Parassitologia, lasciavano chiaramente intravedere un netto comportamento differenziale della specie di Nictetibidi nei confronti delle diverse specie di Chiroterri. La questione della specificità dei Nictetibidi, da molti negata (SPEISER, 1901; FALCOZ, 1926; CORRADETTI, 1934; PAVAN, 1941 ed altri), supposta da alcuni (JEANNEL, 1926; SCHULZ, 1938, RUFFO, 1938), era ben lontana dall'essere risolta.

Per una rigorosa verifica delle osservazioni fatte in natura e per saggiare il grado della specificità messa in luce, in relazione alle affinità sistematiche degli ospiti, ho creduto opportuno passare ad una verifica sperimentale. Un primo gruppo di esperienze è già stato oggetto di una Nota in questi Rendiconti e da questo risultava la conferma sperimentale della specificità del *Celeripes biarticulata* per il genere *Rhinolophus*, del *Penicillidia dufouri* per il *Myotis myotis*. Inoltre risultava la preferenza del *Listropodia pedicularia* per il genere *Myotis* e del *Listropodia schmidli* per il *Miniopterus schreibersi*, ma queste ultime esperienze non erano conclusive per il loro numero troppo limitato.

Occorreva quindi sottoporre nuovamente all'esperimento queste forme e intraprendere nuove esperienze con le specie non ancora studiate (*Penicillidia conspicua*, *Listropodia blasi*, *Nycteribia verata*); ma, a prescindere da questa estensione delle ricerche, nuovi problemi interessanti erano sorti in relazione alle prime esperienze.

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata «Battista Grassi» della R. Università di Roma, diretto dal prof. G. Cotronei.

⁽²⁾ Nell'Adunanza del 21 marzo 1942-XX.

Risultava in primo luogo come il grado della specificità parassitaria fosse diverso per le diverse specie di Nictieribidi. Anche dalle osservazioni in Natura risultava come, mentre il *Celeripes* veniva trovato in modo esclusivo sui rappresentanti del genere *Rhinolophus* e il *Listropodia pedicularia* su quelli del genere *Myotis*, i *Penicillidia* venivano trovati sui due generi *Myotis* e *Miniopterus* (ma mai sui Rinolofidi), e il *Listropodia schmidli* ed il *Nycteribia vexata* oltre che sulla famiglia dei Vespertilionidi (comprendente anche i due generi *Myotis* e *Miniopterus*) anche sulla famiglia dei Rinolofidi, sebbene in numero estremamente scarso. A questo proposito ricordo come dalle mie osservazioni in Natura risulti che la possibilità materiale dei diversi Nictieribidi di raggiungere i vari Chiroteri della cava sia da considerarsi eguale per tutte le specie. Ciò tuttavia non si verifica, ma appare invece un comportamento nettamente differenziale.

Occorreva tuttavia una prova sperimentale di questo comportamento differenziale del grado di specificità parassitaria dei diversi Nictieribidi. Sperimentalmente si poteva controllare se vi fosse la possibilità per i vari Nictieribidi di una infestazione accidentale di forme che risultavano normalmente non infestate e se fosse possibile la sussistenza su questi ospiti. Inoltre era da vedersi se per quei Nictieribidi parassiti di un genere o una famiglia vi fossero delle preferenze tra le diverse forme di questi aggruppamenti zoologici. E infine era da considerarsi la condizione di Chiroteri diversi infestati da uno stesso Nictieribide come indice di una affinità sistematica di questi ospiti.

Le ricerche condotte con questi intendimenti non sono state estese a tutti i Nictieribidi presenti nella cava per la difficoltà di avere contemporaneamente molti parassiti ed ospiti ed ho dovuto limitarmi per ora solo ad alcune specie, ma tengo a rilevare che più di una completa conoscenza del comportamento di queste forme sia importante la nozione messa in luce di questo comportamento differenziale.

Le esperienze di cui è oggetto la presente nota riguardano il *Celeripes biarticulata*, il *Penicillidia dufouri*, il *Penicillidia conspicua* ed il *Listropodia schmidli*.

Celeripes biarticulata (HERMANN). Dalle mie precedenti osservazioni ed esperimenti è risultata evidente la specificità di questa specie per i Rinolofidi. In natura questa specie è risultata presente esclusivamente sui Chiroteri di questo genere. Ma vi sono preferenze nell'ambito del genere? Le percentuali di infestazioni ricavate dalle osservazioni nella cava non risultano molto diverse: su 152 individui di *Rhinolophus ferrum-equinum* esaminati 99 risultarono infestati con 131 *Celeripes* (88 % circa), su 310 *R. euryale* esaminati 221 infestati con 243 *Celeripes* (78 % circa), su 33 *R. hipposideros* 13 infestati con 21 *Celeripes* (67 % circa). Ma tali dati potevano non essere dimostrativi per essere diverso il numero dei

Chiroterri esaminati per ogni specie e raccolti in tempi differenti dell'anno ed in colonie diverse che potevano presentare condizioni di infestazione differenti.

Il 4 marzo 1942 (ore 9,20) misi 10 *Celeripes* in una scatoletta di cartone che posi aperta in una scatola di cartone grande ($50 \times 20 \times 25$) contenente un *R. ferr. eq.*, un *R. eur.*, un *R. hipp.* ed un *Miniopterus schr.* Ad ogni esame dei Chiroterri i parassiti venivano riposti nella scatoletta. Ecco i risultati dell'esperienza:

		su <i>R. f. eq.</i>	su <i>R. eur.</i>	su <i>R. hipp.</i>	su <i>Miniopt.</i>	
4.3.'42	ore 9,30	3	4	3	0	
	» 11,20	5	2	3	0	
	» 15,50	2	2	6	0	
5.3.'42	» 9,40	1	5	4	0	
	» 11,10	3	3	4	0	
	» 16,15	6	3	0	0	1 morto
	» 18,50	2	3	4	0	
6.3.'42	» 9,35	3	0	5	0	1 morto
	» 15	4	2	2	0	
	» 18,20	2	5	1	0	

Da questa esperienza è desumibile come, pur essendo il *Celeripes* strettamente specifico del genere *Rhinolophus*, sia parassita indifferente per le tre specie del genere da me considerate. Questo comportamento del parassita dimostra la strettissima parentela dei Rinolofidi che costituiscono una famiglia ben delimitata di notevole distanza zoologica rispetto agli altri Chiroterri studiati.

Altre esperienze fatte (21 novembre 1941), di cui non riporto per brevità i protocolli, infestando con *Celeripes* il *Myotis capaccini* dimostrano come i parassiti abbandonino il *Myotis* per raggiungere un rinolofo rinchiuso nella stessa scatola (per 10 volte in una esperienza durata due giorni). Ma è risultato inoltre (esperienze del 21 novembre 1941), sia infestando un *Myotis capaccini* come un *Miniopterus schr.*, come mettendo questi chiroterri vivi infestati in presenza di un cadavere di Rinolofo (*R. euryale*) i parassiti abbandonino la forma non specifica viva per andare sul cadavere della forma specifica e per morire, dopo un massimo di due giorni, senza tornare sul Chiroterro non specifico vivo. Non solo, ma tale attrazione è esercitata anche da pezzi di pelliccia o dalla sola testa del Rinolofo. Molto spesso in queste esperienze sui cadaveri i parassiti abbandonavano l'ospite morto per una breve corsa sulle pareti della scatola ma poi si rinsediavano sul cadavere trascurando il chiroterro vivo non specifico.

Queste esperienze dimostrano come nel dirigere i Nietteribidi verso l'ospite specifico non intervenga solo il fattore anemotattico invocato

da SCHULZ (1938). Tale fattore, che dai suoi esperimenti non è da porsi in dubbio, è tuttavia aspecifico. Anche l'aria di una soffieria attira infatti nei suoi esperimenti questi insetti. Ma nella scelta dell'ospite i Nictieribidi sono attratti da altri fattori, anche se dalle esperienze di LIEBERMANN (1926) è da limitarsi l'olfatto per il suo scarso sviluppo.

Infestando Chiroterri non specifici tenuti isolati, quali il *M. Capacini* e il *Miniopterus*, i *Celeripes* vi restavano sopra vagando però a fior di pelo e abbandonando spesso l'ospite per una breve corsa per la scatola. Spesso tentavano anche di affondarsi nel pelame, ma con evidente riluttanza. Questo fatto poteva far pensare ad una possibilità, in condizione obbligata, di nutrirsi e sopravvivere anche su forme non specifiche. Allo scopo di risolvere questo problema ho mantenuti i *Celeripes* su *M. capacini* e su *Miniopterus* per un tempo più o meno lungo per constatare la sopravvivenza o meno. Altri parassiti vennero tenuti in un barattolino di vetro per controllare la resistenza al digiuno. È risultato che i parassiti tenuti a digiuno nei barattolini vivevano al massimo due giorni mentre quelli su questi Chiroterri riuscivano a sopravvivere sino a quattro giorni, ma dopo tale periodo massimo soccombevano, assumendo spesso un color rossiccio diffuso, mentre l'ospite era ancora vivo. Questo prolungamento della vita rispetto ai controlli nei barattoli, può essere dovuto alle migliori condizioni di temperatura e umidità fornite dal pipistrello e, forse, a qualche assaggio del sangue dell'ospite. Ma la morte che interviene in seguito dimostra che se anche tale nutrizione è possibile essa è o insufficiente o dannosa. La colorazione rossiccia assunta dai parassiti fa pensare in quest'ultimo senso. Ma comunque vadano i fatti rimane dimostrato che i *Celeripes* non possono sopravvivere né sul *Myotis* né sul *Miniopterus* limitando le possibilità di infestazione al genere *Rhinolophus*.

Penicillidia dufouri (WESTWOOD). Anche questo Nictieribide è già stato da me precedentemente sottoposto all'esperienza rilevando la specificità parassitaria per il *Myotis myotis*. Tuttavia dalle osservazioni nella cava appariva quale ospite occasionale il *Miniopterus schr.* Con nuove esperienze (fatte il 22 novembre 1941) ho potuto confermare come tale Nictieribide abbandoni un Rinolofo infestato per raggiungere un *Miniopterus* rinchiuso nella stessa scatola. Isolato un *Miniopterus* (19 dicembre 1941) infestato da due *P. dufouri* esso è morto dopo cinque giorni e i parassiti erano ancora vivi. Anche questi insetti tenuti a digiuno in un barattolino non vivono più di due giorni. Altre esperienze non riuscirono dimostrative per la morte troppo rapida dell'ospite (dopo 3-4 giorni). Tenendo a digiuno un *Penicillidia* per due giorni e ponendola poi su un Rinolofo ne fu prolungata la vita di due giorni mentre il Chiroterro era ancora in vita. Questa esperienza già di per se dimostrativa della impossibilità di sussistenza del *Penicillidia* sul Rinolofo fu confermata infestando un *R. euryale* con immagini appena sfarfallate in laboratorio.

Queste immagini alla nascita sono bianche e tenute in un barattolino vivono sino a nove giorni a digiuno senza pigmentarsi. Solo colla prima assunzione di sangue, come hanno visto SCHULZ e PAVAN, si produce la pigmentazione scura normale. Questa condizione mi riusciva così utile come indice per sapere se l'insetto si era nutrito o no. L'esperienza dimostrò che dopo quattro giorni il parassita era ancora bianco. L'esperienza non fu condotta oltre per la morte dell'ospite, ma dimostrava come il *P. dufouri* non si nutrisse sul Rinolofo.

Penicillidia conspicua (SPEISER). Questa specie è risultata molto rara tra i Chirotteri della cava: due catture su *Myotis myotis* ed una su *M. capaccini*. Nel mese di novembre dello scorso anno trovai ancora una *Penicillidia conspicua* su *M. capaccini* ed una su un *Miniopterus*. Le esperienze fatte infestando un *R. euryale* in presenza di un *Miniopterus* mi dimostrarono come quest'ultima specie sia preferita avendo potuto contare in quattro giorni 14 passaggi. Anche col *Myotis capaccini* ottenni lo stesso risultato. Queste esperienze dimostrano così che oltre ai *Myotis* anche il *Miniopterus* è annoverabile tra gli ospiti, per lo meno occasionali, di questo Nicteribide.

Anche con questa specie tentai di constatare se era possibile la sussistenza su un Rinolofo ed un'esperienza riuscì interessante per la lunga sopravvivenza dell'ospite. Un *R. euryale* infestato il 4 dicembre 1941 con un *P. conspicua* visse sino al 19 mentre il *Penicillidia* morì il 16. Tale fatto dimostra che il parassita si deve essere nutrito, per lo meno limitatamente, per sopravvivere 12 giorni. Ma con tale nutrizione, o insufficiente o dannosa, il parassita è infine deceduto.

I parassiti del genere *Penicillidia* risultano pertanto meno strettamente specifici del *Celeripes*, sia per infestare anche naturalmente altri Chirotteri (*Miniopterus*) oltre quelli del genere *Myotis* (sempre però dalle mie esperienze nell'ambito della famiglia dei Vespertilionidi), sia per nutrirsi, sebbene limitatamente, anche sui Rinolofidi. Il parassitismo dei *Penicillidia* rivela delle notevoli affinità zoologiche tra i *Myotis* della subfamiglia *Vespertilioninae*, secondo MILLER (1907), e il *Miniopterus* della subfamiglia dei *Miniopterinae*.

Genere *Listropodia*. Le osservazioni in Natura mi avevano fatto notare, oltre ad una prevalenza rimarchevole del *Listropodia schmidli* sul *Miniopterus*, anche alcuni individui di questa specie sul *Myotis* ed anche sui Rinolofidi. Più limitato è risultato il parassitismo del *Listropodia pedicularia* esclusivo al genere *Myotis*. Quattro *Listropodia blasi*, che alcuni autori considerano come « forma » del *L. Pedicularia*, furono tuttavia trovati sul *R. euryale*.

La specificità parassitaria di questi Nicteribidi risultava così meno limitata che per gli altri Nicteribidi. Anche secondo le osservazioni di SCHULZ (1938) il *Listropodia pedicularia* sarebbe specifico del genere *Myotis*.

Listropodia schmidli (SCHINER). Dalle esperienze da me fatte tenendo isolati dei *R. euryale* infestati con numerosi *L. schmidli* è risultato come essi sopravvivano, alla morte dell'ospite, per due giorni sul cadavere. Questa specie presenta pertanto una notevole resistenza al digiuno e ciò rende più difficili le esperienze. Tuttavia altre esperienze (fatte il 4 marzo 1942) infestando un *R. euryale*, ma tenendo nella scatola l'ospite donatore (*M. capaccini*, *Miniopterus*), hanno rivelato come solo alcuni parassiti ritornino sull'ospite primitivo mentre altri rimangano sul Rinolofo anche dopo la sua morte. Questi Nictieribidi, dotati di movimenti molto più lenti delle altre forme studiate, rimangono profondamente infossati nel pelame e raramente si portano in superficie e ancor più raramente abbandonano il Chiroterro, sia esso o non sia della specie preferita. Questo parassita, dalle esperienze e dalle osservazioni, sembra pertanto meno legato all'ospite specifico e anche i Rinolofidi possono essere annoverati tra gli ospiti occasionali.

Listropodia pedicularia (LATREILLE). Le esperienze fatte con questa specie fanno pensare ad un comportamento analogo a quello della forma congenere sebbene esse non si possano considerare ancora dimostrative per essere in tutti i casi il Rinolofo infestato morto troppo presto. Altre esperienze si rendono necessarie per questa specie.

* * *

Dall'esame di queste esperienze di infestazione sperimentale risultano stabilite le seguenti condizioni del parassitismo dei Nictieribidi:

1° Ogni specie di Nictieribide presenta un ospite specifico abituale; per alcuni a questo si aggiungono degli ospiti occasionali di stretta parentela sistematica. La parentela zoologica di tali ospiti occasionali varia per le diverse specie di Nictieribidi nell'ambito del genere, della famiglia o di più subfamiglie o famiglie di Chiroterri.

2° I Nictieribidi studiati si possono pertanto così suddividere in rapporto al loro grado di specificità parassitaria, desunta dagli ospiti occasionali messi in luce con le osservazioni in Natura e con le esperienze:

a) riferentesi a un genere: *Celeripes biarticulata* per il genere *Rhinolophus*;

b) riferentesi a più generi di una famiglia: *Penicillidia dufouri* e *P. conspicua* per i generi *Myotis* e *Miniopterus* della famiglia *Vespertilionidae*;

c) riferentesi a più famiglie: *Listropodia schmidli* per le famiglie *Vespertilionidae* e *Rhinolophidae*.

Rimangono ancora poco sicuri i dati sul *Listropodia pediculari*, *L. blasi* e *Nycteribia varata* su cui mi riprometto ulteriori indagini.

Zoologia. — *Il parassitismo della « Nycteribosca africana »* WALK (fam. « Streblidae, Diptera Pupipara ») ⁽¹⁾. Nota di ALBERTO STEFANELLI, presentata ⁽²⁾ dall'Accademico FILIPPO SILVESTRI.

Nell'ottobre 1939 mi capitò di trovare su un *Rhinolophus euryale*, catturato in una cava nei pressi di Monte Sacro in Roma, un ♂ di *Nycteribosca africana* (WALK, 1849) ⁽³⁾. Tale cattura e le successive da me fatte nello stesso luogo segnalano per la prima volta la presenza di questo dittero parassita nella penisola italiana.

La distribuzione geografica di questa specie risulta molto vasta nel continente africano andando dall'Algeria, Tunisia, Egitto, alla Somalia e raggiungendo al sud Pretoria. Nella regione mediterranea, oltre ai luoghi indicati, è stata segnalata a Cipro e in Palestina. In Europa la specie risulta molto rara: alcuni esemplari in Portogallo, un esemplare su un *Rhinolophus ferrum-equinum* nel sud della Francia (FALCOZ, 1926) e altri pochi esemplari sono stati studiati da SPEISER ⁽⁴⁾ catturati in Sardegna.

Quali ospiti della *Nycteribosca africana* risultano dalla letteratura i *Rhinolophus blasi* (BECHT.), il *R. euryale* (BLAS.), il *R. geoffroi* (SMITH), il *R. capensis* (LICHT), l'*Asellia tridens* (GEOFFROY), il *Minipterus schreibersi* (KÜHL.), il *Rhinopoma microphyllum* (GEOFFR.) e il *Vespertilio murinus* (LINN.).

Dalla prima cattura fatta potei constatare come questo insetto, pur avendo le ali arrotolate longitudinalmente e alloggiate in una de-

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata « Battista Grassi » della R. Università di Roma, diretto dal prof. G. Cotronei.

⁽²⁾ Nell'Adunanza del 21 marzo 1942-XX.

⁽³⁾ Rimando al mio lavoro in corso per la sistematica di questo insetto; mi limito qui ad indicare la sinonimia: *Strebla africana* (WALKER, 1849), *Raymondia kollari* (FRAUENFELD, 1855; SCHINER, 1868), *Strebla kollari* (KOLENATI, 1856), *Brachitarsina kollari* (KOLENATI, 1863), *Nycteribosca kollari* (SPEISER, 1900), *Nycteribosca africana* (WALKER, 1849, JOBLING, 1934).

⁽⁴⁾ SPEISER P., 1901. Ueber die Strebliden. Fledermausparasiten aus der Gruppe der Pupiparen Diptera. « Arch. f. Naturg. », 67. 11-78.

pressione dorsale dell'addome, poteva distenderle e volare benissimo, contrariamente alla affermazione di FALCOZ (1926) che queste ali sono «...normalement développées mais non fonctionnelles...». Nessuno ha successivamente contraddetta tale affermazione. Basandomi su questo fatto, catturai molti altri Chiroterteri mediante sacchetti di carta forte che venivano volta a volta montati su un anello di ferro, fisso all'estremo di una canna e che si potevano immediatamente chiudere mediante una funicella appena l'animale vi era caduto dentro. Potei così catturare, durante i mesi invernali degli anni 1940, 1941, 1942, sessantanove *Nycteribosca* esaminando più di mille Chiroterteri.

Da queste osservazioni in Natura risulta come questo Streblide si trovi quasi esclusivamente sul *Rhinolophus euryale*; solo eccezionalmente ho trovato uno di questi parassiti su un ferro di cavallo maggiore ed uno su un *Miniopterus*. Il valore di tale constatazione sta nel fatto che nella cava coabitano altre specie di chiroterteri oltre al *R. euryale*, che sverna in una colonia di oltre 400 individui, quali il *R. ferrum-equinum* (normalmente individui isolati), il *R. hipposideros* (individui isolati), il *Myotis myotis* (gruppi di due-tre), il *Myotis capaccini* (isolati o in gruppi di due-tre) e il *Miniopterus schreibersi* (isolati o in piccoli gruppi).

Le abitudini di vita di questi Chiroterteri nella cava sono state da me metodicamente osservate durante gli anni dal 1938 al marzo 1942, con visite mensili e bimensili alla cava. Rimando per i dati al riguardo il lettore al mio lavoro sulla « Riv. di Parass. » (1). In proposito dei Nictetibidi conclusi che per tutte le specie presenti nella cava le possibilità di raggiungere i Chiroterteri di qualunque specie ivi presenti sarebbe eguale (il comportamento è risultato invece nettamente differenziale), ma per quanto riguarda il *Nycteribosca* tali possibilità sono da considerarsi ancora più estese per essere questo insetto volatore.

Una particolare osservazione fatta nel mese di febbraio del 1942 mi ha spinto alle presenti indagini di infestazione sperimentale. In una concamerazione della cava (concamerazione D della pianta pubblicata nel lavoro citato) ho trovato due colonie di Rinolofidi a circa sette metri di distanza, una fornata da un paio di centinaia di *R. ferrum-equinum*, l'altra da circa 400 *R. euryale*. Esaminati un centinaio di esemplari della seconda colonia ho trovato 15 *R. euryale* infestati con un totale di 22 *Nycteribosca* mentre nessuno dei ferri di cavallo maggiore della colonia contigua era infestato da questo parassita. Da questi dati di fatto, e basandomi su quanto avevo messo in luce circa il parassitismo dei Nictetibidi, era deducibile una specificità parassitaria per la *Nycteribosca africana* nei confronti del *R. euryale*. Dalle mie indagini sui Nictetibidi è risultato che i

(1) Affinità sistematiche dei Chiroterteri e parassitismo dei *Nycteribidae*, *Diptera Pupipara*. Parte I. Gli Ospiti. 1942, vol. VI, 25-42.

Celeripes sono parassiti specifici dei Rinolofidi ma, mentre questi Puppai sono indifferenti per le diverse specie del genere, il *Nycteribosca* risulterebbe più strettamente specifico della specie *euryle*.

I dati della letteratura ci riferiscono quali ospiti, oltre ai Rinolofidi, tra cui il *R. euryle*, anche altri Chiroteridi di generi diversi, ma come ho messo in guardia nei miei lavori sui Nycteribidi, non è da fare molto assegnamento su questi dati dedotti spesso da collezioni di musei il cui materiale può essere stato raccolto senza opportune cautele atte ad impedire il passaggio dei parassiti da una forma su un'altra contemporanea-mente raccolta.

Occorreva pertanto una verifica sperimentale. Col materiale del mese di dicembre 1941 e dei mesi di gennaio febbraio e marzo del 1942 feci alcune esperienze allo scopo di saggiare sperimentalmente tale specificità determinando l'ospite abituale e gli eventuali ospiti occasionali. Potei disporre in questi periodi di esemplari di *R. euryle*, *R. ferrum equinum*, *R. hipposideros*, *M. capaccini*, e *Miniopterus schr.*

Il 19 dicembre 1941 tentai di infestare sperimentalmente un *Myotis capaccini* che ponevo poi in una stessa scatola con il *Rhinolophus euryle* da cui era stato tolto il *Nycteribosca*. Molto spesso mi riuscì difficile far rimanere l'insetto sul *Myotis* perchè volava via subito o quasi subito per posarsi sulle pareti della scatola. Ecco il protocollo riassuntivo delle esperienze:

19.12.'41	ore 11	il <i>N.</i> da <i>R. euryle</i> su <i>M. cap.</i>
	» 11,10	il <i>N.</i> è tornato sul <i>R.</i> Rimesso sul <i>M.</i>
	» 11,30	il <i>N.</i> è tornato sul <i>R.</i> Rimesso sul <i>M.</i>
	» 11,40	il <i>N.</i> vola via quasi subito posandosi sulle pareti della scatola.
	» 15,35	il <i>N.</i> è sul <i>R.</i> Rimesso sul <i>M.</i> vola sulle pareti della scatola.
	» 15,40	il <i>N.</i> è sul <i>R.</i> Rimesso sul <i>M.</i>
	» 15,43	il <i>N.</i> è sul <i>R.</i> Rimesso sul <i>M.</i>
	» 18,20	il <i>N.</i> è sul <i>R.</i> Rimesso sul <i>M.</i> vola sulle pareti della scatola.
20.12.'41	» 9.35	il <i>N.</i> è sul <i>R.</i>

L'esperienza è interrotta per la morte dell'insetto, probabilmente danneggiato col ripetuto afferrarlo con le pinzette.

L'esperienza dimostra chiaramente una netta repulsione del *Nycteribosca* per il *Myotis capaccini* ed una attrazione da parte del *R. euryle*.

L'esperienza venne ripetuta il 3 marzo 1942 con tre *Nycteribosche*, mettendo gli insetti in un barattolino aperto, nel fondo di una scatola grande in cui avevo posti un *R. euryle* ed un *M. capaccini*; in tre giorni

feci 27 visite rimettendo ogni volta gli insetti nel barattolino; trovai sempre i parassiti sull'euryale.

Il 12 gennaio 1942 potei catturare altri *R. euryale* e due esemplari di *Miniopterus schreibersi* e con questi animali feci altre due esperienze di infestazione sperimentale del *Miniopterus* tenendo presente nella scatola un *R. euryale*. Per brevità non riporto il protocollo: è risultata una manifesta preferenza per il *R. euryale* passando due *Nycteribosca* per sedici volte dal *Miniopterus* sul *R. euryale*. In due soli casi trovai un parassita sul *Miniopterus*, ma ciò per aver fatto l'osservazione solo dopo circa 10 minuti; i parassiti lasciati su questa forma sono successivamente passati sul Rinolofo. Pertanto, pur lasciando intravedere una repulsione meno accentuata per il *Miniopterus* che per il *M. capaccini*, queste esperienze dimostrano la assoluta preferenza per il *R. euryale* rispetto al *Miniopterus*.

Un'altra serie di esperienze potei compiere nel mese di febbraio del corrente anno per il gran numero di *Nycteribosche* trovate e per aver catturato contemporaneamente dei *Rhinolophus ferrum equinum*, dei *R. euryale* e dei *R. hipposideros* oltre a dei *Myotis capaccini*. Come feci per il *Celeripes biarticulata* per vedere se vi fossero preferenze nell'ambito del genere *Rhinolophus*, così feci per il *Nycteribosca*, dato che le osservazioni già fatte da me in natura lasciavano presumere per questa forma una specificità più ristretta.

Rinchiusi il 10 febbraio 1942 alle ore 15,20 in una scatola (20 × 20 × 40) un *R. euryale*, un *R. hipposideros*, un *R. ferrum-equinum* ed un *M. capaccini* nel fondo della quale avevo posta una scatoletta aperta contenente 10 *Nycteribosca*. Ecco il protocollo riassuntivo della esperienza; ad ogni osservazione gli insetti venivano tolti dagli ospiti e rimessi nello scatolino.

			<i>R. eur.</i>	<i>R. hipp.</i>	<i>R. f. eq.</i>	<i>M. cap.</i>	
Giorno	10.2.'42	ore 18,30	9	1	0	0	
	11.2.'42	» 8,30	10	0	0	0	
		» 9,40	9	1	0	0	
		» 10,50	10	0	0	0	
		» 15,30	8	0	0	0	2 morti
		» 18,20	8	0	0	0	
		» 19,40	7	0	1	0	
	12.2.'42	» 9,10	8	0	0	0	
		» 11,20	8	0	0	0	
		» 15,30	7	0	0	0	1 morto
		» 18,35	6	1	0	0	
	13.2.'42	» 9,30	7	0	0	0	
		» 15,10	5	0	0	0	2 morti
		» 19,40	5	0	0	0	

L'esperienza venne interrotta per la morte dei Rinolofidi; alcuni insetti morirono, probabilmente danneggiati dal continuo uso delle pinzette per toglierli dagli ospiti e rimetterli nella scatola. L'esperienza dimostra chiaramente la preferenza rimarchevolissima per il *R. euryale* rispetto non solo al *Myotis* ma anche agli altri Rinolofi. Le presenze segnalate nel protocollo riportato su *R. ferrum-equinum* e *R. hipposideros* furono transitorie; questi insetti lasciati su queste forme raggiunsero successivamente il *R. euryale*.

Il 5 marzo 1942 l'esperienza venne ripetuta con le stesse specie di chiroterteri e sei *Nycteribosca* e confermò pienamente la precedente.

Un altro gruppo di esperienze fu rivolto ad indagare se era possibile la sopravvivenza di questi parassiti su quelle specie che dalle esperienze fatte non risultavano preferiti e inoltre se il cadavere della forma specifica avesse una azione attrattiva, come è risultato per alcuni dei *Nycteribidi* da me presi in esame.

Il 5 marzo 1942 posi 5 *Nycteribosca* in una scatola con un *Myotis capaccini* e visitai quindi a varie riprese gli animali. Potei constatare come gli insetti abbandonassero quasi subito il pipistrello per vagare sulle pareti della scatola. Saltuariamente qualcuno andava anche su di esso, ma per brevi periodi. Nella terza giornata di esperienza due *Nycteribosca* erano morti nel fondo della scatola e gli altri tre dimostravano una assai diminuita vivacità. Nella quarta giornata altri due morivano nella mattinata e l'ultimo moriva nel pomeriggio mentre il pipistrello era tuttora vivo. Alcuni *Nycteribosca* tenuti per controllo in un barattolino di vetro vissero, così a digiuno e lontano da ogni chirotertero, al massimo due giorni. L'esperienza fatta dimostra invece un prolungamento della sopravvivenza di due giorni. Non mi è stato però ancora possibile stabilire se tale prolungata sopravvivenza fosse dovuta a varie condizioni più propizie, quali la temperatura e l'umidità, o se l'insetto abbia potuto, per lo meno limitatamente, nutrirsi e se tale nutrizione su un ospite non specifico fosse dannosa. Il risultato rimane tuttavia chiaro: il *Nycteribosca* non può sopravvivere sul *Myotis capaccini*. Durante l'esperienza, al terzo giorno, volli provare se un cadavere dell'ospite specifico esercitasse una azione attrattiva su questi parassiti come era risultato per alcuni *Nycteribidi* sottoposti all'esperimento. Posi pertanto nella scatola un *R. euryale* morto da circa 12 ore; qualche *Nycteribosca* lo visitò, ma fuggacemente, senza insediarsi stabilmente come nel caso dei *Celeripes*.

Nello stesso periodo condussi una esperienza simile con un *Miniopterus schreibersi* e 4 *Nycteribosca*. Questa esperienza risultava particolarmente interessante avendo io una volta trovato nella cava un *Nycteribosca* su questa specie e per essere questa considerata da vari autori (FALCOZ, JOBLING) tra gli ospiti del *Nycteribosca*. Dei quattro parassiti tre morirono alla quarta giornata di esperienza, ma alla quinta morì il

pipistrello mentre un parassita era ancora in vita. Questa esperienza sebbene non sia per tale fatto conclusiva, lascia intravedere una possibilità limitata di esistenza della *Nycteribosca* su questo chiroterro che non è pertanto da considerarsi un ospite abituale.

Esperienze simili condotte isolando dei *Nycteribosca* su *R. ferrum equinum* e su *R. hipposideros*, fatte nello stesso periodo di tempo, dimostrano una possibilità di esistenza, per lo meno nel periodo di 4-5 giorni quale è la durata massima di vita di questi pipistrelli in schiavitù. Ma è risultato che, mettendo dopo quattro giorni nella stessa scatola dove erano dei *R. hipposideros* e *R. ferrum equinum* infestati sperimentalmente un *R. euryale*, tutti i *Nycteribosca* passavano su questa specie.

Dall'insieme di queste esperienze risulta pertanto come l'ospite specifico abituale sia da considerarsi per Roma, date le specie di Chiroterri ivi esistenti, il *Rhinolophus euryale*. La specificità parassitaria di questo Streblide risulta più marcata che per i *Celeripes* (*Nycteribiidae*), parassiti dei Rinolofidi, ma che non dimostrano preferenze tra le specie di questo genere. Il *Nycteribosca africana* dimostra infatti, tra i Rinolofidi, una nettissima preferenza per il *R. euryale*; gli altri Rinolofi possono essere considerati ospiti occasionali.

Un'altra esperienza fatta dimostra, oltre la possibilità di volo di questi insetti, come la forma specifica venga trovata e raggiunta anche a notevole distanza rilevando una finissima sensibilità, di qualunque natura essa sia. Infatti, liberato in una grande sala un *R. euryale* e aperta in un angolo di questa una scatola con sei *Nycteribosca*, nello spazio successivo alle 10 ore e precedente alle 24 ore dall'inizio dell'esperienza, due insetti raggiunsero l'ospite.

Matematica (Analisi). — *Complementi alla valutazione asintotica delle funzioni di STURM-LIOUVILLE.* Nota ⁽¹⁾ di DOMENICO CALIGO, presentata ⁽²⁾ dall'Accademico FRANCESCO SEVERI.

1. — *a)* Se, per $a \leq z \leq b$, $A(z)$, $B_1(z)$, $\mathfrak{P}'(z)$ sono funzioni continue di z , se esistono e sono continue le derivate $\mathfrak{P}''(z)$, $A''(z)$ ed inoltre sono $\mathfrak{P}(z) > 0$, $A(z) > 0$, h_1 , H_1 costanti, il sistema di STURM-LIOUVILLE

$$[1] \quad \frac{d}{dz} \left[\mathfrak{P} \frac{dV}{dz} \right] + [\mu A(z) - B_1(z)] V = 0,$$

$$[2] \quad V'(a) - h_1 V(a) = 0, \quad V'(b) + H_1 V(b) = 0,$$

si può ⁽³⁾ — con opportuni cambiamenti della variabile indipendente, della funzione incognita e del parametro — trasformare in modo che l'equazione [1] divenga

$$[3] \quad \frac{d^2 U(x)}{dx^2} + (\lambda^2 - B(x)) U(x) = 0,$$

con le nuove condizioni ai limiti — corrispondenti alle [2] — assegnate nei punti 0 e π

$$[4] \quad U'(0) - hU(0) = 0, \quad U'(\pi) + HU(\pi) = 0.$$

Ci occuperemo del problema: *dato il sistema di STURM-LIOUVILLE [3], [4] con $B(x)$ funzione continua in $(0, \pi)$, h, H costanti reali, non necessariamente positive, determinare l'espressione asintotica degli autovalori λ_n e delle corrispondenti autofunzioni $U_n(x)$.*

⁽¹⁾ L'argomento di questa ricerca è stato indicato dal prof. G. SANSONE nel lavoro di Seminario presso il R. Istituto Nazionale di Alta Matematica.

⁽²⁾ Nell'Adunanza del 10 aprile 1942-XX.

⁽³⁾ (Cfr. G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*. (Bologna, 1941), p. I, cap. IV, §§ 6-7.

b) Poichè intendiamo escludere le soluzioni dalla [3] identicamente nulle, possiamo supporre - senza perdere in generalità - che sia

$$[5] \quad U(0) = 1;$$

scritta allora la [3] nella forma

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \lambda^2 U = B(x) U$$

una sua soluzione qualsiasi $U(x)$, soddisfacente alla prima delle [4] ed alla [5], verifica - come è noto ⁽⁴⁾ - la (equazione integrale)

$$[6] \quad U(x) = \cos \lambda x + \frac{h}{\lambda} \sin \lambda x + \frac{1}{\lambda} \int_0^x B(t) U(t) \sin \lambda(x-t) dt.$$

Per determinare il parametro λ , in modo che la corrispondente soluzione $U(x, \lambda)$ della [6] soddisfi anche la seconda delle [4], occorre studiare l'equazione

$$[7] \quad \operatorname{tg} \lambda \pi = \frac{P_1(\lambda)}{\lambda - P_2(\lambda)},$$

ove

$$[8] \quad \begin{cases} P_1(\lambda) = h + H + \int_0^\pi B(t) U(t) \left[\cos \lambda t - \frac{H}{\lambda} \sin \lambda t \right] dt \\ P_2(\lambda) = \frac{hH}{\lambda} + \int_0^\pi B(t) U(t) \left[\sin \lambda t + \frac{H}{\lambda} \cos \lambda t \right] dt. \end{cases}$$

c) Le radici dell'equazione [7] sono state discusse da J. LIOUVILLE ⁽⁵⁾; successivamente E. W. HOBSON ⁽⁶⁾ ha ottenuto una espressione alquanto più esatta per queste radici nell'ipotesi che $B(t)$ sia continua e a variazione limitata in $(0, \pi)$.

⁽⁴⁾ Cfr. G. SANSONE, op. cit., in ⁽³⁾, pag. 225.

⁽⁵⁾ J. LIOUVILLE, *Sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre contenant un paramètre variable*. « Journ. de Math. pur. et appl. », 2 (1837), pagg. 16-35.

⁽⁶⁾ E. W. HOBSON, *On a general convergence theorem and the theory of the representation of a function by series of normal functions*. « Proc. of the London Math. Soc. » (2), 6 (1908) (pagg. 349-395), pp. 374-379. (Cfr. pure G. SANSONE, op. cit. in ⁽³⁾, p. I, pagg. 223-229).

Questi autori hanno provato che, fissato $\lambda_0 > 0$, esiste una costante C tale che

$$[9] \quad |U(x, \lambda)| \leq C, \quad |P_1(\lambda)| \leq C, \quad |P_2(\lambda)| \leq C, \quad (0 \leq x \leq \pi, \quad \lambda \geq \lambda_0 > 0).$$

Se $\alpha(x, \lambda)$ indica una funzione di x e λ che per $0 \leq x \leq \pi, \lambda \geq \lambda_0$, sia limitata

$$|\alpha(x, \lambda)| \leq L, \quad (L, \text{costante assoluta})$$

ed $\alpha(\lambda) [\alpha(x)]$ una funzione di λ [x] che per $\lambda \geq \lambda_0$ [$0 \leq x \leq \pi$] si mantiene limitata, tenendo presenti le [9], alla [6] possiamo dare la forma

$$[10] \quad U(x) = \cos \lambda x + \frac{\alpha(x, \lambda)}{\lambda}.$$

Sostituendo questa espressione nel secondo membro della [6] si ottiene

$$[11] \quad U(x) = \cos \lambda x \left[1 - \frac{1}{\lambda} \int_0^x B(t) \sin \lambda t \left\{ \cos \lambda t + \frac{\alpha(t, \lambda)}{\lambda} \right\} dt \right] + \\ + \frac{\sin \lambda x}{\lambda} \left[h + \int_0^x B(t) \cos \lambda t \left\{ \cos \lambda t + \frac{\alpha(t, \lambda)}{\lambda} \right\} dt \right].$$

2. - a) Studiamo in questo numero il sistema [3], [4] nell'ipotesi di $B(t)$ continua in $(0, \pi)$.

Ricordiamo che « se a e b sono due numeri quali si vogliano contenuti in $(0, \pi)$, qualunque sia il numero reale μ si ha $(0 \leq a < b \leq \pi)$

$$\lim_{\mu \rightarrow +\infty} \int_a^b B(t) \cos \mu t dt = 0, \quad \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \int_a^b B(t) \sin \mu t dt = 0$$

e la tendenza al limite zero è *uniforme* rispetto agli estremi a e b , nel senso che, fissato un numero $\varepsilon > 0$ arbitrario, si può scegliere un numero K , indipendente da a e b , tale che si abbia, qualunque sia $\mu > K$,

$$\left| \int_a^b B(t) \cos \mu t dt \right| < \varepsilon, \quad \left| \int_a^b B(t) \sin \mu t dt \right| < \varepsilon \quad (?),$$

(?) Cfr. H. LEBESGUE, *Leçons sur les séries trigonométriques*. (Paris, 1906), pag. 61. Per la dimostrazione, che ci è servita di guida anche nello stabilire le (23₁) e (23₂), cfr. pure G. SANSONE, *Sviluppi in serie di funzioni ortogonali*. (Bologna, 1935), pagg. 55-57.

e assumendo quindi come estremi 0 ed x e $\mu = 2\lambda$ potremo in conseguenza porre

$$[12] \quad \int_0^x B(t) \cos 2\lambda t \, dt = o(\lambda) \quad , \quad \int_0^x B(t) \sin 2\lambda t \, dt = o(\lambda) ,$$

dove $o(\lambda)$ indica un'espressione che diventa infinitesima quando $\lambda \rightarrow +\infty$, uniformemente rispetto ad x . La [11] dà allora come espressione asintotica delle autofunzioni

$$[13] \quad U(x) = \cos \lambda x \left[1 - \frac{o(\lambda)}{\lambda} \right] + \frac{\sin \lambda x}{\lambda} \left[h + \frac{1}{2} \int_0^x B(t) \, dt + o(\lambda) \right] .$$

b) Per trovare l'espressione asintotica degli autovalori, introduciamo la [13] nelle [8]; si ottiene

$$P_1(\lambda) = h - H + h' + o(\lambda) \quad , \quad P_2(\lambda) = o(\lambda) ,$$

dove

$$[14] \quad h' = \frac{1}{2} \int_0^\pi B(t) \, dt ;$$

l'equazione [7] diventa

$$\operatorname{tg} \lambda \pi = \frac{\frac{h + H + h' + o(\lambda)}{\lambda}}{1 - \frac{o(\lambda)}{\lambda}} = \frac{h + H + h' + o(\lambda)}{\lambda} .$$

Ma quest'ultima espressione ha per limite zero quando $\lambda \rightarrow +\infty$, perciò

$$\lambda \pi - n\pi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{h + H + h' + o(\lambda)}{\lambda} = \frac{h + H + h' + o(\lambda)}{\lambda} ,$$

da cui

$$[15] \quad \lambda = n + \frac{c + o(\lambda)}{\lambda} ,$$

ove n è intero positivo e

$$[16] \quad c = \frac{h - H + h'}{\pi} .$$

Sostituendo il valore di λ dato dalla [15] nel secondo membro della [15] stessa segue ancora

$$\lambda = n + \frac{c + o(\lambda)}{n} \left[1 + \frac{c + o(\lambda)}{n\lambda} \right]^{-1} ,$$

ovvero, detta $o(n)$ una funzione di n infinitesima per $n \rightarrow +\infty$, l'espressione asintotica dell'*n*-esimo autovalore è data da

$$[17] \quad \lambda_n = n + \frac{c + o(n)}{n} , \quad (n = 1, 2, 3, \dots) .$$

c) Sostituendo la [17] nella [13] ricaveremo l'espressione asintotica dell' n esima autofunzione $U_n(x)$, ovvero

$$U_n(x) = \left[1 - \frac{o(n)}{n}\right] \cos nx + \left[h + \frac{1}{2} \int_0^x B(t) dt - cx + o(n)\right] \frac{\sin nx}{n}.$$

Questa espressione si normalizza facilmente osservando che

$$\int_0^\pi U_n^2(x) dx = \frac{\pi}{2} + \frac{o(n)}{n};$$

indicando perciò con $\varphi_n(x)$ le autofunzioni normalizzate si ottiene

$$\varphi_n(x) = U_n(x) \left[\frac{\pi}{2} + \frac{o(n)}{n}\right]^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} U_n(x) \left[1 + \frac{o(n)}{n}\right]^{-\frac{1}{2}},$$

ed infine

$$[18] \quad \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[1 - \frac{o(n)}{n}\right] \cos nx + \\ + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[h + \frac{1}{2} \int_0^x B(t) dt - cx + o(n)\right] \frac{\sin nx}{n}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

d) Ragionando in modo analogo dalla derivata della [6]

$$[19] \quad \frac{dU(x)}{dx} = -\lambda \sin \lambda x + h \cos \lambda x + \int_0^x B(t) U(t) \cos \lambda(x-t) dt$$

si ottiene l'espressione asintotica della derivata di $\varphi_n(x)$

$$[20] \quad \frac{d\varphi_n(x)}{dx} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} [n - o(n)] \sin nx + \\ + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[h + \frac{1}{2} \int_0^x B(t) dt - cx + o(n)\right] \cos nx, \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

3. - Alla ipotesi della continuità di $B(t)$ sostituiamo in questo numero quella della sua hölderianità in $(0, \pi)$; supponiamo cioè che esista una costante L tale che, se t_1 e t_2 sono due punti quali si vogliano di $(0, \pi)$, sia

$$[21] \quad |B(t_2) - B(t_1)| \leq L |t_2 - t_1|^\beta, \quad (0 < \beta \leq 1),$$

e valutiamo anche in questo caso le espressioni asintotiche di λ_n e di $\varphi_n(x)$.

Si ha

$$\begin{aligned} \int_0^x B(t) \sin 2\lambda t \, dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2\lambda}} B(t) \sin 2\lambda t \, dt + \int_{\frac{\pi}{2\lambda}}^x B(t) \sin 2\lambda t \, dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2\lambda}} B(t) \sin 2\lambda t \, dt - \int_0^{x-\frac{\pi}{2\lambda}} B\left(t + \frac{\pi}{2\lambda}\right) \sin 2\lambda t \, dt, \end{aligned}$$

oppure

$$\int_0^x B(t) \sin 2\lambda t \, dt = \int_0^{x-\frac{\pi}{2\lambda}} B(t) \sin 2\lambda t \, dt + \int_{x-\frac{\pi}{2\lambda}}^x B(t) \sin 2\lambda t \, dt;$$

perciò

$$\begin{aligned} [22] \quad 2 \int_0^x B(t) \sin 2\lambda t \, dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2\lambda}} B(t) \sin 2\lambda t \, dt + \\ &+ \int_{x-\frac{\pi}{2\lambda}}^x B(t) \sin 2\lambda t \, dt + \int_0^{x-\frac{\pi}{2\lambda}} \left[B(t) - B\left(t + \frac{\pi}{2\lambda}\right) \right] \sin 2\lambda t \, dt. \end{aligned}$$

Essendo $B(t)$ continua in $(0, \pi)$ esiste una costante M tale che $|B(t)| < M$, quindi i primi due integrali del secondo membro sono ciascuno in valore assoluto minore di $M \frac{\pi}{2\lambda}$; per la hölderianità (uniforme) di $B(t)$ in $(0, \pi)$ si può trarre dalla [21]

$$\left| B(t) - B\left(t + \frac{\pi}{2\lambda}\right) \right| < L \left(\frac{\pi}{2\lambda} \right)^\beta, \quad (0 < \beta \leq 1)$$

e dalla [22] segue

$$\left| \int_0^x B(t) \sin 2\lambda t \, dt \right| < M \frac{\pi}{2\lambda} + \frac{L}{2} \left(\frac{\pi}{2\lambda} \right)^\beta,$$

quindi

$$[23_1] \quad \int_0^x B(t) \sin 2\lambda t \, dt = \frac{\alpha(x, \lambda)}{\lambda^\beta}, \quad (0 < \beta \leq 1).$$

Analogamente si prova che

$$[23_2] \quad \int_0^x B(t) \cos 2\lambda t \, dt = \frac{\alpha(x, \lambda)}{\lambda^\beta}, \quad (0 < \beta \leq 1)^{(8)}.$$

(8) Cfr. nota (7).

In seguito a queste relazioni la [11] dà come espressione asintotica delle autofunzioni

$$[24] \quad U(x) = \cos \lambda x \left[1 + \frac{\alpha(x, \lambda)}{\lambda^{1+\beta}} \right] + \frac{\operatorname{sen} \lambda x}{\lambda} \left[h + \frac{1}{2} \int_0^x B(t) dt + \frac{\alpha(x, \lambda)}{\lambda^\beta} \right],$$

che per $\beta = 1$ coincide, come è naturale, con l'espressione trovata dall'HOBSON.

b) Le [8]. tenuto conto della [24], danno

$$P_1(\lambda) = h + H + h' + \frac{\alpha(\lambda)}{\lambda^\beta}, \quad P_2(\lambda) = \frac{\alpha(\lambda)}{\lambda^\beta},$$

(con h' fornito dalla [14]) e la equazione [7] diviene

$$\operatorname{tg} \lambda \pi = \frac{\frac{h + H + h'}{\lambda} + \frac{\alpha(\lambda)}{\lambda^{1+\beta}}}{1 - \frac{\alpha(\lambda)}{\lambda^{1+\beta}}} = \frac{h + H + h'}{\lambda} + \frac{\alpha(\lambda)}{\lambda^{1+\beta}}.$$

Poichè quest'ultima espressione tende a zero quando $\lambda \rightarrow +\infty$, risulta

$$\lambda \pi - n\pi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\frac{h + H + h'}{\lambda} + \frac{\alpha(\lambda)}{\lambda^{1+\beta}} \right] = \frac{h + H + h'}{\lambda} + \frac{\alpha(\lambda)}{\lambda^{1+\beta}},$$

da cui

$$\lambda = n + \frac{c}{\lambda} + \frac{\alpha(\lambda)}{\lambda^{1+\beta}},$$

con n intero positivo e c dato dalla [16].

Procedendo in modo analogo al n° 2 b) si ricava

$$[25] \quad \lambda_n = n + \frac{c}{n} + \frac{\alpha(n)}{n^{1+\beta}}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

come espressione asintotica dell' n^{esimo} autovalore, avendo detta $\alpha(n)$ una funzione di n limitata.

c) La corrispondente espressione asintotica dell' n^{esima} autofunzione è

$$U_n(x) = \left[1 + \frac{\alpha(x, n)}{n^{1+\beta}} \right] \cos nx + \left[\frac{h + \frac{1}{2} \int_0^x B(t) dt - cx}{n} + \frac{\alpha(x, n)}{n^{1+\beta}} \right] \operatorname{sen} nx,$$

che, normalizzata, dà

$$[26] \quad \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[1 + \frac{\alpha(x, n)}{n^{1+\beta}} \right] \cos nx + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{1}{n} \left(h + \frac{1}{2} \int_0^x B(t) dt - cx \right) + \frac{\alpha(x, n)}{n^{1+\beta}} \right] \operatorname{sen} nx, \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

d) Dalla [19] si ottiene l'espressione asintotica dalla derivata di $\varphi_n(x)$, ossia

$$[27] \quad \frac{d\varphi_n(x)}{dx} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[n + \frac{\alpha(x, n)}{n^\beta} \right] \operatorname{sen} nx + \\ + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[h + \frac{1}{2} \int_0^x B(t) dt - cx + \frac{\alpha(x, n)}{n^\beta} \right] \cos nx, \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Le relazioni [25], [26], [27] sono state stabilite con una condizione più restrittiva per la $B(t)$ che non le corrispondenti [17], [18] e [20], ma rispetto ad esse presentano il vantaggio di dare una valutazione dell'ordine di infinitesimo (per $n \rightarrow +\infty$) dei termini dello sviluppo che si trascurano. Tale ordine di infinitesimo risulta migliorato, nei confronti dell'HOBSON, se $B(t)$ soddisfa l'ipotesi di essere una funzione hölderiana di ordine (positivo) $\beta < 1$ nell'intervallo $(0, \pi)$.

Meccanica — Immagine geometrica di un tensore isotropo.

Nota ⁽¹⁾ di UMBERTO CISOTTI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

È ben noto che a ogni tensore doppio simmetrico di componenti cartesiane $E_{ik} = E_{ki}$ si può sempre far corrispondere la quadrica centrata

$$\sum_{i,k}^3 E_{ik} y_i y_k = 1$$

riferita a un sistema cartesiano coll'origine nel centro e di assi y_1, y_2, y_3 ⁽²⁾.

Se il tensore doppio è *isotropo*, cioè se le sue componenti cartesiane restano immutate di fronte a qualsiasi orientazione di riferimento, essendo

$$T_{ik} = p \delta_{ik}$$

le espressioni più generali delle componenti di un cosiddetto tensore ⁽³⁾, dove p è uno scalare qualunque e δ_{ik} è lo zero se $i \neq k$ e l'unità se $i = k$, si può sempre fare corrispondere ad esso la quadrica

$$\sum_{i,k}^3 T_{ik} y_i y_k = \sum_{i,k}^3 p \delta_{ik} y_i y_k = p \sum_i^3 y_i^2 = \pm 1,$$

assumendo il segno superiore o l'inferiore a seconda che p è > 0 oppure < 0 , cioè la superficie sferica

$$\sum_i^3 y_i^2 = \frac{1}{|p|}.$$

Si può estendere una tale interpretazione geometrica, assai comoda ed espressiva, anche ai tensori isotropi generali: precisamente essa sussiste per tutti i tensori isotropi $2m$ -pli, con $m \geq 1$, per cui si può concludere che ogni tensore isotropo può essere rappresentato mediante una superficie sferica.

⁽¹⁾ Presentata nell'Adunanza del 10 aprile 1942-XX.

⁽²⁾ CISOTTI, *Meccanica razionale*. Quarta edizione; Libreria Editrice Politecnica, Milano, 1942-XX, pag. 343.

⁽³⁾ Loc. cit., pag. 350.

* * *

Il seguente prodotto di m fattori

$$\delta_{i_1 k_1} \cdots \delta_{i_m k_m},$$

dove $i_1 \cdots i_m$ e $k_1 \cdots k_m$ sono due delle 3^m disposizioni con ripetizione a m a m degli indici 1, 2, 3, definisce le componenti cartesiane del tensore $2m$ -plo isotropo potenza m -ma del tensore di componenti δ_{ik} ; il numero di queste potenze distinte è ⁽¹⁾

$$N = \sum_{k=0}^m \left[\binom{2m}{2k} - \frac{1}{2} \binom{2m}{2k-1} \right] \binom{2k}{k}.$$

Indicando brevemente con

$$\Delta_{i_1 \cdots i_m, k_1 \cdots k_m}^{(r)} \quad (r = 1, 2, \dots, N)$$

le componenti cartesiane delle accennate potenze, il più generale tensore $2m$ -plo isotropo ha le seguenti componenti cartesiane:

$$C_{i_1 \cdots i_m k_1 \cdots k_m} = \sum_{r=1}^N A_r \Delta_{i_1 \cdots i_m, k_1 \cdots k_m}^{(r)},$$

essendo A_1, A_2, \dots, A_N scalari qualsiasi ⁽²⁾.

Si consideri la superficie algebrica di grado $2m$ di equazione

$$\sum_{i_1 \cdots i_m k_1 \cdots k_m}^3 C_{i_1 \cdots i_m, k_1 \cdots k_m} y_{i_1} \cdots y_{i_m} y_{k_1} \cdots y_{k_m} = \pm 1.$$

Sostituendo ai coefficienti $C_{i_1 \cdots i_m k_1 \cdots k_m}$ le su scritte espressioni, che sono caratteristiche per i tensori isotropi, si ottiene:

$$\sum_{i_1 \cdots i_m k_1 \cdots k_m}^3 A_r \sum_{i_1 \cdots i_m k_1 \cdots k_m}^N \Delta_{i_1 \cdots i_m, k_1 \cdots k_m}^{(r)} y_{i_1} \cdots y_{i_m} y_{k_1} \cdots y_{k_m} = \pm 1;$$

ovvero, invertendo le sommatorie,

$$\sum_{r=1}^N A_r \sum_{i_1 \cdots i_m k_1 \cdots k_m}^3 \Delta_{i_1 \cdots i_m, k_1 \cdots k_m}^{(r)} y_{i_1} \cdots y_{i_m} y_{k_1} \cdots y_{k_m} = \pm 1;$$

⁽¹⁾ RACA, *Determinazione del numero dei tensori isotropi indipendenti di rango n* . « Rendiconti della R. Acc. Naz. dei Lincei », vol. XVII (1° sem. 1933-XI), pag. 389.

⁽²⁾ PASTORI, *Espressione generale dei tensori isotropi*. « Rendiconti della R. Acc. Naz. dei Lincei », vol. XII, (2° sem. 1930-VIII), pag. 500.

ora è, per qualunque r , ponendo

$$\begin{aligned} A &= \sum_1^N A_r, \\ A \sum_1^N i_1 \dots i_m k_1 \dots k_m \Delta_{i_1 \dots i_m k_1 \dots k_m}^{(r)} y_{i_1} \dots y_{i_m} y_{k_1} \dots y_{k_m} &= \\ &= A \sum_1^3 i_1 \dots i_m y_{i_1}^2 y_{i_2}^2 \dots y_{i_m}^2 = \left(\sum_1^3 y_i^2 \right)^m = (P - O)^{2m}, \end{aligned}$$

designando O l'origine ($y_1 = y_2 = y_3 = 0$) e P il punto di coordinate y_1, y_2, y_3 ; pertanto si ottiene:

$$(P - O)^{2m} = \frac{1}{|A|};$$

ponendo infine

$$\beta = e^{\frac{2\pi\lambda}{m}i}, \quad \lambda = 0, 1, \dots, m-1,$$

con che β sono le radici m -me dell'unità, la precedente può scriversi

$$(P - O)^2 = \frac{\beta}{\sqrt[m]{|A|}}.$$

Si noti che se m è pari β ha due soli valori reali, 1 e -1 , al primo dei quali corrisponde una sfera di raggio $\frac{1}{\sqrt[m]{|A|}}$ e al secondo una sfera immaginaria; se m è dispari una sola radice è reale ed eguale a 1, le altre sono complesse. Concludendo: ad un tensore isotropo qualunque corrisponde sempre una ed una sola superficie sferica reale, che può pertanto essere assunta come rappresentazione geometrica del tensore stesso.

Astronomia (Astrofisica). — *Altezza della cromosfera nel 1941 e andamento del ciclo solare* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di GIORGIO ABETTI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

I risultati delle osservazioni dell'altezza della cromosfera effettuate ad Arcetri nel 1941, come usualmente di 30° in 30° di latitudine, sono raccolti nella seguente tabella. Da *Colacrich*, *Viaro*, *Fracastoro* sono state eseguite, scegliendo le giornate più favorevoli, 46 osservazioni che danno le seguenti medie:

ARCETRI

Latitudine	Altezza	Latitudine	Altezza
+ 90° N	10''.47	— 90° S	10''.99
+ 60 E	10 .19	— 60 W	10 .59
+ 30 E	10 .10	— 30 W	10 .42
0 E	10 .42	0 W	10 .21
— 30 E	10 .30	+ 30 W	10 .18
— 60 E	10 .62	+ 60 W	10 28

Da questi dati si ricava l'altezza media generale per il 1941: 10''.40, che si può mettere al confronto con quella dell'anno precedente, 10''.39:

$$1941-1940 = + 0''.01.$$

L'altezza media della cromosfera è rimasta costante non solo in questi due ultimi anni, ma dal 1935. Quest'anno si deve notare un lieve accenno di maggiore altezza ai poli più accentuato di quello che si è avuto nel 1940, come dovrebbe avvenire nel ripetersi delle fasi del ciclo undecennale ⁽³⁾.

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nel R. Osservatorio di Arcetri, Firenze.

⁽²⁾ Presentata nell'Adunanza del 10 aprile 1942-XX.

⁽³⁾ Cfr. per esempio, T. NICOLINI, *Variazioni di altezza della cromosfera solare*. « Contr. Astr. R. Oss. Capodimonte », sez. II, vol. II, n. 5, Napoli, 1941.

L'area totale delle protuberanze dedotta dalle stazioni di Arcetri e di Catania risulta diminuita di 283 unità di protuberanza rispetto al 1940, mostrando che la diminuzione dell'attività solare scende ora più rapidamente verso il minimo. Nei due emisferi l'attività delle protuberanze risulta maggiore nell'emisfero boreale che in quello australe; però con distribuzione simile nei due emisferi, potendosi considerare che si ha un solo massimo esteso e poco definito attorno a $\pm 22^\circ$ di latitudine con un deciso avvicinamento all'equatore rispetto all'anno precedente, come deve avvenire nel corso del ciclo undecennale.

Quanto alle altre caratteristiche dell'attività solare, dalle sole osservazioni di Arcetri si hanno per il 1941 i seguenti dati:

numero relativo delle macchie: 70.6

per i flocculi di calcio (K3) chiari: 1.84 (su di una scala empirica da 0, minima attività, a 5 massima)

per i flocculi di idrogeno (H_α) chiari: 1.45

per i flocculi di idrogeno (H_α) oscuri: 1,56

anche questi in notevole diminuzione rispetto al 1940.

Mentre, come si è detto, l'attività massima delle protuberanze si è svolta nei due emisferi attorno alle latitudini $\pm 22^\circ$, le macchie si sono presentate nell'emisfero nord fra $+7^\circ$ e $+14^\circ$ con un massimo a $+13^\circ$ e nell'emisfero sud fra -5° e -11° , con un massimo a -6° . Questo massimo relativamente vicino all'equatore fa pensare che presto potranno presentarsi sul sole le macchie a più alta latitudine del nuovo ciclo.

Malgrado la diminuzione generale dell'attività solare si sono avute durante l'anno varie ripercussioni delle perturbazioni solari in quelle del magnetismo terrestre quali sono registrate all'Istituto idrografico della R. Marina a Genova. Particolarmente notevoli quelle prodotte da un gruppo di macchie passato al meridiano centrale il 27 febbraio e da eruzioni cromosferiche ai primi di marzo. Fra il luglio ed agosto si sono avuti i più alti numeri relativi medi delle macchie senza che si sieno presentate notevoli perturbazioni nel magnetismo terrestre. Invece quasi tutto il settembre fu perturbato in relazione ad eruzioni cromosferiche osservate in un gruppo di macchie, passato al meridiano centrale il 16 settembre. Anche dal 28 al 30 ottobre si sono osservate eruzioni cromosferiche in un gruppo di macchie al meridiano centrale con perturbazioni magnetiche dal 31 ottobre al 1 novembre. Infine con poca attività solare sono state registrate saltuarie perturbazioni del magnetismo terrestre durante tutto il mese di dicembre.

Geofisica. — *Nuovo metodo per la determinazione delle coordinate ipocentrali di un terremoto lontano* ⁽¹⁾. Nota di PAOLO EMILIO VALLE, presentata ⁽²⁾ dall'Accademico ANTONINO LO SURDO.

1. I metodi analitici per la determinazione delle coordinate epicentrali di un terremoto lontano, si basano esclusivamente sulla conoscenza dei tempi di arrivo delle onde longitudinali dirette, della profondità ipocentrale e della relativa dromocrona media.

Non si fa uso dei tempi d'inizio delle onde trasversali dirette, poichè sembra più agevole cogliere con precisione l'inizio della fase *P* che quello della fase *S*. Tuttavia, abbastanza frequentemente, le onde trasversali dirette, le quali, in generale, si presentano nei sismogrammi maggiormente sviluppate delle onde longitudinali, hanno un inizio individuabile con sufficiente precisione; appare quindi ingiustificato non avvalersene.

Devesi rilevare che una delle maggiori difficoltà che si incontrano nell'applicazione dei metodi analitici per la determinazione delle coordinate epicentrali di un terremoto lontano, risiede nella ricerca della profondità ipocentrale, la cui conoscenza, richiesta *a priori*, deve essere stabilita in modo rigoroso, dato che non è suscettibile di correzione una volta determinate le coordinate dell'epicentro e il tempo origine.

Risulta tutt'altro che facile, com'è noto, stabilire con precisione la profondità di un terremoto, a meno che i sismogrammi non presentino sicuri e chiari inizi di onde riflesse in prossimità dell'epicentro. Tale difficoltà sussiste naturalmente sia che si usino i tempi d'inizio delle onde longitudinali che trasversali.

Nel metodo che sarà esposto, basato sulla differenza dei tempi di arrivo di due fasi, si ovvia, almeno in parte, al sopracitato inconveniente e si eliminano gli errori dovuti alla correzione del tempo, che, non sempre, risultano trascurabili.

⁽¹⁾ Pubblicazione n. 78 dell'Istituto Nazionale di Geofisica del Consiglio Nazionale delle Ricerche, diretto dal prof. ANTONINO LO SURDO.

⁽²⁾ Nell'Adunanza del 10 aprile 1942-XX.

2. Indicando con Δ la distanza epicentrale, con h la profondità ipocentrale di un terremoto, siano

$$[1] \quad tf_1 = \varphi_1(\Delta, h) \quad , \quad tf_2 = \varphi_2(\Delta, h)$$

le equazioni delle dromocrone medie, che si suppongono note, di due fasi; risulti inoltre per esempio, $tf_1 > tf_2$.

Posto

$$[2] \quad \tau = \varphi_1(\Delta, h) - \varphi_2(\Delta, h) = \psi(\Delta, h) > 0$$

si consideri un certo numero n di Osservatori e siano λ_i, φ_i le coordinate (per esempio, geocentriche) dell' i^{mo} Osservatorio.

Dette λ_0, φ_0 le coordinate dell'epicentro del terremoto, risulterà

$$[3] \quad \Delta_i = \Delta(\lambda_i, \varphi_i; \lambda_0, \varphi_0) \quad i = 1, \dots, n$$

dove con Δ indichiamo una qualsiasi relazione, per esempio, di trigonometria sferica, che fornisca le distanze epicentrali Δ_i in funzione delle quantità $\lambda_i, \varphi_i; \lambda_0, \varphi_0$.

Siano $t_i f_1$ e $t_i f_2$ i tempi di arrivo delle fasi f_1 ed f_2 all' i^{mo} Osservatorio, h_0 la profondità ipocentrale; avremo

$$\tau_i = t_i f_1 - t_i f_2$$

o anche

$$[4] \quad \tau_i = \psi[\Delta(\lambda_i, \varphi_i; \lambda_0, \varphi_0), h_0] \quad i = 1, \dots, n.$$

Ciò posto si possono considerare tre casi:

1°) sono da determinare $\lambda_0, \varphi_0, h_0$

2°) » » » λ_0, φ_0

3°) è » » h_0 .

3. Esaminiamo il primo caso. Si supponga di aver determinato in qualche modo, una posizione approssimata dell'epicentro e un valore, anch'esso approssimato, della profondità ipocentrale.

Dette λ, φ, h le coordinate approssimate dell'ipocentro, risulterà:

$$[5] \quad \begin{cases} \lambda_0 = \lambda + \xi \\ \varphi_0 = \varphi + \eta \\ h_0 = h + \zeta. \end{cases}$$

Siano τ_{i0} le differenze dei tempi di arrivo delle due fasi f_1 ed f_2 , osservate all' i^{mo} Osservatorio, e τ_{ie} i valori di τ_i che si ottengono ponendo nella [4] al posto di $\lambda_0, \varphi_0, h_0$ i loro valori approssimati λ, φ, h .

L'errore sarà

$$E_i = \tau_{i0} - \tau_{i0} \quad i = 1, \dots, n$$

ossia, avuto riguardo alla [4] e alle [5],

$$[6] \quad E_i = \psi[\Delta(\lambda_i, \varphi_i; \lambda + \xi, \varphi + \eta), h + \zeta] - \psi[\Delta(\lambda_i, \varphi_i; \lambda, \varphi), h].$$

Sviluppando la differenza a secondo membro della precedente in serie di potenze e supponendo che le coordinate approssimate dell'ipocentro λ, φ, h siano state scelte così prossime a $\lambda_0, \varphi_0, h_0$ da potersi trascurare le potenze d'ordine superiore al primo delle quantità ξ, η, ζ , l'equazione dell'errore si scrive, con evidente significato dei simboli,

$$[7] \quad E_i = \left(\frac{\partial \psi}{\partial \Delta}\right)_i \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda}\right)_i \xi + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \Delta}\right)_i \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi}\right)_i \eta + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \Delta}\right)_i \zeta.$$

Dalla [2], ove si indichino con $v_i f_1$ e $v_i f_2$ le velocità apparenti delle due fasi relative all'*i*mo Osservatorio, si ha:

$$[8] \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial \Delta}\right)_i = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \Delta}\right)_i - \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \Delta}\right)_i = \frac{v_i f_2 - v_i f_1}{v_i f_1 v_i f_2} = K_i.$$

Posto quindi

$$[9] \quad K_i \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda}\right)_i = a_i \quad K_i \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi}\right)_i = b_i \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial h}\right)_i = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial h}\right)_i - \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial h}\right)_i = c_i$$

$$i = 1, \dots, n$$

l'equazione dell'errore diventa:

$$[10] \quad E_i = a_i \xi + b_i \eta + c_i \zeta$$

da cui il sistema normale che fornisce i valori più probabili delle correzioni ξ, η, ζ .

$$[11] \quad \left. \begin{aligned} [aa] \xi + [ab] \eta + [ac] \zeta &= [aE] \\ [ba] \xi + [bb] \eta + [bc] \zeta &= [bE] \\ [ca] \xi + [cb] \eta + [cc] \zeta &= [cE]. \end{aligned} \right\}$$

Se si desiderano conoscere gli errori medi della soluzione ξ_0, η_0, ζ_0 del sistema [11], indicando con $Q_{rs} = Q_{sr}$ i complementi algebrici del determinante del sistema, divisi per il determinante stesso, si ha:

$$\xi = \xi_0 \pm \mu \sqrt{Q_{11}}$$

$$\eta = \eta_0 \pm \mu \sqrt{Q_{22}}$$

$$\zeta = \zeta_0 \pm \mu \sqrt{Q_{33}}.$$

Il valore dello scarto medio μ si può calcolare mediante la relazione

$$\mu = \sqrt{\frac{[vv]}{n-3}}$$

dove

$$[vv] = [aE] \xi_c + [bE] \eta_0 + [cE] \zeta_0 + [EE]$$

mentre i Q_{rs} soddisfano ai sistemi:

$$\left\{ \begin{array}{l} [aa] Q_{41} + \dots + [ac] Q_{43} - 1 = 0 \\ [ba] Q_{41} + \dots + [bc] Q_{43} = 0 \\ \dots + [cc] Q_{43} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [aa] Q_{21} + \dots + [ac] Q_{23} = 0 \\ \dots + [bb] Q_{22} + [bc] Q_{23} - 1 = 0 \\ \dots = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [aa] Q_{31} + \dots + [ac] Q_{33} = 0 \\ \dots = 0 \\ \dots + [cc] Q_{33} - 1 = 0 \end{array} \right.$$

È superfluo avvertire che il metodo va reiteramente applicato fino ad ottenere valori di ξ, η, ζ sufficientemente piccoli, in modo che le loro potenze risultino trascurabili.

4. I casi 2° e 3° rientrano come particolari nelle considerazioni precedenti. Se infatti è nota la profondità ipocentrale, con buona approssimazione, il sistema normale [11], per essere $c_i = (\partial\psi/\partial h)_i = 0$, si riduce a

$$[12] \quad \begin{aligned} [aa] \xi + [ab] \eta &= [aE] \\ [ba] \xi + [bb] \eta &= [bE] . \end{aligned}$$

Se è nota la posizione dell'epicentro il sistema si riduce ulteriormente, poichè

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\Delta} \right)_i \left(\frac{\partial\Delta}{\partial\lambda} \right)_i = \left(\frac{\partial\psi}{\partial\Delta} \right)_i \left(\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi} \right)_i = 0$$

e si ha

$$[13] \quad \zeta_0 = \frac{[cE]}{[cc]} .$$

5. Per l'effettiva applicazione numerica di quanto è stato esposto, è necessario conoscere le funzioni φ_1 e φ_2 o anche la funzione ψ , relativa alle fasi f_1 ed f_2 , che assumeremo senz'altro uguali rispettivamente alla fase S e P .

È stata dedotta la ψ dalla tavola di G. J. BRUNNER per $30^\circ \leq \Delta \leq 80^\circ$ e per $0 \leq h \leq 400$ km. In tale intervallo della distanza epicentrale Δ le dromocrone delle onde longitudinali e trasversali dirette non subiscono notevoli discontinuità, mentre la $\partial\psi/\partial h$ si mantiene abbastanza grande.

È stato posto

$$[14] \quad \psi(\Delta, h) = \sum_{ik} c_{ik} \Delta'^i h'^k$$

dove $\Delta' = \frac{\Delta - 30}{10}$ e $h' = 10^{-2} h$. La ψ risulta espressa in secondi.

I coefficienti c_{ik} sono stati calcolati in relazione alle dromocrone medie tracciate nella tavola sopracitata per $h = 0$, $h = 100$, $h = 200$, $h = 300$, $h = 400$ km. e sono contenuti nella tabella I.

Giova avvertire che in considerazione della scala dei diagrammi di G. J. BRUNNER, dello spessore della linea e dei conseguenti errori di valutazione, la [14] è da ritenersi approssimata a meno di 2 o 3 decimi di secondo.

TABELLA I.

c_{ik}

i	k				
	0	1	2	3	4
0	+ 306	— 12,25	+ 5	— 2	+ 0,25
1	+ 65,37143	+ 5,56303	— 4,32869	+ 1,57497	— 0,20456
2	+ 0,65238	— 1,494431	— 0,213508	+ 0,1944508	— 0,019842
3	— 0,333333	+ 0,0793655	+ 0,1896816	— 0,0888885	+ 0,0103174

Per quanto riguarda le $\left(\frac{\partial\Delta}{\partial\lambda}\right)_i$ e $\left(\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi}\right)_i$, si possono usare le derivate parziali della nota relazione:

$$[15] \quad \cos \Delta_i = \alpha_i \cos \varphi \cos \lambda + \beta_i \cos \varphi \sin \lambda + \gamma_i \sin \varphi$$

e cioè

$$[16] \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial\Delta}{\partial\lambda}\right)_i = \frac{\cos \varphi (\alpha_i \sin \lambda - \beta_i \cos \lambda)}{\sin \Delta_i} \\ \left(\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi}\right)_i = \frac{\sin \varphi (\alpha_i \cos \lambda + \beta_i \sin \lambda) - \gamma_i \cos \varphi}{\sin \Delta_i} \end{cases}$$

dove $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ sono le costanti dell' i^{mo} Osservatorio, λ e φ le coordinate dell'epicentro approssimato.

6. Onde far vedere come il metodo sopra esposto conduca a risultati soddisfacenti, è stato applicato al terremoto dell'Alaska del 22 luglio 1937.

Si sono presi in considerazione i tempi di arrivo delle onde P ed S relativi a n. 20 Osservatori e contenuti nella tabella II.

Come coordinate dell'epicentro approssimato sono state scelte quelle calcolate da N. ADKINS, col metodo di GEIGER, adoperando la dromocrona di H. JEFFREYS e precisamente:

$$[17] \quad \begin{cases} \lambda = 146^{\circ},58 \text{ W} \\ \varphi = 64^{\circ},67 \text{ N} \end{cases}$$

o, in coordinate geocentriche,

$$[17'] \quad \begin{cases} \lambda = 146^{\circ},58 \text{ W} \\ \varphi = 64^{\circ},52 \text{ N} \end{cases}$$

mentre la profondità ipocentrale approssimata è stata stabilita:

$$[18] \quad h = 70 \text{ km.}$$

Dalla [14] risulta:

$$[19] \quad \psi(\Delta, 70) = 299,249 + 67,63559 \Delta' - 0,436409 \Delta'^2 - 0,2128451 \Delta'^3$$

$$[20] \quad 10 \left(\frac{\partial \psi}{\partial \Delta} \right)_{h=70} = 67,63559 - 0,872818 \Delta' - 0,6385353 \Delta'^2$$

$$[20'] \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial h} \right)_{h=70} = -7,847 + 2,00401 \Delta' - 1,534722 \Delta'^2 + 0,2284091 \Delta'^3.$$

Sono stati calcolati i valori dei coefficienti a_i, b_i, c_i mediante le [16] e le [20].

La coordinata φ è stata assunta geocentrica.

Il sistema normale a cui si è pervenuti vale:

$$[21] \quad \begin{cases} 91,180 \xi + 1,619 \eta + 268,809 \zeta + 12,919 = 0 \\ 1,619 \xi + 436,203 \eta + 358,288 \zeta + 75,449 = 0 \\ 268,809 \xi + 358,288 \eta + 1469,339 \zeta + 152,731 = 0. \end{cases}$$

I valori di ξ, η, ζ che soddisfano tale sistema sono:

$$\xi_0 = +0,265 \text{ gradi}$$

$$\eta_0 = -0,061 \quad »$$

$$\zeta_0 = -0,137 \cdot 10^2 \text{ km.}$$

Osservatorio	Δ^0	t_S			t_P			τ_{i0}	τ_{ic}	E_i
		h	m	s	h	m	s	secondi	secondi	secondi
Berkeley	30,44	17	20	46	17	15	44	302	302,2	-0,2
Mount Wilson	35,05		22	00		16	25	335	333,3	+1,7
Riverside	35,47			04			28	336	336,1	-0,1
Chicago	39,98		23	16		17	09	367	366,1	+0,9
Ivigut	40,59			22			12	370	370,1	-0,1
Florissant	41,14			34			17	377	373,8	+3,2
S. Louis	41,58			37			17	380	376,7	+3,3
Fordham	46,75		24	50		18	02	408	410,3	-2,3
Abisko	46,88			55			02	413	411,2	+2,8
Columbia	49,42		25	30			22	428	427,4	+0,6
Tacubaya	55,04		26	48		19	08	460	462,5	-2,5
Stonyhurst	58,62		27	34			30	484	484,3	-0,3
Copenaghen	58,88			36			30	486	485,8	+0,2
Mosca	59,88			51			37	494	491,8	+2,2
Kew	61,28		28	07			47	500	500	0
De Bilt	61,53			12			50	502	501,5	+0,5
Uccle	62,68			25			56	509	508,2	+0,8
Zurigo	66,62		29	15		20	21	534	530,6	+3,4
Vienna	66,64			15			22	533	530,7	+2,3
Neuchâtel	66,77			16			23	533	531,5	+1,5

Pertanto le coordinate dell'epicentro e la profondità ipocentrale risultano:

$$\lambda_0 = 146^{\circ},84 \text{ W}$$

$$\varphi_0 = 64^{\circ},58 \text{ N}$$

$$h_0 = 56,3 \text{ km.}$$

I primi due valori sono in buon accordo con i valori [17].

Sono stati calcolati gli errori medi di ciascuna correzione e si è ottenuto:

$$\mu_{\xi_0} = \pm 0,422 \text{ gradi}$$

$$\mu_{\eta_0} = \pm 0,146 \text{ "}$$

$$\mu_{\zeta_0} = \pm 0,126 \cdot 10^2 \text{ km}$$

che non risultano eccessivi, specie per quanto riguarda la profondità ipocentrale.

Fisica. — *I secondari dei mesotroni esaminati con la camera di Wilson.* Nota di GIUSEPPE COCCONI, presentata ⁽¹⁾ da GIOVANNI POLVANI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. La componente più penetrante della radiazione cosmica che giunge al livello del mare, è formata, come è noto, quasi esclusivamente di mesotroni. Tali particelle nell'attraversare la materia danno origine a radiazioni secondarie costituite principalmente da elettroni messi in moto per interazione coulombiana coi mesotroni stessi. Sulle proprietà di questi elettroni di interazione sono state eseguite varie ricerche con contatori di Geiger-Muller, (vedi per esempio Siebert ⁽²⁾), le quali abbastanza concordemente hanno dimostrato che il numero degli elettroni in equilibrio con la componente mesotronica cresce al diminuire del numero atomico della sostanza attraversata dai mesotroni.

Bisogna tener presente però che operando con contatori si eliminano in queste misure le radiazioni di più bassa energia, incapaci di attraversare le pareti dei contatori stessi, ed inoltre la disposizione geometrica dei contatori può essere tale da modificare la realtà, registrando con preferenza elettroni diffusi dalla radiazione mesotronica secondo particolari direzioni.

Un esame più accurato di queste radiazioni secondarie può farsi invece con la camera di Wilson. Esso è stato eseguito da vari AA. ⁽³⁾ che con sufficiente accordo hanno osservato nel Pb una produzione di elettroni secondari con frequenza di circa il 10 % rispetto al numero di mesotroni primari. L'energia di tali elettroni è risultata in genere piuttosto bassa, dell'ordine di pochi milioni di elettroni-volta, essi cioè vengono arrestati da meno di 10 gr/cm² di Pb.

⁽¹⁾ Nell'Adunanza del 10 aprile 1942-XX.

⁽²⁾ B. SIEBERT, « Zeit. f. Phys. », 118, 217, 1941.

⁽³⁾ B. TRUMPY, « Zeit. f. Phys. », 113, 582, 1939.

E. STUNTLINGER, « Zeit. f. Phys. », 116, 281, 1940.

K. I. HOPKINS, W. M. NIELSEN, L. W. NORDHEIM, « Phys. Rev. », 55, 233, 1939.

W. M. POWELL, « Phys. Rev. », 57, 1061, 1940.

2. Noi qui abbiamo intrapreso una ricerca sistematica sui secondari elettronici servendoci della camera di Wilson dell'Istituto di Fisica della Regia Università di Milano descritta in altra Nota (⁴).

La camera, disposta verticalmente, veniva comandata da un telescopio pure verticale di tre contatori in coincidenza, disposti due sopra la camera ed uno immediatamente al di sotto, cosicchè l'espansione aveva luogo solo quando i contatori e la camera venivano attraversati da una particella. Perchè tale particella fosse sicuramente un mesotrone, al di sopra del telescopio dei contatori era posto uno schermo di 15 cm di Pb oppure di 21 cm di Fe. Nell'interno della camera si trovavano due setti orizzontali di 0,5 cm Pb oppure di 0,65 cm Fe i quali costituivano i generatori di secondari.

La camera, completamente automatica, veniva fotografata da due direzioni inclinate l'una rispetto all'altra di 60°.

In ricerche di questo tipo la fotografia stereoscopica è essenziale, perchè solo con essa si può con sicurezza giudicare se una particella è effettivamente secondaria di un'altra fotografata contemporaneamente alla prima. Gli avvicinamenti casuali e prospettici tra le tracce di radiazioni che attraversano la camera nell'intervallo di tempo in cui avviene l'espansione sono più numerosi di quanto si possa credere, e quindi basandosi su fotografie ottenute in una sola direzione sono numerosi i casi in cui tali avvicinamenti si giudicano non casuali ma effettivi, dovuti cioè ad una generazione di secondario da parte di una traccia considerata come primaria. Poichè avviene abbastanza frequentemente che le due tracce accoppiate casualmente siano tracce di mesotrone, tale accoppiamento può essere erroneamente interpretato come una generazione di secondari penetranti data da mesotrone (⁵).

Dall'esame delle due fotografie stereoscopiche si può inoltre risalire alla posizione nello spazio delle tracce osservate e quindi nel nostro caso all'angolo vero di diffusione delle particelle secondarie rispetto alle primarie che l'anno generate.

La camera conteneva Argon a 0,9 atm., saturato con vapori di acqua ed alcool.

Sono state eseguite due serie di misure:

la serie *A* con assorbitore, posto al di sopra dei contatori, di 15 cm di Pb e generatori di secondari nella camera, di 0,5 cm di Pb;

la serie *B* con assorbitore, posto al di sopra i contatori, di 21 cm di Fe e generatori di secondari nella camera di 0,65 cm di Fe.

(⁴) G. POLVANI, « Ric. Scient. », 12, 410, 1941.

(⁵) T. H. JONSON - R. P. SHUTT - J. G. BARRY, « Phys. Rev. », 57, 1062, 1940.

Sono state fatte complessivamente circa 3000 fotografie, di cui 2085 (1070 della serie *A* e 1015 della serie *B*), mostravano nettamente la traccia di una particella che attraversava la camera con direzione compresa entro l'angolo solido sotteso dai contatori, e che poteva essere individuata con il mesotrone, che, dando luogo alla coincidenza, comanda l'espansione della camera stessa.

Fra queste 2085 fotografie ve ne sono 369 in cui, oltre alla traccia del mesotrone si osservano tracce di secondari, di diversa origine, come risulta dalla seguente tabella:

1 secondario	N totale	Mollis- simi	Molli	Duri	dal basso in alto	Angolo medio	
						Molli	Duri
in Pb ₁	38	5	18	1	6	44°,0	(6°)
» Pb ₂	22	1			4		
» Fe ₁	47	12	12	8	5	49°,5	23°,6
» Fe ₂	37	4			1		
» Vetro	57	1	33	12	6	46,3	23°,0
» Argon	154	154					
2 secondari							
in Pb	7	1	6				
» Fe	5		5				
» Vetro	2		2				

Nella tabella si sono indicati con Pb₁, Pb₂ ed Fe₁, Fe₂ i secondari generati nei due setti della camera, partendo dall'alto, rispettivamente nelle disposizioni *A* e *B*. Per secondari nel vetro si intendono quelli generati nella parete cilindrica di vetro che limita lateralmente la camera di espansione e che ha lo spessore di 1 cm con la locuzione *secondari mollissimi* abbiamo indicato quei secondari il cui percorso termina entro la camera stessa, e che presentano caratteristiche tracce contorte, di cui diremo più diffusamente in seguito. Con la locuzione *secondari molli* abbiamo invece indicato quei secondari che vengono fermati da un solo setto (di Pb o di Fe), e *secondari duri* abbiamo infine denominati quelli capaci di attraversare 1 o 2 setti.

I mesotroni registrati provengono dall'alto, in direzione quasi verticale. Si sono perciò specificati anche i casi in cui il secondario invece

di essere diretto dall'alto in basso, aveva andamento contrario. Infine l'angolo medio è stato valutato dalla media aritmetica degli angoli veri, ottenuti dall'esame delle coppie di fotografie stereoscopiche.

3. Facciamo notare anzitutto il numero veramente notevole di secondari generati lungo il percorso nell'Argon, tutti mollissimi, aventi cioè percorsi di solo alcuni centimetri nella camera, e con tracce tipicamente serpeggianti e dense dovute quindi ad elettroni di bassa energia (20-100 Kev). In figura 1 è riportata una fotografia di una di queste tracce.

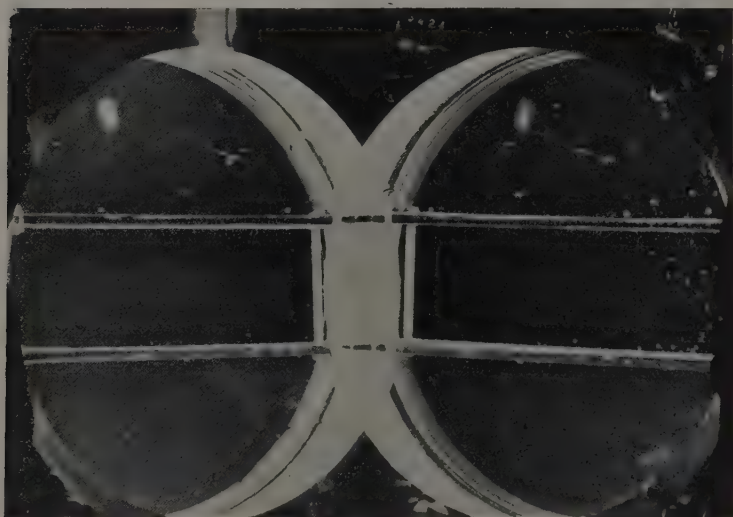


Fig. 1. - Secondario mollissimo in Argon.

L'angolo formato da questi secondari mollissimi con la particella primaria varia ampiamente da 0° a 180° mostrando grosso modo una distribuzione isotropa. Molto probabilmente questi elettroni sono posti in moto in seguito ad urti « lontani » con il mesotrone. In esperimenti con soli contatori nessuno di questi secondari potrebbe essere registrato, perchè il loro percorso medio, dell'ordine di 10^{-2} - 10^{-3} gr cm^2 è di gran lunga inferiore allo spessore delle pareti dei contatori normalmente in uso.

Anche fra i secondari formatisi in Pb, Fe e vetro alcuni avevano le caratteristiche dei mollissimi; ma riteniamo opportuno non tener conto di essi perchè ben difficile è precisare se sono effettivamente generati nel Pb, Fe, e vetro o non piuttosto nel gas immediatamente vicino alle superficie dei corpi solidi stessi.

Fra i secondari generati in Pb_1 , Fe_1 e nel vetro si possono distinguere due tipi, duro e molle, a secondo che essi attraversano o no i setti sottostanti. Nel caso del Pb solo un secondario su 19 riesce ad attraversare P_2 ⁽⁶⁾, ma suddividendosi poi in due raggi molli. Nel caso del Fe , 8 secondari su 20 attraversano Fe_2 , ma di questi 5 sono fortemente deviati, il che verosimilmente indica energie non elevate, e solo in tre casi proseguono indeviati. Bisogna però far notare che lo schermo di 0,5 cm di Pb equivale a 1,2 unità energetiche e quello di 0,65 di Fe a 0,5 unità energetiche.

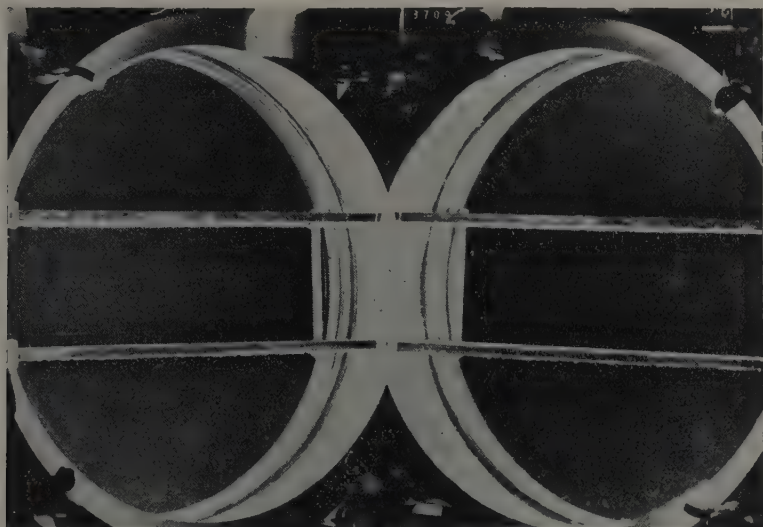


Fig. 2. — Secondario molle in Pb_1 .

Dei secondari nel vetro 12 su 42 attraversano gli schermi sottostanti ma di essi 3 attraversano un settore solo e dei rimanenti nove, tre sono fortemente deviati e 6 proseguono indisturbati, ma tutti e 6 sono stati osservati con i setti di Fe . Si arriva alla conclusione che su 81 secondari osservati, solo 9 attraversano i setti senza subire deviazione apprezzabile e senza dare secondari, ma questo avviene solo con i setti di Fe ; in tutti gli altri casi si è in presenza di radiazioni molli, fermate cioè da pochi gr/cm^2 di materia. In figura 2 e 3 sono riportati due esempi tipici.

(⁶) Facciamo notare che la somma dei secondari elencati nelle colonne 3-4 5-6 è inferiore al numero riportato in colonna 2 (numero totale) e questo perchè molti secondari escono dalla camera lateralmente prima di aver attraversato il secondo setto.

Si può quindi asserire che la radiazione secondaria dei mesotroni per interazione coulombiana è una radiazione di energia relativamente bassa (pochi milioni di ev.) cosicchè l'equilibrio fra la radiazione primaria e quella secondaria è raggiunto dopo spessori di pochi millimetri di Pb.

Ciò è confermato dall'esiguo numero di casi in cui un mesotrone ha dato origine a due secondari (seconda parte della tabella): poichè le coppie osservate sono tutte costituite da radiazioni molli, molto probabilmente i due secondari non sono stati generati contemporaneamente dal mesotrone nel setto di Pb o di Fe, ma attraverso una successiva moltiplicazione di un solo secondario.

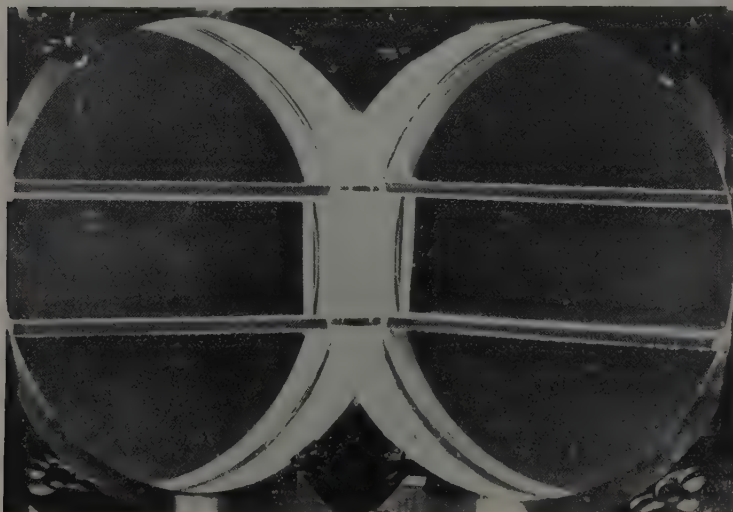


Fig. 3. - Secondario in Fe_2 .

Si può quindi ritenere che l'equilibrio fra mesotroni e secondari sia quasi raggiunto anche nel vetro che costituisce le pareti laterali della camera, e che aveva - ricordiamo - lo spessore di 1 cm.

Confrontando allora il numero dei secondari osservati rispettivamente con Pb, Fe, e vetro si può valutare approssimativamente come varia il rapporto; elettroni secondari/mesotroni, al variare del numero atomico della sostanza attraversata dai mesotroni. Si trova rispettivamente per il Pb, Fe e vetro il valore 3 %, 4 %, 3 %. Tale valutazione è certamente assai grossolana, ma potrebbe comunque indicare che il numero dei secondari non varia notevolmente al variare del numero atomico della sostanza attraversata.

La frequenza dei secondari da noi valutata, è notevolmente inferiore a quella osservata dagli autori citati ⁽³⁾. A nostro avviso ciò dipende principalmente dal fatto che gli autori citati hanno fotografato la camera in una sola direzione e quindi hanno valutato come generate da secondari dei mesotroni molte tracce che in realtà appartenevano a particelle diverse che solo per caso sono state fotografate contemporaneamente al mesotrone che aveva provocato l'espansione della camera.

Infine dall'ultima colonna della tabella si ricava che il valore medio dell'angolo di diffusione dei secondari rispetto al mesotrone primario è sensibilmente uguale nei tre casi del Pb Fe e vetro, e che i secondari duri formano in media con il primario angoli notevolmente inferiori a quelli formati dai secondari molli.

Tutto ciò sta ad indicare che i secondari osservati sono quasi esclusivamente costituiti da elettroni di bassa energia, emessi con frequenza e distribuzione angolare in prima approssimazione indipendenti dal numero atomico della sostanza attraversata dai mesotroni.

Le esperienze fatte su questi secondari con contatori anche a pareti sottili possono quindi venire fortemente influenzate dall'assorbimento delle pareti stesse. Meno critica invece appare l'influenza della disposizione angolare. I risultati delle misure con contatori, che indicano più frequenti i secondari generati da sostanze a basso numero atomico, possono venire interpretati come dovuti all'eliminazione dei secondari meno veloci per opera delle pareti dei contatori.

I secondari del tipo « dal basso in alto » numerati nella colonna 7, rappresentano un evento che si osserva con frequenza del 0,4 % rispetto al numero dei mesotroni e del 10 % rispetto a quello dei secondari. Essi si possono identificare con quelle radiazioni osservate già da tempo da diversi AA. ⁽⁷⁾ negli sciami della componente molle, provenienti dal basso, e chiamate « Ruckstrahlung ». Si tratta anche qui di radiazione elettronica molle.

(7) K. HOSEMAN, « Zeit f. Phys. » 100, 212, 1936.

Antropologia. — *Sulla morfologia cerebrale del secondo paleantropo di Saccopastore* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ preliminare di SERGIO SERGI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Le osservazioni che sono oggetto di questa Nota riguardano il cranio di paleantropo scoperto in vari frammenti da Alberto Carlo Blanc e dal Breuil nel 1935 nella cava di Saccopastore e che viene indicato come Saccopastore II ⁽³⁾ per distinguerlo dal primo che fu rinvenuto nel 1929 nella stessa località. Dopo la ricostruzione da me compiuta, il teschio risulta conservato in gran parte della faccia e più completamente a destra e nella porzione basale destra della parte cerebrale. Di quest'ultima è rimasta: a) nel piano anteriore, quasi per intero, la parte orbitaria del frontale e, parzialmente, la fossa etmoidale; b) nel piano medio completamente la fossa temporosfenoidale fino al limite della fossa ipofisaria, di cui si delinea il margine laterale; c) nel piano posteriore la parte infero-laterale della fossa cerebellare. Il cranio appartiene per il complesso delle sue caratteristiche ad un individuo adulto e probabilmente di sesso maschile.

IMPRONTE CEREBRALI.

Nella parte endocranica conservata della base a destra si possono facilmente rilevare le impronte cerebrali in corrispondenza della bozza orbitaria del frontale e della fossa sfenotemporale. Sono queste le due regioni nelle quali i solchi ed i giri cerebrali, meglio che in qualsiasi altra superficie della cavità cranica determinano impressioni caratteristiche

(1) Dall'Istituto di Antropologia dell'Università di Roma.

(2) Presentata nell'Adunanza del 10 aprile 1942-XX.

(3) ALBERTO CARLO BLANC e H. BREUIL, *Rinvenimento « in situ » di un nuovo cranio di « Homo neandertalensis » nel giacimento di Saccopastore (Roma)*. « Atti R. Acc. Naz. Lincei » 1935; ALBERTO CARLO BLANC, *Saccopastore II*. « Riv. di Antropologia », XXX, 1933-1934. SERGIO SERGI, *Die Entdeckung eines weiteren Schädels des « Homo neandertalensis var. anienensis » in der Grube von Saccopastore (Rom)*. « Anthropol. Anzeiger », XII, 1935.

e definite, che permettono di essere riconosciute con sufficiente esattezza. Un calco della base da me eseguito ha reso più facile e più precisa l'osservazione.

Superficie orbitaria del lobo frontale.

Ha una forma irregolarmente quadrangolare, osservata secondo il suo sviluppo massimo, per cui si può bene distinguere nel suo contorno oltre i lati mediale e posteriore un lato anteriore da uno laterale. Questa superficie non è pianeggiante, ma è costituita da due parti, una laterale ed una mediale. La prima quasi orizzontale, leggermente inclinata in basso ed all'esterno, la seconda fortemente inclinata in basso ed all'interno. Le due parti sono quasi di eguale estensione. L'angolo compreso tra esse è di circa 140°. Questa condizione dà luogo ad un forte dislivello tra il margine mediale ed il laterale, che là dove è maggiore è in proiezione di 15 mm. circa. Questa altezza massima in proiezione dà un'idea della estensione del cosiddetto becco encefalico o rostro, il quale è caratteristica delle forme primitive e dei neandertaliani, ma si incontra non di rado anche in forme attuali.

Juga e impressiones digitatae della bozza orbitaria del frontale sono molto pronunziate e numerose. Esse permettono di ottenere un calco che dà un'immagine abbastanza chiara della morfologia della superficie orbitaria del lobo frontale. (Si vedano le figure delle due tavole annesse).

Il solco orbitario è rappresentato da un sistema complesso di rilievi in gran parte fra loro confluenti. Un primo rilievo, molto esteso, si volge ad arco convesso in avanti, parallelamente al margine anteriore del polo temporale: per il suo decorso esso corrisponde al solco orbitale trasverso di Weisbach, solco presilvio di Rauber o solco orbitario arcuato di Kohlbrugge e quest'ultima denominazione ho già preferita nelle mie ricerche sul cervello degli Herero (¹). Il rilievo corrispondente a questo solco può essere distinto in tre segmenti: uno mediale (O_3 = ramo mediale posteriore); uno intermedio (O_2 = ramo trasverso), ed uno laterale (O_1 = ramo laterale posteriore), i quali rispettivamente rappresentano altrettanti segmenti del solco. Il limite fra i due segmenti del rilievo posteriore è segnato dall'origine di due rilievi che partono dalla sua convessità anteriore. Questi due rilievi a direzione sagittale sono paralleli fra loro, arcuati, con la concavità volta medialmente. Essi terminano in vicinanza del margine anteriore del piano orbitario. Dal lato convesso del rilievo

(¹) SERGIO SERGI, *Cerebra Hererica* in SCHULTZE, *Forschungsreise im westlichen und zentralen Südafrika, ausgeführt in den Jahren 1903-1905*. «Denkschriften der medizinisch naturwissenschaftl. Gesellschaft», Bd. XV, Jena, 1909.

mediale si origina un rilievo arcuato con concavità obliqua anteriore, che divergendo alquanto medialmente costituisce una branca di esso.

I due rilievi sagittali corrispondono a due solchi anteriori, rami anteriori del solco trasverso, uno laterale (O_4 = ramo laterale anteriore), ed uno mediale (O_5 = ramo mediale anteriore). La branca del rilievo mediale è l'impronta di un ramo (O_6) del solco mediale (solco accessorio anastomizzato).

Il sistema del solco orbitario, come è stato descritto può essere riportato a quello del tipo triradiato e, seguendo lo schema del Beccari, ⁽¹⁾, i segmenti da me individuati corrisponderebbero a quelli del Beccari nel modo che segue:

$O_5 = O_1$	di Beccari	ramo anteriore
$O_2 = O_2$	»	» laterale
$O_3 = O_3$	»	» posteriore
$O_4 = O_5$	»	» laterale accessorio
$O_4 = O_5$	»	» laterale accessorio.

Se si vuole riportare al tipo ad H, allora la branca trasversale è rappresentata da O_2 .

Medialmente ai due rami anteriori si svolge un altro rilievo indipendente, arcuato, parallelo ai precedenti. Esso corrisponde ad un solco accessorio (O_7) mediale, che il Beccari designa con O_4 nel suo schema.

Lateralmnte a tutto il sistema un altro rilievo parallelo ai precedenti a concavità laterale individua il solco subfrontale o frontomarginale laterale (fmrl). Infine presso il margine mediale si può per un certo tratto riconoscere il rilievo corrispondente al solco olfattorio.

Come risulta da questi tratti, la morfologia della superficie orbitaria presenta le caratteristiche di una notevole evoluzione in rapporto alla girificazione e solcatura. Il solco orbitale trasverso secondo Elliot Smith segna il limite anteriore dell'area orbitale. Innanzi a questa si svolgono le aree frontomarginale e prefrontale, che sarebbero divise da un ramo anteriore del solco trasverso. Certamente lo sviluppo della solcatura in questa regione è indice di evoluzione delle aree che nella detta regione sono una caratteristica umana. Il Genna da tempo ha rilevato che «il costituirsi nell'uomo di un solco arcuato posteriore tipico è probabilmente in rapporto alla comparsa dell'area orbitale, che si sviluppa nella parete superiore del tronco della fessura laterale del cervello (gyrus praesylvius di Rauber): quest'area insieme all'area triangolare e all'area opercolare

⁽¹⁾ NELLO BECCARI, *La superficie degli emisferi cerebrali dell'uomo nelle regioni prossime al rinencefalo*. « Archivio di Anatomia e Embriologia », vol. X, 1911.

forma la subregio frontalis inferior di Brodmann che è una acquisizione umana » (1).

Anche non seguendo le idee di Kohlbrugge e di Landau sul modo di interpretare le origini del solco arcuato, certamente è da ritenere che lo sviluppo di quest'ultimo è l'espressione di una evoluzione in senso trasversale della regione della corteccia orbitaria che è in relazione con le aree di evoluzione tipicamente umane che premono in due direzioni opposte, una lateromedialmente, l'altra frontocaudalmente. Ciò è anche grossolanamente rilevato dal modificarsi della forma della superficie orbitaria che è triangolare nelle scimmie, quadrangolare nell'uomo.

Lobo temporale.

A causa delle mutilazioni laterali e posteriori della parete cranica il lobo temporale può essere soltanto seguito parzialmente e cioè per tutta quella porzione che occupa la fossa temporale e per un tratto a questa soprastante e retrostante, i cui limiti sono segnati dalla estensione della frattura della squama temporale, la quale è distrutta secondo una linea irregolare a concavità superiore, di cui il punto più basso cade innanzi a livello delle estremità superiore della articolazione sfenotemporale ed il più alto cade indietro a circa 15 mm. sopra il piano dell'angolo superiore della rocca. Per tali condizioni del cranio manca quella parte della squama temporale, a cui corrisponde dal lato interno l'impronta del giro temporale superiore e parzialmente indietro l'impronta del giro temporale medio, mentre appaiono invece completamente conservate le impronte dei giri e solchi del polo temporale per la ottima conservazione di tutta la fossa temporale interna.

Quanto si può attribuire al giro temporale superiore (Ts) appartiene unicamente al polo temporale ed è rappresentato da quella parte superoantere del medesimo che segna il limite inferiore della fessura di Silvio. Questo estremo rostrale del giro è indicato da una fossetta della parete laterale della fossa temporale, che è medialmente individuata da una cresta che si dirige verso l'estremità superoanteriore del polo. Questa cresta come la fossetta appartengono alla parete cerebrale della grande ala dello sfenoide e si svolgono subito al di sotto del margine parietale di quest'osso. La cresta è l'impronta di un solco (ts) a direzione obliquo-sagittale, che corrisponde al solco temporale anteriore di Elliot Smith, che nello schema abituale viene considerato come il segmento più anteriore

(1) GIUSEPPE GENNA. *Sulla morfologia dei solchi cerebrali dell'uomo con osservazioni su cervelli di indigeni del Camerun.* « Riv. di Antropologia », vol. XXVI. 1924-1925.

del solco temporale superiore. Secondo le mie precedenti ricerche esso deve essere distinto e fa parte del sistema dei solchi temporo-polari⁽¹⁾.

Il decorso del giro temporale medio (Tm) appare evidente, perchè è tracciato da una larga doccia la quale, in alto ed indietro nel lato della frattura della squama per tutta la estensione di questa confina con la linea di frattura, in alto ed innanzi, sorpassata la sutura sfenotemporale, ha per limiti la cresta sfenoidale del solco temporale anteriore. I limiti inferiori della doccia del giro temporale medio sono nettamente segnati da un sistema di creste ondulate l'una in continuazione dell'altra. Questo sistema si origina indietro con un rilievo poco accentuato, che si inizia presso il margine della frattura sulla parete cerebrale del piccolo frammento dell'angolo mastoideo del parietale. Il rilievo, sorpassata la sutura temporoparietale, segue la parete della squama temporale divenendo sempre più forte e termina in un vero tubercolo a base triangolare e con tre facce, che individuano tre creste, di cui una è la continuazione del rilievo fin qui descritto e le altre due si volgono in direzione opposta una medialmente e l'altra lateralmente. Ai limiti anteriori di queste la cresta è interrotta dal profondo solco obliquo trasversale del ramo anteriore dell'arteria meningea media. Al di là di questo solco, nella stessa direzione principale della cresta fin qui descritta, appare un'altra cresta che si svolge nel fondo della fossa temporale alquanto lateralmente e divisibile in due segmenti, uno anteriore ed uno posteriore. Questa cresta decorre parallelamente a quella del solco temporale anteriore ed interessa il polo temporale.

Il sistema di creste descritto corrisponde al decorso del solco temporale medio (tm) e quindi ai segmenti che lo costituiscono. Il rilievo, che interessa indietro il parietale e si estende sul temporale, corrisponde al segmento del solco temporale medio che si continua con la parte principale del medesimo che raggiunge la sua massima profondità a livello del tubercolo, che chiameremo tubercolo del solco temporale medio. A questo punto il solco termina biforcandosi in due rami o segmenti, che si dirigono rispettivamente uno in alto e l'altro in basso. La cresta anteriore corrisponde ad un segmento anteriore dello stesso solco che incide il polo temporale fin quasi alla sua estremità anteriore e si svolge al di sotto e medialmente al solco temporale anteriore.

Medialmente ed inferiormente alle creste del solco temporale medio si svolge una doccia profonda, che decorre nell'angolo tra la base della piramide e la squama e giunge fino al fondo della fossa temporale. A questa doccia corrisponde l'impronta del giro temporale inferiore (Ti); ma la sua morfologia è complessa, perchè insieme con l'impronta del detto

(¹) SERGIO SERGI, *Cerebra Heretica*, loc. cit.

giro, si combinano le impronte dei rami dell'arteria meningea media ed i rilievi della parete del labirinto osseo. La doccia del giro temporale inferiore è divisa in due porzioni, una anteriore ed una posteriore, da un solco trasversale, che è l'impronta del ramo anteriore dell'arteria meningea media. La porzione posteriore della doccia si approfonda, perchè nel suo fondo decorre il solco del ramo posteriore dall'arteria meningea media. La porzione anteriore della doccia si trova nel fondo della fossa temporale e qui è delimitata lateralmente dalla cresta del segmento anteriore del solco temporale medio ed individuato da una cresta che separa il decorso di un solco parallelo al precedente e che appartiene ad un segmento anteriore del solco temporale inferiore. La porzione posteriore della doccia, dietro il solco del ramo anteriore della meningea media, è delimitata da una cresta che nella sua estremità anteriore si confonde con l'estremità anteriore della eminenza arcuata. Bene si individualizza nella sua parte posteriore con un rilievo arcuato che divide la faccia superiore della piramide in due fossette, di cui la più laterale è l'estremità posteriore della doccia per il giro temporale inferiore; la mediale appartiene al lobulo fusiforme.

Dal complesso, come risulta da questa analisi minuta dei rilievi della regione temporale, si deve concludere che il lobo temporale, per la parte che si può esaminare, risulta riccamente girificato e solcato, come si riscontra in cervelli umani di *Fanerantropi*, cioè di uomini attuali.

Le varie circonvoluzioni temporali sono assai ben distinte, separate da solchi a decorso frontocaudale, che giungono fin quasi al polo temporale. Le circonvoluzioni sono relativamente assottigliate ed i solchi divisi in segmenti che, come si riesce a distinguere, hanno disposizioni che rientrano nello schema più complesso di evoluzione di quelle umane attuali. Ciò è dimostrato dal grado notevole di sviluppo del solco temporale medio e del solco temporale inferiore.

Particolare attenzione merita il grado di solcatura e girificazione dell'area temporo-polare. Si è visto che il polo temporale è percorso da tre solchi, che appaiono seguire innanzi la direzione rispettivamente dei solchi temporale superiore, temporale medio e temporale inferiore, decorrendo quasi equidistanti e paralleli tra loro. Questo gruppo di solchi costituisce un sistema, che deve essere considerato a parte, dei solchi temporali retrostanti e che io già proposi di chiamare solchi temporo-polari⁽¹⁾. La distinzione da me proposta non solo è in armonia con le condizioni morfologiche topografiche rilevabili macroscopicamente, come già dimostrarai, ma corrisponde alla distribuzione dei campi cellulari corticali

(1) SERGIO SERGI. *Sui solchi temporo-occipitali inferiori nel cervello dell'uomo*. « Riv. di Antropologia », vol. XVI, 1911.

ed anzi questa sta a spiegare i fatti morfologici. I segmenti temporopolari difatti si svolgono nell'area temporopolare (campo 38 di Brodmann) che si estende nella regione del polo temporale e che incontra caudalmente i campi temporali (20, 21, 22) a direzione sagittale. Lo stesso dicasi seguendo la classificazione delle aree secondo Economo, il quale ha rilevato che, mentre le aree temporali superiori (TA) e temporale propria (media ed inferiore TE_1 TE_2) hanno un decorso frontocaudale lungo le varie circonvoluzioni temporali e si portano lungo queste fin quasi al polo, questo è rivestito da una speciale formazione (TG) che lo incappuccia e che ricopre anche l'estremo anteriore della faccia dorsale silviana della prima circonvoluzione temporale.

Io facevo notare fin dal 1908: l'area temporopolare è una zona recente che si aggiunge innanzi alle zone più antiche temporali, essa si sviluppa tra queste ed il residuo della grande circonvoluzione limbica nel fondo anteriore della fossa temporale del cranio ed i solchi sono tra gli ultimi ad apparire nella regione. I segmenti dei solchi temporopolari stanno qui a dimostrare che già l'uomo di Saccopastore nella corteccia dell'area temporopolare aveva raggiunto un grado di sviluppo, quale si incontra anche negli uomini attuali. Per l'importanza fisiologica della zona studiata ricordo che la isocorteccia stratificata che occupa la zona del giro temporale medio inferiore è del tipo frontale 2 di Economo e che sembra presiedere ai processi associativi motori.

IMPRONTE CEREBELLARI.

Cervelletto.

Dal lato interno la conservazione della squama occipitale è circoscritta soltanto a gran parte della fossa cerebellare destra e precisamente alla sua porzione latero-inferiore, giacchè la linea di frattura, a partire dalle vicinanze dell'angolo asterico, interrompe la detta fossa cerebellare obliquamente indietro ed in basso e di essa quindi è andata distrutta la porzione superiore mediale.

La fossa presenta, a partire dal margine di frattura mediale, varie impressioni digitate delimitate da rilievi, che si svolgono concentricamente l'uno al di sopra dell'altro e che si dirigono mediolateralmente verso la sutura occipito-mastoidea. La depressione più bassa o più anteriore, a forma ovale, a grande asse obliquo trasversale, è prossima al margine latero-posteriore del foro occipitale, separata da questo da un forte rilievo, che raggiunge più innanzi il margine del solco sigmoideo. Indietro è limitata da una crestinola che va degradando medio-lateralmente. Questa fossetta costituisce l'impronta del lobo digastrico cerebellare e la crestinola quella del solco postpiramidale (Dejerine).

A queste segue un'altra fossetta. più accentuata medialmente, abbastanza definita e determinata superiormente da un rilievo lineare. Questa fossetta corrisponde al lobo gracile del cervelletto e la cresta al solco semilunare inferiore (solco inferiore di Vicq d'Azyr). Al di sopra di quest'ultima si estende una fossa assai più ampia, limitata da una forte e larga cresta che si estende per lungo tratto della fossa cerebellare. La fossa è l'impronta del lobo semilunare inferiore, e la cresta, quella del grande solco circonferenziale di Vicq d'Azyr o solco semilunare superiore. Ancora al di sopra si può seguire per un certo tratto, in prossimità del margine di frattura, una depressione che corrisponde al lobo semilunare superiore.

Tutte le formazioni cerebellari che si sono potute mettere in evidenza appartengono al lobulo ansiforme di Bolk che sembra, secondo questo autore, presiedere alla coordinazione dei movimenti delle estremità superiori ed inferiori (vedi gli studi di Ingvar e l'opera di Kappers). È degno di nota che lo sviluppo cerebellare in Saccopastore II° è particolarmente notevole. Nel cervelletto umano si è organizzato un nuovo sistema di coordinazioni più complesso, che si è collegato alla posizione eretta ed alla specifica particolare attività degli arti superiori ed inferiori. Si deve pensare che la ricchezza dei meccanismi complessi fisiologici di coordinazione a carattere automatico ha già raggiunto nell'uomo di Neandertal uno sviluppo tale da metterlo già a gran distanza dalle scimmie e collegarlo strettamente agli uomini attuali, ai *Fanerantropi*.

* * *

Queste brevi osservazioni mettono in evidenza che la girificazione e solcatura della parte basale cerebrale (superficie orbitaria del lobo frontale, lobo temporale) prese in esame nel paleantropo di Saccopastore, hanno caratteri che si incontrano nell'uomo attuale. Tali formazioni rivelano l'esistenza di determinate aree corticali che sono esclusive dell'uomo e che per il loro significato funzionale stanno a testimoniare che un notevole grado di evoluzione era stato raggiunto da chi le possedeva. Per quanto le rilevazioni fatte siano limitate ad una parte molto circoscritta della superficie cerebrale e quindi non consentono di fare generalizzazioni assolute, esse sono di per sé indici rivelatori di condizioni psichiche che abitualmente vengono misconosciute al paleantropo, in contrasto con quanto viene già provato dai documenti della sua vita materiale e spirituale.

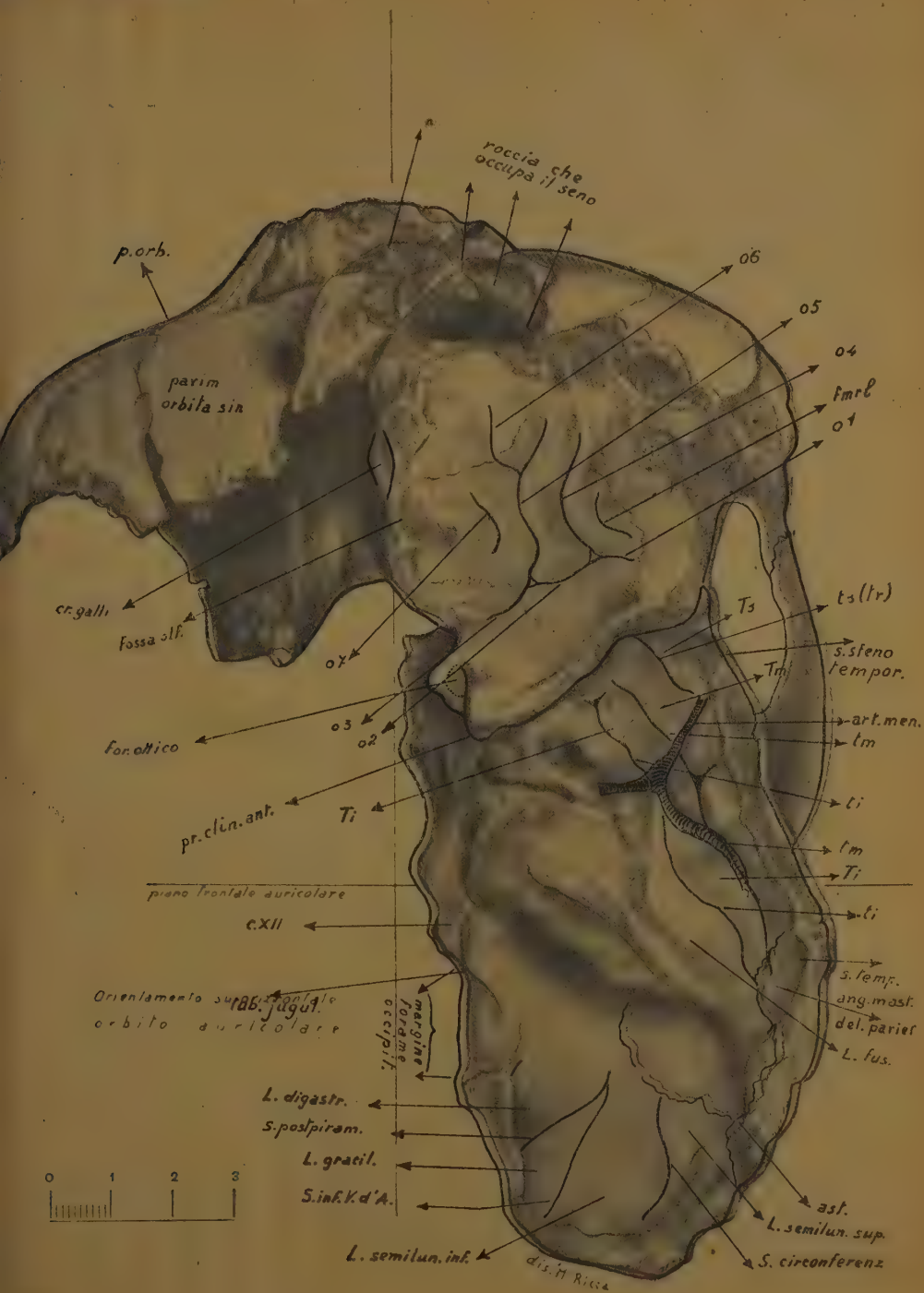
SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

Tav. I. — Fotografia in grandezza naturale della base della cavità del cranio del secondo paleantropo di Saccopastore. Il cranio è orientato sul piano orbito-auricolare.

Tav. II. — Disegno dello stesso cranio come si vede nella posizione e grandezza della fotografia della Tavola I.

La spiegazione delle abbreviazioni si trova nel testo.





Fisiologia. — *La siringe quale adattamento dell'organo di fonazione alla vita aerea.* Nota ⁽¹⁾ di GUSTAVO BRUNELLI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Gli uccelli, com'è noto, posseggono uno speciale organo di fonazione designato come siringe. Come cercai di dimostrare alcuni anni addietro lo sviluppo di tale organo è in stretta relazione colla meccanica del volo e colla fisiologia della respirazione nella vita aerea ⁽²⁾. Sebbene il noto anatomo comparato WIEDERSHEIM abbia citato detta Memoria nella bibliografia del suo classico trattato, tale lavoro (che destò anche l'interessamento di HAECKEL e di MAX FÜRBRINGER) non venne sufficientemente conosciuto e diffuso. Anche recenti trattati di anatomia e fisiologia comparata non danno sulla questione che notizie incomplete e non rispondenti più all'indirizzo della moderna anatomia comparata, fondata più sulle relazioni anatomiche fisiologiche ed etologiche che sulle speculazioni filogenetiche, ormai in declino.

Furono appunto le speculazioni filogenetiche che allontanarono anzi l'indagine causale, poichè trovandosi traccia di un simile organo in corrispondenza alla biforcazione della trachea nei bronchi in alcuni Rettili, come nel *Chelone Cinixys homeana*, fu deviata l'osservazione dal ritrovare un nesso tra siringe e vita aerea.

Nei Rettili non si può parlare di una vera siringe nè dal punto di vista anatomico nè da quello fisiologico. Si può piuttosto pensare, come nel Camaleonte, che produce mediante la laringe nell'espiazione una sorta di fischio stridente, per mezzo di uno speciale sacco giugulare (WIEDERSHEIM), a una condizione analoga a quella della ventilazione esercitata negli uccelli dai sacchi aerei.

Un oto-rinolaringoiatra di grande valore, il compianto prof. GUGLIELMO BILANCIONI, in una sua interessante Memoria e con la sua grande competenza accettò in massima tutte le considerazioni da me allora esposte sulle cause che hanno determinato la riduzione della laringe quale organo di fonazione e lo sviluppo della siringe negli uccelli, e ne

⁽¹⁾ Presentata nell'Adunanza del 10 aprile 1942-XX.

⁽²⁾ BRUNELLI G., *Sulle cause che hanno determinato la riduzione della laringe superiore e lo sviluppo della siringe negli uccelli.* « Avicula », Giornale ornitologico italiano, VIII, Siena, 1904.

ribadi l'interesse colla sua consueta dottrina anche storica, nella quale era particolarmente versato ⁽¹⁾.

Nella presente Nota esporrò, dando qualche maggiore dettaglio, gli argomenti che mi portarono a illustrare la origine della siringe, esponendo qualche nuova considerazione.

Di solito si dà a GIORGIO CUVIER il merito di aver scoperto il punto preciso dove si forma la voce negli uccelli; ma invece tale merito spetta, come ha dimostrato BILANCIONI, a ULISSE ALDROVANDI la cui attenzione fu specialmente attratta dall'apparato laringo-tracheale del Cigno.

Nel tempo in cui si pubblicava l'*Ornitologia* di ALDROVANDI, CASSERI e FABRIZI di Acquapendente attendevano ai loro trattati intorno alla laringe, nei quali però, pur essendo così ricchi di apparato erudito e critico, come osserva il BILANCIONI, non si faceva cenno degli organi scoperti da ALDROVANDI.

Il reperto di ALDROVANDI fu confermato da DU VERNEY (nel 1869) in un pollo, e fu ripreso fisiologicamente dal PERRAULT, il quale non dubitò che un organo così composto, piuttosto che a rinforzarla, servisse a produrre la voce, che fosse insomma una vera laringe, e volendo dimostrarlo ricordò il passo del *De Larynge* quando esponendosi dall'Acquapendente nell'anfiteatro le funzioni dell'organo vocale, si levò un uditore a dire: « Maestro, a un uccello morto soffiando in trachea ho trovato che mandava la stessa voce naturale quale da vivo ».

L'Acquapendente non aveva valutato appieno l'importanza di questa osservazione, fatta anche da LEONARDO: « in un collo di un cecere o d'un'oca, la quale spesse volte si fa cantare poi che è morta ».

Il PERRAULT nota poi un fatto che è molto significativo e sul quale scrive il BILANCIONI dovremo insistere a proposito della ipotesi formulata dal BRUNELLI: « l'usage del Poumon pour la voix est principalement remarquable dans les oiseaux où il a une structure particulière qui semble avoir rapport à ce qu'il y a de particulier dans la voix de ces animaux ». Il BRUNELLI, scrive il BILANCIONI, si è chiesto se non si dovesse trovare la ragione d'essere della siringe nella condizione di vita aerea; la siringe essendo propria degli uccelli, rivela un adattamento legato alla loro organizzazione generale, dato che al suo sviluppo corrisponde l'involuzione o il mancato sviluppo della laringe superiore. Già anche nei rettili la laringe non si è sviluppata quale organo di fonazione.

La laringe dei rettili rappresenta un progresso rispetto a quella degli anfibi nello stabilire la continuità delle vie respiratorie, ma un regresso quale organo di fonazione.

(1) BILANCIONI G., *Sul significato della laringe superiore e della siringe negli uccelli*. « Atti della Clinica oto-rino laringoiatrica della R. Università di Roma », Roma, 1921.

Quanto agli uccelli la laringe non era adatta quale organo fonatorio di vertebrati a vita aerea, soprattutto il modo della respirazione non la rendeva idonea alla produzione di suoni, mentre per le relazioni esistenti tra i sacchi aerei e i polmoni si manifestava la nuova condizione di produrre suoni durante il passaggio dell'aria dai bronchi nella trachea, là dove essi convergono.

CUVIER aveva scorto una parte sola di questa verità quando scriveva: « il gran volume d'aria contenuto nei sacchi aerei contribuisce alla forza della voce negli uccelli ».

A CUVIER spetta pure il merito di avere per primo studiato il passaggio dell'aria attraverso la siringe. L'esperienza di CUVIER fu poi ripetuta e perfezionata da SAVART: questi, valendosi della fisica, ha dato importanza al fatto che l'incontro di due bronchi alla base della trachea effettua buone condizioni per la produzione di certi suoni. Ma come dice il BILANCIONI, commentando la mia ipotesi, una tale notizia isolata non condusse a una soluzione, non pensandosi all'indipendente ridursi della laringe e alla presenza dei sacchi aerei e non comprendendosi il loro giusto modo di funzionare. RÜPPEL ⁽¹⁾ ha di recente rilevato che non si è data abbastanza importanza alla posizione della siringe rispetto al sacco clavicolare, e che si è troppo insistito da CUVIER e da MÜLLER sul paragone colla laringe.

La siringe è specialmente un organo fonatorio adatto a produrre suoni solo nella espirazione, come già scrissi e come RÜPPEL di recente ha anche giustamente rilevato.

Secondo l'ipotesi da me enunciata la siringe tracheo-bronchiale dovrebbe essere la più comune; tale appunto si desume dallo studio degli anatomici.

Si potrà ancora discutere se la siringe bronchiale sia primitiva o no, sebbene vi siano argomenti per non ritenerla tale. Così a sua volta la siringe tracheale si trova in pochi generi di uccelli ed è con probabilità una modificazione della siringe tracheo-bronchiale.

Sarebbe erroneo ritenere che la mia ipotesi sullo sviluppo della siringe sia stata mossa solo da speculazioni filogenetiche.

Le mie prime speculazioni sulla origine della siringe mossero dalle osservazioni sul canto di alcuni uccelli, come rondini e rondoni; osservavo allora che nell'espirazione brusca in relazione alla meccanica del volo si producono specialmente i suoi più rimarchevoli, e che ventilazione dei sacchi aerei e produzione dei suoni sono intimamente collegati. L'aria che serve a ventilare i polmoni urtando nella confluenza dei bronchi, nel modificato respiro degli uccelli in volo, deve avere originato l'inizio della

(¹) RÜPPEL W., *Physiologie und Akustik der Vogelstimme*. « Journal f. Ornithologie », 81, 1933.

siringe. Mi ponevo allora il quesito che data tale origine della siringe, nei Corridori tornati secondariamente alla vita terrestre, doveva riscontrarsi l'involuzione di ambedue gli organi di fonazione. Così è, e costituisce uno dei più notevoli esempi dell'importanza della fisiologia etologica.

Se la siringe fosse sviluppata nei Corridori, molto perderebbe, come scrisse BILANCIONI, la attendibilità della mia ipotesi; se ne avvantaggerebbe in caso diverso. Ciò appunto si riscontra; solo il Casoario produce un suono sordo che proviene da una tasca membranosa in comunicazione con la parte media della trachea.

È un fatto incontestabile che la siringe manca o è poco sviluppata in tutti quegli uccelli in cui la facoltà di volare è regredita per successivo adattamento alla vita terrestre.

Alle mie precedenti osservazioni e considerazioni ho cercato di aggiungerne altre cercando di spiegarmi: 1° l'incapacità di emettere suoni da parte della Cicogna e dei Condor; 2° le condizioni della fonazione in uccelli come i pinguini che perduta la facoltà del volo, sono invece adatti al nuoto particolarmente subacqueo.

La scomparsa della fonazione nelle cicogne si deve al fatto che dato l'eccezionale sviluppo del becco, non sembrano le più adatte a compiere con frequenza movimenti espiratori, specialmente in volo; a ciò si aggiunga anche la struttura dei bronchi. La Cicogna è uno dei pochi uccelli che sembrano affatto muti. Supplisce come è noto alla mancanza di voce con un rumore notevolissimo, fatto battendo insieme le due parti del lungo becco corneo. Ma anche questo rumore lo fa raramente e a quanto pare, come scrivono alcuni autori, sotto lo stimolo di un insolito eccitamento.

Nel Condor la scomparsa dell'organo di fonazione è probabilmente in relazione colle alte quote a cui si libra e colla meccanica del suo volo e colla struttura dei bronchi.

« Il volo di uno stormo di condor, scrive Carlo Darwin, è meraviglioso. Eccettuato il momento in cui si sollevano da terra, io non mi ricordo di aver veduto mai uno di questi uccelli battere le ali. Nei dintorni di Lima, osservai per circa mezz'ora senza mai distogliere lo sguardo, molti Condor che volavano; essi si movevano in larghi giri, si alzavano e si abbassavano senza mai un colpo d'ali ».

Passando a un adattamento diverso è molto interessante il fatto che i pinguini non sono uccelli adattati alla vita terrestre, come si riterebbe a prima vista, ma specialmente al nuoto subacqueo.

Forse in relazione a ciò la trachea dei pinguini è appiattita in senso dorso ventrale, e irrobustita da un sepimento divisorio.

Taluno ritiene, trovandosi tale disposizione di un setto tracheale in alcuni cheloni, che essa rappresenti una condizione primitiva; ma io suppongo, invece, che abbia un significato funzionale in rapporto collo special modo di vita dei pinguini stessi.

Da osservazioni da me fatte al Giardino zoologico sui pinguini dagli occhiali, essi sono pessimi cantatori, emettono suoni raramente e quasi con fatica, dopo aver pompato aria. Suoni monotoni emettono anche altre specie più grandi di pinguini, come si legge nei *Discovery Reports*. Certamente l'organo fonetico dei pinguini è in riduzione come in altri uccelli, che hanno perduto la facoltà di volare. Afona era forse l'alca impenne per quanto non abbia trovato traccia di ciò e da notizie datemi da alcuni colleghi di nazioni nordiche, l'*Alca torda* non canta.

Tra gli Apterigi il Kiwi emette una sorta di fischio, ma solo in casi eccezionali, in relazione anche al suo costume di vita notturno.

Quanto ai Corridori tipici come gli struzzi, come già rilevai nella mia precedente Memoria, la doppia involuzione della laringe e della siringe quali organi di fonazione costituisce una brillante conferma della attendibilità della mia ipotesi.

Gli struzzi rappresentano così la più bella dimostrazione che la siringe rappresenta un adattamento dell'organo di fonazione alla vita aerea, ed è noto che gli Acarenati o Ratiti hanno una origine polifiletica, e non monofiletica come una volta si credeva, ma comunque discendono da antenati volatori (Protocarenati di FÜRBRINGER e di PARKER). L'involuzione in essi della siringe acquista per ciò maggiore importanza perchè apparisce, così per convergenza, intimamente legata alle loro condizioni di esistenza.

Quanto ai caratteri particolari della siringe in alcuni uccelli specialmente acquatici (*anserres*) col notevole e ineguale sviluppo del così detto tamburo o cassa di risonanza, si può mettere in relazione con un rinforzo del suono, necessario soprattutto perchè la siringe nella sua origine era solo in special modo adatta quale organo di fonazione degli uccelli in volo.

È notevole che OWEN pose appunto una tal forma asimmetrica della siringe in rapporto con un rafforzamento più che con una varietà di suoni: «These modifications relate to the power rather than to the variety of the voice».

Quanto allo sviluppo della muscolatura della siringe non è esatto ciò che scrive qualche trattatista, che muova progressivamente dagli Acarenati; in essi si tratta di un fenomeno di involuzione.

Lo studio anatomico fisiologico dell'organo fonatorio degli uccelli posto in relazione col loro ambiente di vita mostra un grande interesse, e la fisiologia etologica, scienza del nostro tempo, è appunto chiamata a rinnovare l'anatomia comparata puramente filogenetica, e ormai isterilita, nel trovare nuove vie alla scienza e all'indagine, se non collegandosi allo studio fisiologico ed ambientale.

Zoologia. — *Una nuova larva di Tricottero del lago Margherita.* Nota di DINA LOMBARDI, presentata ⁽¹⁾ da GUSTAVO BRUNELLI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

In dodici diverse stazioni del Lago Margherita fu trovata, ad opera della Missione ittologica per l'esplorazione dei laghi della fossa Galla, una larva di Tricottero, che per la forma del labbro inferiore prolungato in una lunga e sottile appendice sembrò doversi attribuire o alla sottofamiglia delle Psychomyinae, oppure al gen. *Phylocentropos* Bancks (Polycentropidae): sono questi infatti, secondo Handlirsch i Tricotteri che presentano tale caratteristica conformazione del labium.

In base però alle pubblicazioni a mia disposizione non mi è sembrato di poterla sicuramente ascrivere nè all'una nè all'altro, anche per la mancanza della ninfa e dell'adulto. Perciò lasciando provvisoriamente in sospeso il compito di definire il genere e la specie, intendo dare una descrizione il più possibile precisa di questa larva, sperando di poter così anche contribuire a chiarificare la sua posizione tassonomica.

Lunghezza della larva mm. 12-20. Capo ovale, bruno, senza alcun disegno più chiaro: clipeo piuttosto largo, con margini laterali anteriormente divergenti, posteriormente sinuosi. Occhi posti in una zona più chiara. Antenne a forma di breve tubercolo, recanti due sensilli bacilliformi: presso ogni antenna una lunga setola. Labbro superiore trasverso, oltre due volte più largo che lungo, con margine anteriore depresso nella sua parte mediana, che è subrettilinea e fortemente sclerificata, arrotondato e prominente agli angoli: sulla superficie dorsale otto lunghe setole, sei delle quali distribuite in due gruppi di tre ciascuno, posti in corrispondenza degli angoli anteriori, le altre due situate più indietro (fig. 1).

Superficie ventrale qua e là rivestita di fini e brevi peli, con particolari addensamenti di setole formanti spazzola agli angoli anteriori.

Specialmente caratteristiche sono le mandibole, che sono asimmetriche per la conformazione del loro margine orale: quella di destra presenta oltre il dente apicale allungato un secondo dente triangolare, cui segue

(¹) Nell'Adunanza del 10 aprile 1942-XX.

una zona finemente denticolata (fig. 2): talora il dente triangolare si continua senza spiccata demarcazione con la zona dei denticoli, in modo che sembra formare con essi un'unica serie. La mandibola di sinistra ha invece oltre il dente apicale, altri due denti triangolari (fig. 3): entrambe portano anche, al loro margine orale, una fitta spazzola di corte e grosse setole nere. Al margine esterno presentano tre grossi denti, di cui quello più vicino all'apice è il maggiore.



Fig. 1.



Fig. 2.



Fig. 3.

Si distingue inoltre in ogni mandibola una faccia ventrale che è glabra, eccettuato un gruppo di tozze setole poste verso la parte distale del margine orale; ed una faccia dorsale. Questa presenta una serie di ottuse protuberanze che iniziata all'apice decorre lungo il margine orale da cui le più grosse di tali protuberanze sporgono in fuori facendolo apparire ottusamente tuberculato; ciò specialmente nella mandibola destra dove le protuberanze formano una serie lineare che decorre proprio lungo il margine del dente apicale (fig. 4). La serie di tali protuberanze si



Fig. 4.



Fig. 5.

continua poi sulla faccia dorsale delle mandibole fin verso la loro metà: ad essa fa seguito una corta costola rilevata, che delimita una stretta area subtriangolare, quasi una faccetta esterna. Sempre sulla faccia dorsale presso il terzo dente marginale esterno, si nota una grossa prominenza conica, vicino alla quale sorgono due lunghe setole (fig. 5).

Le mascelle non presentano una netta distinzione di parti: si può solo distinguere un lobo interno conico e rivestito di dense e lunghe setole, e uno esterno assai più piccolo su cui è inserito il palpo di quattro

articoli: di questi il terzo è il più lungo ed uguaglia in lunghezza il primo e il secondo presi insieme: il quarto è invece brevissimo (fig. 6).

Il labbro inferiore mostra il premento munito di un'enorme papilla sericipara, lungamente assottigliata all'estremo distale: esso presenta inoltre rudimenti di palpi labiali (fig. 7).

Il pronoto è sclerificato, trapezoidale, più largo in avanti e gradualmente ristretto indietro: i suoi angoli posteriori sono prolungati in un dente nerastro rivolto verso l'estremo caudale.

Mesonoto e metanoto interamente membranosi. Arti di lunghezza subeguale, quelli del primo paio, lievemente più corti degli altri, hanno la tibia brevissima ed apparentemente quasi fusa col tarso, essendo l'articolazione tibio-tarsale poco evidente. Il tarso è alquanto dilatato e porta



Fig. 6.



Fig. 7.



Fig. 8.

al suo lato esterno nella parte prossimale una frangia di tese e lunghe setole, nella distale corte setole spiniformi: queste, brevissime e fitte, rivestono anche quasi tutto il lato interno. L'unghia è leggermente incurvata e presenta ad un terzo dalla base una protuberanza sulla quale è impiantata una setola che non raggiunge l'apice dell'unghia. Sulla tibia, sul femore, sul trocantere e sull'anca, sono sparse rade e lunghe setole. La lunghezza del femore è di poco inferiore a quella della tibia e del tarso presi insieme. Da notare infine la praecoxa, la quale presenta un processo triangolare rivolto in direzione orale (fig. 8).

Negli arti del secondo paio l'articolazione tibio-tarsale è quasi del tutto invisibile: i due articoli sembrano fusi in uno unico di lunghezza subeguale al femore. Il tarso è rivestito al lato interno di fitte setole spiniformi brevi e termina in una spazzola di altre setole lunghe e robuste, tra cui rimane seminasosta l'unghia: questa è molto incurvata, e presso

la sua base sorge una grossa setola a forma di tozza spina. Setole lunghe e sottili sono sparse radamente sul tarso, sulla brevissima tibia e sugli altri articoli: inoltre una grossa setola spiniforme nella regione interna della tibia e del tarso e due simili pure al lato interno del trocantere.

Anche nel terzo paio si ha la quasi totale fusione della tibia e del tarso: gli arti di questo paio si distinguono perchè presentano, oltre alle setole presenti nel secondo, una grossa setola spiniforme all'estremo distale del femore. Inoltre le piccole setole spiniformi che rivestono il lato interno e ventrale del tarso si estendono anche sulla tibia (fig. 9).



Fig. 9.

Le appendici del 10° urite sono lunghe, di tre articoli: il primo è il più lungo di tutti, il secondo brevissimo il terzo poco più breve del primo (rapporto delle lunghezze: $1 : \frac{1}{4} : \frac{5}{7}$). L'ultimo articolo porta dieci lunghe setole nere e un'unghia molto ricurva. Questa larva oltre a 5 branchie anali molto lunghe, presenta alcune tracheo-branchie: due filiformi submediali, presso il margine caudale del metasterno, e due pure filiformi laterali: sul primo sternite due tracheo-branchie submediali, trifide. Inoltre la larva adulta presenta ai lati degli uriti una piega cutanea, che sul penultimo urite forma un'appendice lobosa talora molto sviluppata così da estendersi dal margine orale del penultimo urite fino alla metà dell'ultimo.

Tra gli esemplari raccolti, uno era parzialmente coperto da un bozzolo fatto di particelle argillose, da cui sporgeva con la parte anteriore. Questo bozzolo ha la forma di piccolo sacco ovale e altri di tali bozzoli furono pure trovati tra il materiale raccolto ma vuoti.

Matematica. — *Formole per la derivazione a indice generalizzato.* Nota ⁽¹⁾ dell'Accademico GIOVANNI GIORGI.

1. — Dopo quanto hanno scritto sulla derivazione a indice qualunque molti autori, da LEIBNIZ ad EULERO e a LIOUVILLE, da LAPLACE e da LAGRANGE fino a PINCHERLE, dopo il prospetto riassuntivo delle varie ricerche che ha dato HAGEN nella sua *Synopsis der höheren Mathematik*, dopo la trattazione moderna e razionale che ha dato la compianta A. M. MOLINARI ⁽²⁾, e dopo i contributi più moderni di FABIAN, di FUJIWARA, di LOVE, di SOKOLOFF, di MAMBRIANI, etc., sentiamo ancora la necessità di rivedere e completare i risultati.

L'asserzione di LAGRANGE, che la derivazione a indice qualunque sarebbe divenuta la base del calcolo dell'avvenire, sarebbe esagerata se l'accettassimo letteralmente nel suo significato ristretto, ma si giustifica se invece di applicarla alle sole operazioni del tipo Δ^n la riferiamo a tutto il calcolo operatorio che ha per oggetto le espressioni $f(\Delta)$ di forma qualsiasi ⁽³⁾. Comunque, anche le applicazioni delle sole derivazioni a indice qualunque sono ora talmente importanti che lo studio di questi algoritmi non è più, come nei primi tempi, una semplice curiosità matematica.

In questo breve scritto, non è mio intendimento trattare nella sua generalità l'argomento, ma bensì ricavare e riunire una serie di formole che principalmente occorrono per le applicazioni fisico-matematiche, e di cui devo fare uso in lavori ulteriori.

2. — Perchè i diversi autori nelle epoche passate hanno dato per $\Delta^n V(t)$ tante interpretazioni, fra loro discordi? e perchè le varie for-

⁽¹⁾ Presentata nell'Adunanza del 5 giugno 1942-XX.

⁽²⁾ Nei « Rendiconti Lincei », serie V, vol. 25 (1916 - B) pagg. 230-233 e pagg. 268-273.

⁽³⁾ Per teoremi di questo calcolo operatorio, e per le notazioni, mi riferisco ai miei scritti precedenti sull'argomento, segnatamente alla mia conferenza *Metodi moderni di calcolo operatorio funzionale*, « Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano », vol. VIII (1934) pagg. 189-214; e alla Bibliografia ivi contenuta; inoltre all'altro riassunto *Transitori fenomeni* che ho redatto come voce della « Enciclopedia Italiana », vol. supplementare primo, 1938, pagg. 1050-1065.

mole proposte, in particolare quelle, ben conosciute, di LIOUVILLE, sono rimaste quasi del tutto lettera morta? Perchè ebbero carattere di estrapolazioni arbitrarie, e non furono collegate a una teoria generale delle operazioni. Dalla teoria operatoria data dallo scrivente, risulta che quando n non è intero positivo, la valutazione generale di $\Delta^n V(t)$ contiene una o più o infinite costanti arbitrarie; e come esempio ovvio vale quello di n intero negativo.

A. M. MOLINARI, nella prima delle sue note citate, ha dato le condizioni esplicite a cui deve soddisfare la definizione della derivazione a indice qualunque affinchè risulti algebricamente utile e coerente con le altre definizioni dei simboli del calcolo infinitesimale. Queste condizioni vengono assorbite nel dire che Δ^n deve essere riguardata come un caso particolare degli $f(\Delta)$ che formano oggetto del calcolo operatorio, nella forma che ora è generalmente conosciuta e accettata.

La valutazione generale di $f(\Delta) V(t)$ dove $V(t)$ è funzione « fisica » di variabile reale, nel significato che ho già dato altrove a questa dizione, si compone di due termini, nella stessa guisa come l'integrale generale di un'equazione differenziale lineare omogenea qualunque; e cioè, una *valutazione particolare* più una *funzione complementare* che contiene le costanti arbitrarie. Il problema di determinare tale funzione complementare, pel caso di un indice n reale qualunque, non è ancora maturo per la soluzione; e non si è ancora presentato nelle applicazioni tecniche. Qui prendo in considerazione il quesito ristretto di determinare la *valutazione fondamentale*, cioè quella che WIENER ha chiamato *retrospettiva* e che è determinata univocamente dalla *condizione di successione*. Riferendoci al caso, più comune, in cui la variabile indipendente t rappresenti il tempo, questa condizione dice che nel risultato

$$[1] \quad W(t) = \Delta^n V(t)$$

per ogni singolo valore di t , il valore di $W(t)$ può dipendere dall'andamento precedente e da quello simultaneo di $V(t)$, non da quello che $V(t)$ avrà in avvenire.

Quando n è intero positivo, il risultato, non ammettendo pluralità di valutazioni, coincide con la derivata di ordine n , come intesa comunemente; e, ovviamente, per avere un significato, esige che le $V(t)$ sia derivabile altrettante volte.

[Per $n = -1$, si ha

$$[2] \quad \Delta^{-1} V(t) = \int_{-\infty}^t V(t) dt.$$

La $V(t)$, per soddisfare alla definizione di funzione fisica deve essere integrabile in ogni intervallo finito; ma l'integrale preso a partire da $t = -\infty$ potrebbe non essere convergente. Se $V(t)$ è una funzione di origine

fisica arbitraria, come potrebbe essere una forza impressa, questo caso di divergenza non si verifica, perchè allora $V(t)$ è nulla al di là di qualche epoca remota; nondimeno non conviene escludere detta eventualità, la quale comprende il caso semplicissimo $V = \text{costante}$. In tale caso diremo che la valutazione fondamentale non esiste, e che tante altre valutazioni particolari si ottengono ponendo al limite inferiore dell'integrale un valore t finito. Queste osservazioni, una volta per sempre, valgono per tutte le altre espressioni con cui avremo che fare.

Il caso $n = -N$ (con N indicheremo sempre un numero intero positivo) conduce all'integrazione N -pla, e non dà luogo a osservazioni particolari.

Veniamo all'ipotesi di n non intero. Implicitamente la teoria è stata data nel § 9, art. 35 della mia Memoria *Sul calcolo delle soluzioni funzionali* etc., «Atti Associazione Elettrotecnica Italiana», 1905. Le funzioni $j(n, t)$ che ivi si definiscono, non sono altro che l'applicazione dell'operazione Δ^n alla funzione impulsiva unitaria $Fu(t)$; cioè si definisce

$$[3] \quad j(n, t) = \Delta^n Fu(t)$$

di guisa che, salvo tener conto della possibilità che $j(n, t)$ contenga elementi impulsivi, e salvo introdurre un fattore di convergenza e un passaggio al limite, ove occorre, si ha sempre

$$[4] \quad \Delta^n V(t) = \int_{-\infty}^t j(n, t-\tau) V(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} j(n, \theta) V(t-\theta) d\theta.$$

Questa è una formola grezza, generale, che occorre esplicitare, discutendone le conseguenze. Seguirò le tracce della memoria citata. Ivi, utilizzando la teoria dei residui di CAUCHY, ho dimostrato anzitutto che

$$[5] \quad j(n, t) = \begin{cases} = 0, & \text{per } t \text{ negativo} \\ = \text{non impulsiva, o impulsiva, per } t = 0, \\ & \text{secondo che la parte reale dell'indice } n \text{ è minore di zero, oppure no} \\ = \frac{t^{-n-1}}{\Gamma(-n)}, & \text{per } t \text{ positivo} \end{cases}$$

e l'eventuale comportamento impulsivo, per $t = 0$, è definito prendendo in luogo di $j(n, t)$ questa espressione che contiene il fattore di convergenza:

$$[6] \quad j(n, t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} w^n e^{wt + \alpha w^2} dw$$

dove: il segno «lim» scritto fra parentesi significa che si deve passare al limite dopo aver introdotto $j(n, t)$ nelle espressioni integrali, come la

[4] ove esso è destinato a figurare; la variabile d'integrazione w è una variabile complessa; C significa il semicerchio infinito di destra del piano complesso, preso a partire da $w = -i\infty$ fino a $w = +i\infty$.

Si ricava cioè l'espressione generale

$$[7] \quad \Delta^n V(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\alpha=0} \int_V (t-\theta) d\theta \int_C w^n e^{w\theta + \alpha w^2} dw.$$

la quale però è necessaria soltanto per discutere quelle singolarità della soluzione che non sono facilmente esplicitabili per mezzo delle formole [4] e [5] combinate insieme.

Segue l'esame dei diversi casi che interessano la pratica.

Quando n è un numero reale negativo qualunque, si ottiene la formola [44] della memoria citata

$$[8] \quad \Delta^{-m} V(t) = \int_{-\infty}^t \frac{(t-\tau)^{m-1}}{\Gamma(m)} V(\tau) d\tau$$

ed è ovvio che nel caso di m intero si ritrova l'integrazione n -pla, espressa sotto diversa forma. Vedi, ivi, la formola [46] e le espressioni di $j(-m, t)$ in diversi casi: per $m=1$, si ha la funzione telegrafica unitaria $1(t) = \Delta^{-1} Fu(t)$.

Per la fisica matematica delle propagazioni è particolarmente importante il caso di m semi-intero, cioè $m = N + \frac{1}{2}$. Tenendo conto dei valori che assume la funzione gamma per argomento semi-intero, si ha

$$[9] \quad \Delta^{-(N+\frac{1}{2})} Fu(t) \equiv j\left(-N-\frac{1}{2}, t\right) = \frac{2^{2N} \cdot N!}{(2N)!} \frac{t^{N-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} 1(t)$$

e quindi

$$[10] \quad \Delta^{-(N+\frac{1}{2})} V(t) = \frac{2^{2N} \cdot N!}{(2N)! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^t (t-\tau)^{N-\frac{1}{2}} V(t-\tau) d\tau.$$

È da segnalare il sottocaso $m = \frac{1}{2}$, cioè le formole

$$[11] \quad \Delta^{-\frac{1}{2}} Fu(t) \equiv j\left(-\frac{1}{2}, t\right) = \frac{1(t)}{\sqrt{\pi t}}$$

$$[12] \quad \Delta^{-\frac{1}{2}} V(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{V(t-\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau.$$

Veniamo al caso più difficile, quello di n reale positivo non intero. Le singolarità, collegate come sono al comportamento impulsivo della fun-

zione generatrice $j(n, t)$, conseguono al fatto di $n > 0$ e sono quelle che quando n è intero, conducono a ritrovare le formole di derivazione, espresse come limiti d'integrali definiti.

Sia N l'intero immediatamente superiore a n , cioè poniamo

$$n = N - s$$

dove s è compreso fra 0 ed 1.

Si può sempre scrivere

$$\Delta^n = \Delta^N \Delta^{-s}.$$

E siccome Δ^N significa derivazione N -pla, e l'operazione Δ^{-s} rientra fra quelle che abbiamo già esplicitato, si può scrivere

$$[13] \quad \Delta^{N-s} V(t) = \frac{d^N}{dt^N} \int_{-\infty}^t \frac{(t-\tau)^{s-1}}{\Gamma(s)} V(\tau) d\tau.$$

Questa vale anche se N è un qualunque intero positivo superiore a n , anche se non è immediatamente superiore, quindi include come caso particolare molti altri risultati. Possiamo quindi accettarla come formola generale.

Notiamo che le formole date coi numeri [1] [2] e [3] Nella nota II di A. M. MOLINARI, sono d'accordo con le nostre [4] e [13].

Ivi dall'Autrice erano state assunte per definizione; e seguiva, ciò che è importante, la dimostrazione diretta che tutte e tre, combinate anche fra loro, soddisfano a tutte le proprietà algoritmiche sottintese dal simbolo Δ^n . Questo vale come riprova dei risultati ottenibili con l'applicazione del metodo operatorio.

Resta da discutere l'ultima formola ottenuta. Nel ricavarne calcoli effettivi, s'incontrano non poche difficoltà, in dipendenza dalle singolarità che può avere la funzione arbitraria $V(t)$. Tratterò il caso tipico $n = 1/2$. Questa derivazione d'ordine $1/2$ s'incontra in elettrotecnica, quando si ha una linea indefinita dotata di resistenza longitudinale e capacità trasversale uniformemente distribuite, e si vuol ricavare l'ampereaggio di entrata $I(t)$ in funzione del voltaggio $V(t)$ arbitrariamente applicato all'origine; similmente nella propagazione del calore lungo una sbarra indefinita, termicamente isolata, alla cui origine si suppone applicata una temperatura di andamento arbitrario $V(t)$ e si vuol ricavare il flusso di calore che entra nella sbarra. E così in molti altri problemi similari: la funzione incognita è la derivata di ordine $1/2$ della funzione arbitrariamente data.

La formola scritta dà

$$[14] \quad \Delta^{\frac{1}{2}} V(t) = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^t \frac{V(\tau) d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} = \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} \frac{V(t-\theta) d\theta}{\sqrt{\pi\theta}}.$$

Prescindiamo, come nei casi precedenti, dal discutere i casi di divergenza, reale o apparente che possono provenire dal comportamento di $V(t)$ per $t \rightarrow -\infty$. Le difficoltà più gravi sono quelle che possono provenire dal comportamento al finito.

Se la funzione fisica data $V(t)$ è derivabile *ovunque*, in tutto l'intervallo da $-\infty$ sino all'istante attuale, e se sono soddisfatte alcune condizioni necessarie per poter derivare sotto il segno integrale, si ha

$$[15] \quad \Delta^{\frac{1}{2}} V(t) = \int_0^{\infty} \frac{V'(t-\theta) d\theta}{\sqrt{\pi\theta}}.$$

Ma questa derivabilità non è da supporre in generale. Si vuol derivare di ordine $1/2$, e si intuisce che possano esistere funzioni che consentono tale derivazione e non quella di ordine uno. È anche possibile darne qualche esempio concreto: infatti, con un artificio noto, sappiamo costruire una serie trigonometrica che rappresenta una funzione continua, priva ovunque di derivata: alla serie trigonometrica, la derivazione a indice generalizzato si applica ricorrendo alla formola

$$[16] \quad \Delta^n e^{i\omega t} = (i\omega)^n e^{i\omega t}$$

è operando termine a termine sugli elementi componenti $A_M^{-1} e^{iM\omega t}$: ora è evidente che la successione dei coefficienti A_M può essere regolata in modo che la serie derivata di ordine uno non converga, e quella di ordine $1/2$ converga.

Se la funzione data $V(t)$ è periodica, questo metodo di decomporre in serie trigonometrica e di operare termine a termine, conduce generalmente a ottenere la derivata di ordine $1/2$, quando questa esiste. Se la funzione non è periodica, e se invece di sviluppare in serie, si sviluppa in integrale di FOURIER, si ottiene di nuovo la formola [14]. Occorrono quindi altri procedimenti per trasformare questa.

Un caso particolare che dà la chiave di molti altri è quello che $V(t)$ sia la funzione telegrafica unitaria $1(t)$. Poichè $1(t) = \Delta^{-1} Fu(t)$, si ha, applicando un risultato ottenuto poco fa

$$[17] \quad \Delta^{\frac{1}{2}} 1(t) = \Delta^{-\frac{1}{2}} Fu(t) = \frac{1(t)}{\sqrt{\pi t}}.$$

Ho altrove ricordato come questa formola coincida con quella che HEAVISIDE, avendo in mira questo solo tipo di operando $1(t)$, aveva divinato ed espresso con altri simboli. In tempi recenti, anche WAGNER ed altri hanno dato espressioni equivalenti.

Dalla formola per $1(t)$ ricaviamo varie conseguenze. Indichiamo, come al solito, con $A \cdot 1(t - t_0)$ una funzione che è nulla per $t < t_0$, ed ha

il valore costante A per $t > t_0$; quindi ha una discontinuità finita (un salto) A nel punto t_0 ; come al solito, il valore singolo per $t = t_0$, non si definisce e non interessa. In virtù della linearità e della « normalità » dei simboli operatori, si deduce

$$[18] \quad \Delta^{\frac{1}{2}} \cdot A \cdot 1(t - t_0) = A \frac{1(t - t_0)}{\sqrt{\pi(t - t_0)}}.$$

Se l'epoca t_0 è molto remota rispetto all'epoca attuale t , l'espressione a secondo membro tende a divenire evanescente. Ritenuto ammissibile un passaggio al limite, deduciamo che se $t_0 = -\infty$, cioè se la funzione operando è una costante, il secondo membro si annulla. Cioè *la derivata di ordine 1/2 di una costante assoluta è nulla*; e diciamo costante assoluta per intendere una funzione che sia ovunque costante, a partire da $t = -\infty$. Cioè si può scrivere

$$\Delta^{\frac{1}{2}} \cdot 1 = 0.$$

Si noti però bene che qui usiamo il simbolo 1 nel suo significato genuino, cioè per denotare una funzione che conserva sempre il valore 1 , da $t = -\infty$ fino a $t = +\infty$, non nel significato $1(t)$, come con troppo sommario simbolismo hanno usato HEAVISIDE, CARSON, WAGNER ed altri autori.

Deduciamo anche un altro risultato. Se $V(t)$ è ovunque derivabile, salvo in un punto t_0 , ove ha una discontinuità finita con salto A , si può risolverla nella somma di una $\bar{V}(t)$ sempre continua e derivabile (salvo al più nel punto t_0), e di una $A \cdot 1(t - t_0)$. In quel caso otteniamo

$$\Delta^{\frac{1}{2}} V(t) = \int_0^\infty \frac{\bar{V}'(t - \theta) d\theta}{\sqrt{\pi\theta}} + A \frac{1(t - t_0)}{\sqrt{\pi(t - t_0)}}.$$

Proseguendo: — se $V(t)$ è ovunque derivabile, salvo in un numero finito, o un'infinità numerabile di punti $t_1, t_2 \dots$ con discontinuità $A_1, A_2 \dots$, si ha il risultato mediante un'espressione come quella ora scritta, salvo che invece del singolo termine finito, interviene una sommatoria; e quando i termini sono in numero infinito, la sommatoria potrà convergere o no; l'eventuale divergenza sarà un'indicazione che quella $V(t)$ non è atta alla derivazione di ordine $1/2$.

I casi di interpretazione elementare si arrestano, è da temere, a questo punto. Un caso tipico difficile, in cui i metodi diretti per la derivazione sotto il segno integrale non riescono, è quello, già accennato, di una $V(t)$ ovunque continua, e non derivabile in alcun punto. Si vorrebbe ottenere una trasformazione della formola [14], tale che quando la derivazione di ordine $1/2$ esiste, sia convergente e dia un risultato determinato, altrimenti non converga.

La prima idea per arrivarvi sarebbe di cercare la funzione generatrice dell'operazione $\Delta^{\frac{1}{2}}$, cioè la

$$j\left(\frac{1}{2}, t\right) = \Delta^{\frac{1}{2}} Fu(t).$$

Per ottenere questa, si dovrebbe derivare la funzione rappresentata dalla [17]. Ma siccome questa funzione ha una discontinuità infinita per $t = 0$, nasce in questo punto una funzione impulsiva d'area infinita, seguita, come « coda » dalla funzione $-\frac{3}{2}t^{-3/2}$, la quale abbraccia, fra $t = 0$, e t finito positivo, un'area infinita negativa; fra le due aree deve esistere una compensazione in modo da risultarne qualche cosa di paragonabile al « momento » finito che avrebbe una funzione impulsiva di secondo ordine. Il nostro simbolismo non è ancora esteso al punto da poter rappresentare un tale elemento matematico e utilizzarlo nelle formole.

Riprendendo un suggerimento che ho dato da principio, si potrebbe anche rappresentare il risultato sotto forma di limite, per esempio, così:

$$[19] \quad \Delta^{\frac{1}{2}} V(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} V(t-\theta) d\theta \int_C w^{\frac{1}{2}} e^{w\theta + \alpha w^2} dw.$$

Accenniamo un altro metodo di trasformazione, dovuto al prof. ZIN: per la validità di esso basta supporre che $V(t)$ si annulli al di là di una certa epoca remota, e che soddisfi a certe condizioni di regolarità al finito, e in particolare sia limitata nell'intorno dell'epoca attuale t .

L'espressione che deve essere derivata, cioè

$$\int_0^{\infty} \frac{V(t-\theta)}{\sqrt{\pi\theta}} d\theta$$

si può trasformare integrando per parti, scegliendo $V(t-\theta) d\theta$ come fattore differenziale: essa prende allora la forma

$$\left[\frac{1}{\sqrt{\pi\theta}} \int_0^{\theta} V(t-\theta') d\theta' \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\theta} V(t-\theta') d\theta' \right) d \left(\frac{1}{\sqrt{\pi\theta}} \right).$$

Come conseguenza delle ipotesi restrittive fatte, il primo termine si annulla; e con la posizione $t-\theta' = s$, l'altro termine si scrive così

$$f(t) = - \int_{\theta=0}^{\infty} \left(\int_{t-\theta}^t V(s) ds \right) d \frac{1}{\sqrt{\pi\theta}}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
 [20] \quad \Delta^{\frac{1}{2}} V(t) &= \frac{df(t)}{dt} = \int_0^\infty [V(t-\theta) - V(t)] d \frac{1}{\sqrt{\pi\theta}} = \\
 &= \int_0^\infty \frac{1}{2\theta\sqrt{\pi\theta}} [V(t) - V(t-\theta)] d\theta
 \end{aligned}$$

e ponendo di nuovo $t - \theta = \tau$, si ha infine

$$[21] \quad \Delta^{\frac{1}{2}} V(t) = \int_{-\infty}^t \frac{V(t) - V(\tau)}{2(t-\tau)\sqrt{\pi(t-\tau)}} d\tau$$

relazione che è valida anche per una $V(t)$ non derivabile.

Notiamo che l'essere $V(t)$ continua e limitata non è condizione nè necessaria nè sufficiente per l'esistenza della derivata di ordine $1/2$, nè per la convergenza delle espressioni ottenute.

La ricerca di condizioni appropriate per ottenere il risultato, e di altre formole atte a rappresentarlo, resta tuttora aperta.

Matematica (Geometria). — *Sul sistema Jacobiano di un sistema lineare di curve sopra una superficie algebrica.* Nota di GIUSEPPE GHERARDELLI, presentata ⁽¹⁾ dall'Accademico FRANCESCO SEVERI.

1. Sopra una superficie algebrica irriducibile F le curve Jacobiane delle reti estratte da un sistema lineare irriducibile ∞^r di curve sono equivalenti, ma se $r > 3$ non costituiscono *da sole*, in generale, un sistema lineare. Infatti, in generale, la varietà delle reti (razionale ma non lineare se $r > 3$) e la varietà delle relative Jacobiane si corrispondono birazionalmente senza eccezioni ⁽²⁾. Ma può accadere, anche per $r > 3$, che la varietà delle Jacobiane sia lineare. Per esempio: le Jacobiane delle reti di coniche del piano costituiscono il sistema lineare completo delle cubiche piane.

Questo scritto ha per oggetto la determinazione di quei sistemi lineari irriducibili di curve per i quali avviene che le Jacobiane delle reti da essi estratte costituiscono da sole un sistema lineare ⁽³⁾.

2. Si consideri su F un sistema lineare irriducibile $|C| \infty^r$ di curve ($r > 3$). Una rete generica di curve C ha Jacobiana J ben determinata: la curva J è funzione razionale della corrispondente rete. Il sistema algebrico $\{J\}$ di tutte le J è irriducibile come totalità di curve. Se il sistema $\{J\}$ liberato da eventuali parti fisse, si compone di curve riducibili, la superficie Φ di S_r (semplice o multipla) immagine proiettiva di $|C|$ è sviluppabile e inversamente. Se Φ non è un cono la dimensione di $\{J\}$ vale $3(r-2)$: perchè a $3(r-2)$ piani tangenti di Φ è appoggiato qualche $[r-3]$ che non incontra tutti i piani tangenti di Φ . Se Φ è un cono la dimensione di $\{J\}$ vale la dimensione degli $[r-2]$ per il

⁽¹⁾ Nell'Adunanza del 5 giugno 1942-XX.

⁽²⁾ SEVERI, *Serie, sistemi di equivalenza e corrispondenze algebriche sulle varietà algebriche*, vol. I, pag. 204, Ed. Cremonese, Roma, 1942.

⁽³⁾ La ricerca analoga per le curve, iniziata in una mia breve Nota (« Rend. Lincei », ser. VI, vol. 6 [1927], pag. 286), è svolta nella Memoria di B. SEGRE (« Mem. Lincei », ser. VI, vol. 2 [1928], pag. 578).

vertice cioè $2(r-2)$: $|C|$ contiene allora un sistema lineare ∞^{r-1} di curve composto con un'involuzione in un fascio e inversamente.

La curva generica di $\{J\}$, fuori di eventuali parti fisse, sia ora irriducibile. Si considerino il sistema lineare $|C-P|$ costituito dalle C che passano per un generico punto P di F e un sistema lineare $\sigma \infty^3$ estratto genericamente da $|C|$. Le Jacobiane delle reti di σ formano un sistema lineare irriducibile ∞^3 nel quale esiste una curva che ha in P punto doppio: la Jacobiana della rete comune a σ e $|C-P|$. Nel passaggio da $|C|$ a $|C-P|$ la dimensione di $\{J\}$ decresce di 3 unità. Così procedendo per $r-2$ volte si perviene a una rete irriducibile per la quale quella dimensione vale zero. Pertanto: *La dimensione del sistema $\{J\}$ vale $3(r-2)$ se $|C|$ non contiene un sistema lineare ∞^{r-1} di curve composto con un'involuzione in un fascio; nel caso opposto quella dimensione si riduce a $2(r-2)$.*

3. Si torni a considerare la superficie Φ di S_r immagine proiettiva di $|C|$. Una curva di Φ appartiene ad $|J|$ quando i piani tangenti a Φ nei punti della curva stessa (incontrano un medesimo $[r-3]$ cioè) appartengono ad un complesso lineare speciale di piani di S_r . Un complesso generico di piani di S_r contiene ∞^1 piani tangenti di Φ ; il luogo dei relativi punti di contatto è una curva che, al variare del complesso, descrive su Φ un sistema lineare S di curve contenente totalmente, fuori di eventuali parti fisse, il sistema $\{J\}$. Anzi, fra i sistemi lineari di curve che contengono totalmente $\{J\}$, il sistema S ha la dimensione minima; poichè ogni complesso lineare di piani, come risulta subito dalla sua equazione, è combinazione lineare di complessi lineari speciali. Il sistema $\{J\}$ appartiene al sistema S . Se dunque $\{J\}$ è lineare, il sistema S avrà la dimensione $3(r-2)$ o $2(r-2)$ secondochè Φ non è un cono. Se δ_r o rispettivamente δ'_r è il numero dei complessi lineari l. i. che contengono la varietà dei piani tangenti di Φ si avrà:

$$\delta_r = \binom{r+1}{3} - 1 - 3(r-2) = \frac{(r-2)(r-3)(r+5)}{6};$$

$$\delta'_r = \delta_r + r - 2 = \frac{(r-1)(r-3)(r+4)}{6} + 1.$$

4. Si può osservare che δ_r (δ'_r) è il massimo numero di complessi l. i. cui possa appartenere la varietà dei piani tangenti di una superficie di S , non cono (cono); poichè la dimensione del sistema $\{J\}$ è $3(r-2)$ o $2(r-2)$ rispettivamente.

La ricerca in esame è così ricondotta alla determinazione delle superficie per le quali la varietà dei piani tangenti è contenuta nel massimo numero di complessi lineari di piani l. i.

Così trasformata, la ricerca ha senso anche se riferita a superficie non algebriche. Nel seguito Φ_r indica una superficie di S_r per la quale accade che la varietà dei piani tangenti è contenuta in un sistema lineare Σ della dimensione (massima) $\delta_r - 1$ o $\delta'_r - 1$ di complessi lineari di piani.

5. Φ_r sia un cono. Si osservi che un complesso lineare di piani nella stella che ha per centro il vertice V del cono è subordinato da:

$$\binom{r+1}{3} - \frac{(r-2)(r+1)}{2} - 1 = \binom{r}{3}$$

complessi lineari di piani l. i. di S_r . Il sistema Σ subordina pertanto nella stella V un sistema lineare della dimensione:

$$\delta'_r - \binom{r}{3} - 1 = \binom{r-2}{2} - 1.$$

Una sezione iperpiana del cono è una curva di $[r-1]$ le cui tangenti appartengono a $\binom{r-2}{2}$ complessi lineari di rette l. i.; se $r > 4$ quella curva è una C^{r-1} razionale normale; se $r = 4$ una curva sghemba le cui tangenti appartengano ad un complesso lineare. Quest'ultima curva, se algebrica, può essere di genere e moduli affatto qualunque ⁽⁴⁾.

I conì Φ_r sono dunque o conì razionali normali o conì di S_4 a sezioni iperpiane di complesso lineare.

6. Φ_r sia sviluppabile. I complessi lineari di Σ che contengono $\frac{(r-2)(r+1)}{2} - 2$ piani generici per un punto P dello spigolo di regresso di Φ_r ammettono P come punto singolare perchè essi già contengono i tre piani tangenti successivi di cui P è intersezione. Proiettando da P su $[r-1]$ si ottiene come proiezione di Φ_r una superficie sviluppabile per la quale la varietà dei piani tangenti è contenuta in

$$\delta_r - \frac{(r-2)(r+1)}{2} + 2 = \frac{(r-3)(r-4)(r+4)}{6} = \delta_{r-1}$$

complessi lineari di piani l. i.: la superficie proiezione è una Φ_{r-1} .

Per successive proiezioni si perviene ad una Φ_4 di S_4 per la quale la varietà dei piani tangenti è contenuta in una rete di complessi lineari di piani ($\delta_4 = 3$). Questa rete è certo generale, cioè non contiene alcun

⁽⁴⁾ B. SEGRE, loc. cit.

complesso lineare speciale: altrimenti Φ_4 non apparterrebbe ad S_4 . Lo spigolo di regresso di Φ_4 è allora una C^4 razionale normale.

Risalendo, si conclude che le Φ_r sviluppabili sono le rigate delle tangenti delle C^r razionali normali. Sulla rigata delle tangenti di una C^r di S_r il sistema $|J|$, fuori di C^r , si compone con l'involuzione d'ordine e dimensione 3 ($r-2$) entro la ∞^1 delle tangenti di C^r .

7. La superficie Φ_r non è sviluppabile. Sieno P un suo punto generico ed ω il piano ivi tangente. L'intorno del 1° ordine di ω , entro la varietà dei piani tangenti, presenta ai complessi lineari di piani di S_r che debbano contenerlo precisamente tre condizioni lineari indipendenti. E allora, come sopra, proiettando da P su $[r-1]$ si ottiene, come proiezione di Φ_r , una Φ_{r-1} e con successive proiezioni si perviene a una superficie Φ_4 di S_4 per la quale la varietà dei piani tangenti è contenuta in una rete R di complessi lineari di piani. Se la rete R è generale i piani tangenti a Φ_4 nei punti di una sua linea caratteristica sono i piani osculatori di una C^4 razionale normale fissa: la C^4 fondamentale per la rete di complessi. Ma allora Φ_4 è la rigata delle tangenti di una C^4 razionale normale: caso già incontrato e che ora deve escludersi.

8. La rete R contiene dunque almeno un complesso lineare speciale. Sia d la retta-asse del complesso speciale. Un S_3 per la retta d sega Φ_4 secondo una curva (le cui tangenti incontrano d perciò) composta di curve piane l in piani π per d . I piani π formano un S_1 -cono irriducibile Γ che ha per vertice d e che contiene Φ_4 .

Assumendo d come retta fondamentale $x_0 = x_1 = x_2 = 0$ la superficie Φ_4 si rappresenta con le equazioni parametriche:

$$x_0 = \alpha(x) \quad x_1 = \beta(x) \quad x_2 = \gamma(x) \quad x_3 = \lambda(x, y) \quad x_4 = \mu(x, y)$$

nelle quali α, β, γ sono linearmente indipendenti, altrimenti Φ_4 non apparterrebbe ad S_4 ; e le λ, μ sono tali che nessuna loro combinazione lineare a coefficienti costanti risulti indipendente da y , altrimenti Φ_4 sarebbe un cono. Su Φ_4 il fascio delle linee l è rappresentato da $x = \text{cost.}$

Si ponga ora:

$$\xi_0 = \beta\gamma' - \beta'\gamma \quad \xi_1 = \gamma\alpha' - \gamma'\alpha \quad \xi_2 = \alpha\beta' - \alpha'\beta$$

$$\eta_0 = \frac{\partial\mu}{\partial y} \quad \eta_1 = \mu \frac{\partial\lambda}{\partial y} - \lambda \frac{\partial\mu}{\partial y} \quad \eta_2 = -\frac{\partial\lambda}{\partial y}$$

$$\Delta = \frac{\partial\lambda}{\partial x} \frac{\partial\mu}{\partial y} - \frac{\partial\mu}{\partial x} \frac{\partial\lambda}{\partial y}$$

Le ξ sono, nella stella d , le coordinate omogenee degli S_3 tangenti al cono Γ e le η , nel piano π_x , le coordinate omogenee della tangente variabile alla curva l_x . Le coordinate grassmanniane p_{ihk} del piano tangente variabile di Φ_4 sono proporzionali ai minori del 3° ordine della matrice:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \lambda & \mu \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \frac{\partial \lambda}{\partial x} & \frac{\partial \mu}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \lambda}{\partial y} & \frac{\partial \mu}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Si trova:

$$p_{012} = 0$$

$$p_{124} = \eta_0 \xi_0 \quad p_{034} = \alpha \Delta + \alpha' \eta_1 \quad p_{213} = \eta_2 \xi_0$$

$$p_{204} = \eta_0 \xi_1 \quad p_{134} = \beta \Delta + \beta' \eta_1 \quad p_{023} = \eta_2 \xi_1$$

$$p_{014} = \eta_0 \xi_2 \quad p_{234} = \gamma \Delta + \gamma' \eta_1 \quad p_{103} = \eta_2 \xi_2.$$

Poichè la varietà dei piani tangenti di Φ_4 appartiene ad una rete di complessi lineari di piani, esistono fra le p_{ihk} , oltre la $p_{012} = 0$, due altre relazioni lineari omogenee indipendenti a coefficienti costanti, identicamente soddisfatte nelle x, y :

$$[1] \quad k = (A\xi_0 + B\xi_1 + C\xi_2) \eta_0 + (P\alpha' + Q\beta' + R\gamma') \eta_1 + \\ + (L\xi_0 + M\xi_1 + N\xi_2) \eta_2 + (P\alpha + Q\beta + R\gamma) \Delta = 0$$

$$[2] \quad \bar{k} = (\bar{A}\xi_0 + \bar{B}\xi_1 + \bar{C}\xi_2) \eta_0 + (\bar{P}\alpha' + \bar{Q}\beta' + \bar{R}\gamma') \eta_1 + \\ + (\bar{L}\xi_0 + \bar{M}\xi_1 + \bar{N}\xi_2) \eta_2 + (\bar{P}\alpha + \bar{Q}\beta + \bar{R}\gamma) \Delta = 0.$$

Si osservi ora, in primo luogo, che se $P = Q = R = 0$ se cioè la retta d è totale ⁽⁵⁾ per il complesso k allora anche $\bar{P} = \bar{Q} = \bar{R} = 0$: d è totale per ogni complesso della rete. Infatti da $P = Q = R = 0$ segue:

$$[3] \quad (A\xi_0 + B\xi_1 + C\xi_2) \eta_0 + (L\xi_0 + M\xi_1 + N\xi_2) \eta_2 = 0.$$

Le coordinate della tangente alla curva l_x sono legate linearmente: la curva l_x è un gruppo di rette sul piano π_x per un punto P_x di d . La superficie Φ_4 è pertanto rigata. I piani tangenti a Φ_4 nei punti di d (piani

⁽⁵⁾ Una retta è *totale* per un complesso se ogni piano per essa appartiene al complesso.

base per la rete di complessi) non formano fascio e perciò d è totale per ogni complesso della rete e dunque $\bar{P} = \bar{Q} = \bar{R} = 0$ ⁽⁶⁾.

Delle due terne di numeri $P, Q, R; \bar{P}, \bar{Q}, \bar{R}$ avviene che sono insieme nulle o non nulle. Ora è il primo caso che ha luogo. Posto infatti che l'una terna (e quindi l'altra) non sia nulla, l'eliminazione di Δ fra le [1], [2] conduce ad una relazione lineare omogenea fra le η a coefficienti funzioni della sola x la quale, ove non fosse identicamente soddisfatta nelle η considerate come variabili indipendenti, esprimerebbe il fatto che Φ_4 è rigata; ma allora $P = Q = R = 0$ contro l'ipotesi. Se poi quella relazione fosse identica nelle η le funzioni $P\alpha + Q\beta + R\gamma$ e $\bar{P}\alpha + \bar{Q}\beta + \bar{R}\gamma$, a Wronskiano identicamente nullo, sarebbero legate linearmente: $\bar{P} = \sigma P$, $\bar{Q} = \sigma Q$, $\bar{R} = \sigma R$ con σ costante; il complesso $k - \sigma k = 0$ ammetterebbe d come retta totale e sarebbe quindi indeterminato: assurdo perchè i complessi k, \bar{k} sono distinti.

E dunque $P = Q = R = \bar{P} = \bar{Q} = \bar{R} = 0$, come si era asserito. Dalle [1] [2] segue allora:

$$\begin{vmatrix} A\xi_0 + B\xi_1 + C\xi_2 & L\xi_0 + M\xi_1 + N\xi_2 \\ A\xi_0 + B\xi_1 + \bar{C}\xi_2 & L\xi_0 + \bar{M}\xi_1 + \bar{N}\xi_2 \end{vmatrix} = 0.$$

L' S_1 -cono Γ è pertanto del 2° ordine. Si può in conseguenza porre:

$$\begin{aligned} \alpha = 1 \quad \beta = x \quad \gamma = x^2 \\ \xi_0 = x^2 \quad \xi_1 = -2x \quad \xi_2 = 1 \\ A = C = 0, B = -1 \quad ; \quad L = 2, M = N = 0 \\ \bar{A} = \bar{B} = 0, \bar{C} = 2 \quad ; \quad \bar{L} = \bar{N} = 0, \bar{M} = -1 \\ \lambda = y \end{aligned}$$

e quindi:

$$\mu = xy + \psi(x)$$

(⁶) Si conferma analiticamente la cosa osservando che dalla [3] segue

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial y} = \theta(x) \frac{\partial \lambda}{\partial y} \quad ; \quad \mu = \theta \lambda + \tau(x) \\ \eta_0 = \theta \frac{\partial \lambda}{\partial y} \quad \eta_1 = \tau \frac{\partial \lambda}{\partial y} \quad \eta_2 = - \frac{\partial \lambda}{\partial y} \quad \Delta = - \frac{\partial \lambda}{\partial y} (\theta' \lambda + \tau'). \end{aligned}$$

Sostituendo nella [2] e sopprimendo il fattore non nullo $\frac{\partial \lambda}{\partial y}$ si ottiene:

$$\theta' \lambda (\bar{P}\alpha + \bar{Q}\beta + \bar{R}\gamma) = \text{funzione della sola } x = 0$$

poichè λ dipende effettivamente da y . Ma non è $\theta' = 0$ se no una combinazione lineare di λ, μ sarebbe indipendente da y . Dunque $\bar{P}\alpha + \bar{Q}\beta + \bar{R}\gamma = 0$ e, per l'indipendenza lineare di α, β, γ , $\bar{P} = \bar{Q} = \bar{R} = 0$.

con ψ funzione arbitraria. La rigata Φ_4 si rappresenta pertanto con le equazioni:

$$[4] \quad x_0 = 1 \quad x_1 = x \quad x_2 = x^2 \quad x_3 = y \quad x_4 = xy + \psi(x).$$

La varietà dei piani tangenti di questa rigata appartiene di fatto alla rete (7) di complessi lineari:

$$\lambda p_{012} + \mu (p_{024} - 2 p_{123}) + \nu (p_{023} - 2 p_{044}) = 0.$$

Per $x = k$ si ottiene un gruppo di generatrici di Φ_4 , nel piano π_k , concorrenti nel punto $(0\ 0\ 0\ 1\ k)$ di d . Si perviene così alla seguente semplice costruzione della rigata Φ_4 . Si consideri [in S_4 un S_1 -cono quadrico irriducibile Γ di vertice d ; si riferiscano proiettivamente la punteggiata d e il sistema dei piani generatori del cono; gli ∞^1 fasci di rette che hanno per centro e piano sostegno un punto P variabile su d e il corrispondente piano π di Γ costituiscono un sistema razionale ∞^2 di rette di classe 1 nel senso che un iperpiano generico contiene una retta del sistema ⁽⁸⁾. Diremo tale sistema: *congruenza lineare speciale di rette*, per il fatto che da un punto generico di Γ il sistema stesso si proietta in S_3 in una congruenza lineare speciale di rette. Ebbene:

Le superficie Φ_4 non sviluppabili son le rigate appartenenti ad una congruenza lineare speciale di rette.

Nella grassmanniana delle rette di S_4 , una congruenza lineare speciale è un cono cubico normale il cui vertice è l'immagine della direttrice d della congruenza; le immagini delle rigate Φ_4 son le curve tracciate su quel cono.

9. Se $\psi(x)$ è algebrica la rigata Φ_4 è anche algebrica, di genere e moduli qualunque. Un piano π generatore del cono Γ contiene un gruppo di ρ ($\equiv 1$) generatrici che, al variare di π , descrive una g^1_ρ entro al fascio delle generatrici stesse. Gli S_3 per d segano su Φ_4 , fuori di d , l'involuzione completa del 2° ordine entro la g^1_ρ . Se la retta d , direttrice ρ -upla della rigata, è altresì generatrice s -upla, l'ordine della rigata vale $3\rho + s$ ⁽⁹⁾.

(7) Gli S_3 tangenti del cono quadrico Γ sono gli S_3 singolari dei complessi della rete; ciascuno di essi è singolare per i complessi di un fascio. Questo tipo di reti di complessi lineari di piani in S_4 non appare nella classificazione di CASTELNUOVO (Cfr. *Ricerche di geometria della retta* . . .; «Atti R. Ist. Veneto», ser. VII, vol. 2 [1891], pag. 855).

(8) La congruenza in parola è rappresentata dalle [4] ove si assuma ψ come nuovo parametro.

(9) Sul cono cubico immagine della congruenza, nella grassmanniana delle rette di S_4 , Φ è una curva che incontra in ρ punti variabili ogni generatrice del cono e ha nel vertice del cono stesso punto s -plo.

Se $\rho = 1$, $s = 0$ Φ_4 è la rigata cubica normale. Una superficie Φ_5 di S_5 che da ogni suo punto si proietti sopra S_4 secondo una rigata cubica è una V_2^4 rigata o la superficie di VERONESE. Così, risalendo, si trovano, fra le superficie Φ_r di S_r , per r qualunque *le rigate razionali normali* ⁽¹⁰⁾ e per $r = 5$ *la superficie di VERONESE* ⁽¹¹⁾.

Se $\rho > 1$, una superficie Φ_5 che da ogni suo punto si proietti in S_4 secondo una Φ_4 , se non ha direttrice rettilinea ρ -upla, contiene un sistema ∞^1 di direttrici piane C^{e+1} nei piani di una V_3^3 . Ma questo fatto non può aver luogo perchè un S_3 per una direttrice piana contiene al più una generatrice. La superficie Φ_5 possiede dunque una direttrice rettilinea ρ -upla e appartiene ad un S_1 -cono cubico (normale) col vertice nella direttrice. Così, risalendo, si trova, per r qualunque, che *le superficie Φ_r son rigate appartenenti ad una congruenza lineare speciale di rette.*

Una tale congruenza si costruisce nel modo già detto: si parte da un S_1 -cono razionale normale (d'ordine $r-2$), si riferiscono proiettivamente la punteggiata d , vertice del cono, e il sistema dei piani π del cono stesso e si considera infine la varietà ∞^2 di rette costituita dagli ∞^1 fasci che hanno come centro e piano sostegno un punto di d ed il corrispondente piano π ⁽¹²⁾.

Le equazioni parametriche di questa Φ_r si scrivono:

$$x_i = x^i \quad x_{r-1} = y \quad x_r = xy + \psi(x) \quad i = 0, 1, \dots, r-2.$$

con $\psi(x)$ funzione arbitraria.

La varietà dei piani tangenti di Φ_r è effettivamente contenuta in δ_r complessi lineari di piani l. i.

10. Riassumendo i risultati conseguiti si può concludere che:

una superficie Φ per la quale avvenga che le Jacobiane delle reti estratte dal sistema lineare delle sezioni iperpiane costituiscano da sole un sistema lineare, se non appartiene ad S_3 , rientra in una delle seguenti classi:

⁽¹⁰⁾ La varietà dei piani tangenti di una V_2^{r-1} di S_r , sulla grassmanniana dei piani di S_r , è una rigata razionale normale di ordine $3r-7$ e perciò appartenente a $[3r-6]$. La varietà dei piani tangenti di V_2^{r-1} è contenuta pertanto in δ_r complessi lineari di piani l. i.

⁽¹¹⁾ La varietà dei piani tangenti della superficie di VERONESE, sulla grassmanniana dei piani di S_5 , è la V_2^9 razionale normale di S_5 rappresentabile sul piano con il sistema completo delle cubiche. La varietà dei piani tangenti della superficie di VERONESE appartiene pertanto a $19-9=10=\delta_5$ complessi lineari di piani l. i.

⁽¹²⁾ Sulla grassmanniana delle rette di S_r , la congruenza lineare speciale considerata è un cono razionale normale (di ordine $r-1$). Le superficie Φ_r son le curve tracciate su quel cono.

- a) superficie a sezioni iperpiane razionali normali;
- b) rigate delle tangenti delle curve razionali normali;
- c) cono di S_4 , di genere e moduli qualunque, a sezioni iperpiane di complesso lineare;
- d) rigate, di genere e moduli qualunque, appartenenti ad una congruenza lineare speciale di S_7 .

Si può rilevare che l'unica superficie Φ , non rigata e non appartenente ad S_3 , è la superficie di VERONESE.

In termini invariantivi, benchè meno circostanziati:

Un sistema lineare semplice di dimensione > 3 tale che le Jacobiane delle sue reti formino da sole un sistema lineare esiste soltanto sulle superficie riferibili a rigate (razionali o no); e, su tali superficie è di tipo particolare.

Se non si richiede che il sistema sia semplice, allora su ogni superficie esistono sistemi lineari di dimensione > 3 della specie considerata: si tratta di sistemi composti con un'involuzione razionale e, oltre a questi, se la superficie contiene un fascio irrazionale, di sistemi composti con un'involuzione riferibile a rigata.

Matematica (Geometria algebrica). — *Determinazione geometrico-funzionale del gruppo delle terne di punti doppi delle curve di un sistema lineare ∞^3 , ciascuna dotata di tre punti doppi.* Nota di MARIO TOGNETTI, presentata ⁽¹⁾ dall'Accademico FRANCESCO SEVERI.

I principali problemi di carattere numerativo, relativi ad un sistema lineare triplamente infinito $|N|$ di curve, furono risolti da CAPORALI ⁽²⁾ nel caso del piano e da PANNELLI ⁽³⁾ nel caso che le curve giacciono sopra una superficie algebrica F di caratteri p_a (genere aritmetico) i (invariante di ZEUTHEN-SEGREGRE) ed ω (genere lineare relativo).

Più tardi, dopo che il SEVERI riuscì a costruire una teoria invariante dei gruppi di punti sopra una superficie algebrica, con la quale insegnò a dare carattere funzionale alle relazioni numerative, B. SEGREGRE ⁽⁴⁾ dette l'interpretazione funzionale di alcune formule che CAPORALI e PANNELLI avevano ottenute nei lavori citati. B. SEGREGRE ottenne così alcune serie covarianti di gruppi di punti relative ad un sistema lineare ∞^3 giacente su F , tutte esprimibili linearmente mediante le due serie fondamentali d'equivalenza invarianti (la serie di SEVERI e la serie canonica impura) e le due serie fondamentali d'equivalenza covarianti di $|N|$ (serie caratteristica e serie canonica) ⁽⁵⁾.

⁽¹⁾ Nell'Adunanza del 5 giugno 1942-XX.

⁽²⁾ CAPORALI, *Sopra i sistemi lineari triplamente infiniti di curve algebriche piane* in *Memorie di Geometria* di E. Caporali, pag. 171.

⁽³⁾ PANNELLI, *Sui sistemi lineari triplamente infiniti di curve tracciate sopra una superficie algebrica*, Rendiconti del « Circolo Matematico di Palermo », t. XX, 1905. Vedi anche: T. BONNESEN, *Sur les séries linéaires triplement...* « Bulletin de l'Académie de Danemark », 1906.

⁽⁴⁾ B. SEGREGRE, *Determinazione geometrico-funzionale di gruppi di punti covarianti, relativi ad un sistema lineare ∞^3 di curve su di una superficie algebrica*, « Rendiconti dell'Acc. dei Lincei », 1933, pag. 445.

⁽⁵⁾ Per la definizione di queste serie e per altre nozioni relative alle serie d'equivalenza di cui si fa uso, vedere: FRANCESCO SEVERI, *Serie, sistemi di equivalenza e corrispondenze algebriche*, Lezioni tenute nella R. Università di Roma e all'Istituto Nazionale di Alta Matematica, raccolte da F. CONFORTO ed E. MARTINELLI, Ed. Cremonese, Roma 1942-XX; vedi particolarmente il Cap. VI.

Le serie covarianti relative al sistema lineare $|N|$ ottenute da B. SEGRE sono quelle a cui appartengono: a) il gruppo α dei punti della superficie F che son cuspidi di 2^a specie per qualche curva di N ; b) il gruppo β dei punti di F che sono tacnodi per curve del sistema; c) il gruppo γ dei punti di F che son cuspidi per una curva del sistema, avente ulteriormente un nodo.

Interpretando numerativamente le formule che esprimono i gruppi β e γ si ottengono le formule di CAPORALI e PANNELLI, che dànno rispettivamente il numero delle curve del sistema lineare N aventi un tacnodo e il numero di quelle che hanno un nodo e una cuspid.

Non si trova invece nella Nota del SEGRE la interpretazione funzionale della formula di CAPORALI e PANNELLI che dà il numero delle curve del sistema $|N|$, ciascuna dotata di tre punti doppi.

In questa Nota mi propongo appunto di dare l'interpretazione funzionale della suddetta formula numerativa; si vedrà che il gruppo delle terne di punti doppi delle curve del sistema lineare \propto^3 , ciascuna dotata di tre punti doppi, appartiene ad una serie covariante di $|N|$ esprimibile anch'essa linearmente mediante le due serie fondamentali invarianti e le due serie covarianti di $|N|$ ricordate in principio.

1. Siccome ci gioveremo in seguito delle espressioni dei gruppi β e γ ottenute da B. SEGRE, così ci sembra conveniente adottare sia le notazioni, sia le ipotesi della citata Nota di questo Autore: supporremo dunque che il sistema lineare $|N|$ giacente sopra la superficie F priva di singolarità — di un conveniente iperspazio — sia irriducibile, privo di curve fondamentali e semplice; inoltre attribuiremo al sistema certi punti base P_r ($r = 1, 2, \dots, l$) con le molteplicità virtuali l_r (non superiori alle effettive), sicchè come gruppi delle serie caratteristica e canonica di equivalenza si debbono assumere rispettivamente quelle cui appartengono i gruppi:

$$[1] \quad v \equiv (NN) - \sum_{r=1}^l l_r^2 P_r \quad ; \quad v' \equiv (NN') - \sum_{r=1}^l l_r (l_r - 1) P_r$$

(N' denota una curva aggiunta ad $|N|$) e detti n e p grado e genere virtuali di $|N|$, risulta:

$$[2] \quad n = [v]^{(*)} \quad , \quad 2p - 2 = [v'].$$

Per la stessa ragione adopereremo per le serie di SEVERI e canonica impura le notazioni ψ e φ rispettivamente, invece di S ed Ω , come di consueto; e denoteremo con λ il gruppo dei punti P_r .

(*) Con la scrittura $[v]$, ed analoghe, s'intende il numero dei punti del gruppo v .

2. Notoriamente, le curve jacobiane

$$M \equiv 3N + K$$

(K curva canonica impura di F) delle ∞^3 reti che si possono estrarre da $|N|$ costituiscono ancora un sistema lineare triplamente infinito $|M|$.

L'immagine proiettiva di $|N|$ è una superficie F_1 di S_3 sulla quale le curve di $|N|$ hanno per immagini le sue sezioni piane N_1 ; quelle del sistema jacobiano $|M|$ vi hanno come immagini le curve M_1 di contatto di F_1 stessa con i coni ad essa circoscritti dai punti di S_3 .

Sia F_2 la superficie *reciproca* di F_1 , cioè la superficie che si ottiene da F_1 mediante la legge di dualità, e ad ogni punto P_1 di F_1 si faccia corrispondere il punto P_2 di contatto di F_2 col piano ad essa tangente omologo del punto P_1 nella suddetta reciprocità; in tal modo F_1 ed F_2 vengono riferite birazionalmente fra loro, e ad una curva M_1 di F_1 corrisponde una sezione piana M_2 di F_2 , sicchè F_2 può considerarsi come immagine proiettiva del sistema jacobiano $|M|$ di $|N|$.

È chiaro che alle curve del sistema $|N|$ su F — priva di singolarità — aventi due o tre punti doppi corrispondono sopra F_1 curve segate sopra F_1 stessa da piani bitangenti o tritangenti rispettivamente, onde alla curva D di F luogo delle coppie di punti doppi delle curve di $|N|$, aventi ognuna due punti doppi, corrisponde sopra F_1 la curva D_1 luogo dei punti di contatto dei piani ad essa bitangenti; e al gruppo v delle terne di punti che sono doppi per curve di $|N|$, aventi ognuna tre punti doppi, corrisponde sopra F_1 il gruppo v_1 dei punti di contatto con F_1 stessa dei piani ad essa tritangenti.

Allora, poichè F_2 è reciproca di F_1 , risulta del pari chiaro che alla curva D e al gruppo di punti v di F corrispondono sopra F_2 la curva doppia nodale D_2 e il gruppo v_2 dei punti tripli e triplanari per F_2 e per D_2 (?). Inoltre, alla curva H di F luogo delle cuspidi delle curve cuspidate di $|N|$ corrispondono sopra F_1 ed F_2 , rispettivamente, la curva parabola H_1 e la curva doppia cuspidale H_2 . E noi supponiamo che il sistema $|N|$ sia tale che F_2 non abbia altri elementi singolari oltre a quelli già detti, e che la curva parabola H_1 di F_1 sia irriducibile (6).

3. Nell'intento di determinare funzionalmente il gruppo v , si consideri la superficie seconda polare di un punto generico O_2 dello spazio S_3

(?) D e v sono insomma il luogo delle coppie neutre e le terne neutre di F rispetto ad $|M|$, e D è rappresentato doppiamente su D_1 mediante l'involuzione γ_2^1 delle coppie neutre.

(6) Cfr. PANNELLI, loc. cit., n. 3.

in cui trovasi F_2 : tale superficie ⁽⁹⁾ taglia la curva doppia nodale D_2 nel gruppo v_2 dei suoi punti tripli, tocca la curva medesima nel gruppo β_2 dei punti stazionari della curva cuspidale H_2 ed ha con D_2 un contatto tripunto nel gruppo γ_2 delle sue cuspidi, inoltre la seconda polare e la curva nodale si segano nel gruppo ρ_2 dei punti di contatto dei piani della sviluppabile dei piani tangenti ad F_2 lungo D_2 , che passano per O_2 ; si ha perciò sopra F_2 la relazione di equivalenza:

$$[3] \quad (m-2)(M_2 D_2) \equiv v_2 + 2\beta_2 + 3\gamma_2 + \rho_2,$$

dove m ($m = i + n + 4p + l = 12p_a + 4p + n + l - \omega + 9$) ⁽¹⁰⁾ indica l'ordine di F_2 , cioè la classe di F_1 , ed M_2 denota una sezione piana di F_2 .

Il gruppo $(M_2 D_2)$ è una sezione piana di D_2 : ad esso (contato due volte come appartenente alla linea doppia nodale di F_2) risponde sopra F il gruppo ξ delle coppie di punti doppi delle curve (aventi ognuna due punti doppi) della rete R di $|N|$ di cui M è la jacobiana, dato da (B. SEGRE, loc. cit., n. 4):

$$[4] \quad \xi \equiv (m-1)(\psi + v + 2v' + \lambda) - 6(\psi + \varphi) - 2v - 37v'.$$

Ma nella [3] il gruppo $(M_2 D_2)$ di D_2 è da contare invece una sola volta (il numero dei suoi punti rappresenta l'ordine di D_2), perciò l'omologo del primo membro di [3] sulla F è il gruppo:

$$\frac{1}{2}(m-2)\xi.$$

Ai gruppi di punti v_2 , β_2 e γ_2 rispondono sopra F : il gruppo dei punti che cerchiamo e i gruppi dei punti β e γ già nominati, dei quali si conoscono le espressioni funzionali:

$$[5] \quad \beta \equiv 17\varphi + 5\psi - 14v + 64v' - 12\lambda$$

$$[6] \quad \gamma \equiv 2(m-24)(\psi + \varphi + 6v') + 24(\psi - \varphi + 2v + 2\lambda).$$

Resta ancora da determinare funzionalmente il gruppo ρ_2 , o meglio, il suo omologo ρ su F . All'uopo si consideri prima l'omologo ρ_1 di ρ_2 su F_1 : ρ_1 , in virtù della relazione di reciprocità fra F_1 ed F_2 , è evidentemente il gruppo dei punti di D_1 giacenti sopra un piano generico; perciò ρ è il gruppo delle intersezioni variabili di D con una N generica, ma è noto ⁽¹¹⁾ che:

$$D \equiv (3m-28)N + (m-13)K \equiv (2m-15)N + (m-13)N';$$

⁽⁹⁾ Cfr. CAPORALI, loc. cit., n. 33; oppure G. SALMON, *Traité de Géométrie analytique à trois dimensions*, 3^e partie (Gauthier Villars, 1892, Paris) pagg. 169 e 190.

⁽¹⁰⁾ Cfr. PANNELLI, n. 3, a).

⁽¹¹⁾ Cfr. per esempio, B. SEGRE, loc. cit., pag. 469.

inoltre N ed N' passano pei punti P_r rispettivamente con le molteplicità l_r ed $l_r - 1$, onde:

$$\begin{aligned}
 [7] \quad \rho &\equiv (2m - 15) (NN) + (m - 13) (NN') - (2m - 15) \left\{ \sum_{r=1}^l l_r^2 P_r \right\} - \\
 &- (m - 13) \left\{ \sum_{r=1}^l l_r (l_r - 1) P_r \right\} \equiv (2m - 15) \left\{ (NN) - \sum_{r=1}^l l_r^2 P_r \right\} + \\
 &+ (m - 13) \left\{ (NN') - \sum_{r=1}^l l_r (l_r - 1) P_r \right\} \equiv (2m - 15) v + (m - 13) v' \equiv \\
 &\equiv (m - 2) (2v + v') - 11 (v + v').
 \end{aligned}$$

La relazione [3], trasportata sulla superficie F , dato che gruppi equivalenti si mutano in gruppi equivalenti mediante trasformazioni birazionali, diventa:

$$[3'] \quad \frac{1}{2} (m - 2) \xi \equiv v + 2\beta + 3\gamma + \rho,$$

e si conoscono ora le espressioni funzionali dei singoli termini, all'infuori del gruppo v , che possiamo dunque determinare:

$$[8] \quad v \equiv \frac{1}{2} (m - 1) \xi - 2\beta - 3\gamma - \rho.$$

Sostituendo a ξ, β, γ, ρ le loro espressioni [4], [5], [6], [7], si ricava:

$$\begin{aligned}
 [9] \quad v &\equiv \frac{1}{2} (m - 2) (m - 7) \psi - 3 (m - 2) \varphi + \frac{1}{2} (m - 2) (2m - 39) v' + \\
 &+ \frac{1}{2} (m - 1) (m - 2) \lambda - 34 \varphi - 10 \psi + 28 v - 128 v' + 24 \lambda - \\
 &- 6 (m - 12) \psi - 6 (m - 36) \varphi - 144 v - 36 (m - 24) v' - 144 \lambda - \\
 &- (2m - 15) v - (m - 13) v',
 \end{aligned}$$

da cui, ponendo in evidenza $\psi, \varphi, v, v', \lambda$, si ottiene in definitiva:

$$\begin{aligned}
 [9'] \quad v &\equiv \left[\frac{1}{2} (m - 2) (m - 7) - 6m + 62 \right] \psi + [-9m + 188] \varphi + \\
 &+ \left[\frac{1}{2} (m - 2) (m - 3) - 2m - 101 \right] v + \left[\frac{1}{2} (m - 2) (2m - 39) - \right. \\
 &\left. - 37m + 749 \right] v' + \left[\frac{1}{2} (m - 1) (m - 2) - 120 \right] \lambda.
 \end{aligned}$$

Facciamo infine vedere che l'interpretazione numerativa della relazione funzionale [9'] o [9] conduce alla nota formula di CAPORALI e PANNELLI che dà il numero delle curve di $|N|$ dotate ciascuna di tre punti doppi.

Ricordando che la serie di SEVERI ha l'ordine $[\psi] = i + 4$, che l'ordine $[\varphi]$ della serie canonica impura è $\omega - 1$, e anche le relazioni [2], dalla [4] - interpretata numerativamente - si deduce:

$$\begin{aligned} [4'] \quad [\xi] &= m^2 - i - 3n - 78p - l - 72p_a + 2 = \\ &= (m+1)^2 - 108p_a - 86p - 5n - 3l + 3\omega - 26. \end{aligned}$$

Analogamente, dalle [5] e [6] si deducono le:

$$[5'] \quad [\beta] = 17\omega - 17 + 5i + 20 - 14n + 128(p-1) - 12l$$

$$[6'] \quad [\gamma] = 2(m-24)(i + \omega + 12p + 9) + 24(i - \omega + 2n + 2l + 5)$$

e da queste, tenuto conto della relazione di NOETHER: $\omega + i = 12p_a + 9$, si deducono le altre

$$[5''] \quad [\beta] = 2(30p_a + 6\omega + 64p - 6l - 7n - 40)$$

$$\begin{aligned} [6''] \quad [\gamma] &= 24(p_a + p)(12p_a + 4p + n + l - \omega - 15) + \\ &+ 48(6p_a + n + l - \omega + 7) = 24(p_a + p)(m+1) - \\ &- 600(p_a + p) + 48(6p_a + n + l - \omega + 7). \end{aligned}$$

Dalla [7] si deduce poi:

$$\begin{aligned} [7'] \quad [\rho] &= 2(m-2)(n+p-1) - 11(n+2p-2) = 2(n+p-1)(m+1) - \\ &- 6(n+p-1) - 11(n+2p-2) = 2(n+p-1)(m+1) - 17n - 28p + 28. \end{aligned}$$

Dalla [8] si ricava:

$$[v] = \frac{1}{2}(m-2)[\xi] - 2[\beta] - 3[\gamma] - [\rho]$$

e sostituendo a $[\xi]$, $[\beta]$, $[\gamma]$, $[\rho]$ i loro valori [4'], [5''], [6''], [7'], si ha:

$$\begin{aligned} [8'] \quad [v] &= \frac{1}{2}[(m+1)^2 - N][m-2] - 4(30p_a + 6\omega + 64p - 7n - 6l - 40) - \\ &- 72(p_a + p)(m+1) + 1800(p_a + p) - 144(6p_a + n + l - \omega + 7) - \\ &- 2(n+p-1)(m+1) + 17n + 28p - 28, \end{aligned}$$

dove abbiamo posto per comodità

$$N = 108p_a + 86p + 5n + 3l - 3\omega + 26.$$

Pensando $m-2 = (m+1) - 3$, la [8'] può anche scriversi così:

$$\begin{aligned}
[v] &= \frac{1}{2} [(m+1)^3 - (m+1)N - 3(m+1)^2] + \frac{3}{2}N - 72(p_a + p)(m+1) - \\
&- 2(n+p-1)(m+1) - 4(30p_a + 6\omega + 64p - 7n + 6l - 40) + \\
&+ 1800(p_a + p) - 144(6p_a + n + l - \omega + 7) + 17n + 28p - 28 = \\
&= \frac{1}{2}(m+1)^3 - \frac{1}{2}(m+1)(288p_a + 246p + 12n + 6l - 6\omega + 52) - \\
&- 4(30p_a + 6\omega + 64p - 7n - 6l - 40) + 1800(p_a + p) - \\
&- 144(6p_a + n + l - \omega + 7) + 17n + 28p - 28 + \frac{3}{2}N = \\
&= \frac{1}{2}(m+1)^3 - \frac{1}{2}(m+1)(288p_a + 246p + 12n + 6l - 6\omega + 60) + \\
&+ 4(m+1) - 4(30p_a + 6\omega + 64p - 7n - 6l - 40) + 1800(p_a + p) - \\
&- 144(6p_a + n + l - \omega + 7) + 17n + 28p - 28 + 162p_a + 129p + \\
&+ \frac{15}{2}n + \frac{9}{2}l - \frac{9}{2}\omega + 39,
\end{aligned}$$

da cui si deduce finalmente:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}[v] &= \frac{1}{6}(m+1)^3 - (m+1)(48p_a + 41p + 2n + l - \omega + 10) + \\
&+ 2(171p_a + 53) + \frac{1}{6}(223\omega + 3434p - 175n - 223l - 2230).
\end{aligned}$$

Tenendo conto che $\frac{1}{3}[v]$ dà il numero delle curve di $|N|$ aventi ognuna tre punti doppi, e ponendo per m il suo valore: $m = 12p_a + 4p + n + l - \omega + 9$, la formula ottenuta coincide con quella data da PANNELLI; ponendo poi in essa $P_a = 0$, ed $\omega = 10$ si ottiene la formula data da CAPORALI nel piano.

Osserviamo ancora che la [9] o [9'] fornisce la espressione funzionale del gruppo dei punti tripli di una superficie possedente una curva doppia cuspidale indecomponibile e una curva doppia nodale con punti tripli e triplanari per essa e per la superficie.

Matematica. — *Trasformazioni quadratiche osculatrici ad una corrispondenza puntuale fra piani proiettivi. I. — Le proiettività caratteristiche.* Nota di MARIO VILLA, presentata ⁽¹⁾ da ENRICO BOMPIANI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. — Dàta una trasformazione puntuale T , fra due campi piani, è ben noto che fra le direzioni uscenti da due punti corrispondenti O, O' la T subordina una proiettività ω ; ed è pure noto che esistono tre direzioni uscenti da O (e le tre direzioni per O' che le corrispondono in ω) per le quali la T conserva le inflessioni per le curve uscenti da O (O'): le direzioni caratteristiche considerate da BORŮWKA ⁽²⁾.

Nel presente lavoro dimostro dapprima che la trasformazione T , considerata sino all'intorno del 2° ordine di O, O' , determina, fra ciascuna coppia di rette caratteristiche corrispondenti, una proiettività che chiamo *proiettività caratteristica* di T .

Si perviene in modo naturale alle proiettività caratteristiche (nonchè alle stesse direzioni caratteristiche di BORŮWKA) ricorrendo alla rappresentazione della trasformazione T sulla V_4^6 dell' S_8 di SEGRE che rappresenta le coppie di punti dei due piani. Se Σ è la superficie che rappresenta T sopra V_4^6 e P il punto che rappresenta la coppia (O, O') , si ha infatti (n. 2) che l' S (2) osculatore in P a Σ interseca V_4^6 in tre coniche le quali rappresentano appunto le tre proiettività caratteristiche.

Le direzioni caratteristiche e le tre proiettività caratteristiche determinano completamente la trasformazione puntuale sino all'intorno del 2° ordine (n. 6).

La considerazione delle proiettività caratteristiche è di fondamentale importanza per lo studio delle trasformazioni quadratiche che *osculano*

⁽¹⁾ Nell'Adunanza del 5 giugno 1942-XX.

⁽²⁾ BORŮWKA, *Sur les correspondances analytiques entre deux plans projectifs*, « Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk », Brno, nn. 72 e 85, 1926 e 1927; *Géométrie projective des correspondances analytiques entre deux plans*, « Comptes Rendus », Paris, vol. 184, 1927, pag. 1518. Si veda anche: FUBINIE ČECH, *Introduction à la Géométrie projective différentielle des surfaces*, Paris, Gauthier-Villars, 1931, pag. 160.

(cioè che approssimano fino all'intorno del 2° ordine) la T nella coppia (O, O') ⁽³⁾.

Dette trasformazioni sono ∞^2 (n. 3) e formano l'oggetto principale del presente lavoro.

*I punti singolari delle trasformazioni quadratiche osculatrici apparten-
gono alle rette caratteristiche e nel n. 3 dimostro che:*

*Condizione necessaria e sufficiente perchè una trasformazione qua-
dratica osculi nella coppia (O, O') la trasformazione puntuale T è che
essa subordini fra le coppie di rette caratteristiche le proiettività caratte-
ristiche.*

Assegnati, sopra due rette caratteristiche di uno stesso piano, due punti A_1, A_2 ($\neq O$), la trasformazione quadratica osculatrice di cui A_1, A_2 sono punti singolari è unica e, nel n. 5, si danno, quando siano note le direzioni caratteristiche e le proiettività caratteristiche, le effettive costruzioni della trasformazione stessa e dei rimanenti punti singolari.

È evidente che le proiettività caratteristiche e le trasformazioni quadratiche osculatrici sono enti che daranno luogo ad importanti applicazioni.

I risultati qui ottenuti sulle trasformazioni quadratiche osculatrici portano un primo contributo allo studio del seguente problema:

Data una trasformazione puntuale generica T , fra due campi piani, ricercare le trasformazioni cremoniane che l'approssimano negli intornoi dei vari ordini di una coppia di punti corrispondenti.

Il problema rientra sostanzialmente in quello di caratterizzare gli intornoi dei vari ordini delle trasformazioni cremoniane, in una coppia di punti corrispondenti, e, per l'intorno del 2° ordine, è pienamente risolto dai teoremi dei nn. 3, 5, 7.

Riguardo all'intorno del 3° ordine, nel n. 9 osservo che:

Non esistono trasformazioni di DE-JONQUIÈRES (in particolare quindi trasformazioni cubiche) che approssimino una trasformazione T generica nell'intorno del 3° ordine di una coppia di punti corrispondenti.

Si noti che nel presente lavoro vengono studiate, credo per la prima volta, localmente le trasformazioni cremoniane, ricerca d'indubbio interesse.

Le equazioni delle ∞^2 trasformazioni quadratiche osculatrici sono indicate nel n. 7. Nel n. 8 vengono considerate le tre proiettività, fra i due piani, individuate dalle proiettività caratteristiche, prese a due a due.

⁽³⁾ Il problema di ricercare le (eventuali) trasformazioni quadratiche che approssimano l'intorno del 2° ordine di una trasformazione puntuale fra due piani, in una coppia di punti corrispondenti, mi è stato proposto dal BOMPIANI durante un colloquio che ebbi con lui a Roma, nel dicembre del 1939.

2. — Consideriamo una trasformazione puntuale T che muti i punti di un campo C di un piano $\pi(x, y)$ nei punti di un campo C' di un altro piano $\pi'(x', y')$ ⁽⁴⁾ e riferiamoci ad una coppia (O, O') di punti corrispondenti in relazione alla quale l'Jacobiano sia $\neq 0$, ciò che notoriamente assicura la biunivocità di T nell'intorno di tale coppia ⁽⁵⁾. La T subordina fra le direzioni uscenti da O e quelle uscenti da O' una proiettività ω . Siano r_1, r_2, r_3 le direzioni caratteristiche uscenti da O ⁽⁶⁾ e r'_1, r'_2, r'_3 le direzioni caratteristiche uscenti da O' , corrispondenti delle prime in ω .

Se Σ è la superficie che rappresenta T sulla V_4^6 di S_8 di SEGRE, che rappresenta le coppie di punti dei due piani π, π' ⁽⁷⁾, e P il punto che rappresenta la coppia (O, O') si ha:

L'S (2) osculatore in P a Σ ⁽⁸⁾ interseca V_4^6 in tre coniche le quali rappresentano tre proiettività (le proiettività caratteristiche) fra le tre coppie di rette caratteristiche corrispondenti.

Scegliamo in π e in π' il riferimento cartesiano in modo che le rette r_1, r_2, r_3 abbiano le equazioni $y = 0, x = 0, x - y = 0$ e le rette r'_1, r'_2, r'_3 le equazioni $y' = 0, x' = 0, x' - y' = 0$.

⁽⁴⁾ Si studiano qui le proprietà proiettive della corrispondenza e quindi indipendenti dalla posizione relativa dei due piani.

⁽⁵⁾ A questo proposito si veda la mia Nota recente: VILLA, *Sull'annullarsi, in un punto, della matrice Jacobiana di m funzioni in n variabili*, « Rend. della R. Accademia d'Italia », ser. VII^a, vol. III, 1941, pag. 209.

⁽⁶⁾ Queste direzioni sono, in generale, distinte e, nel presente lavoro, si supporranno appunto tali. Naturalmente rimane da vedere come si modifichino i risultati qui ottenuti quando si verifichi l'ipotesi contraria. Escludiamo pure che tali direzioni siano indeterminate; ciò si presenta soltanto quando la trasformazione coincide, fino all'intorno del 2° ordine, con una proiettività e questa eventualità non ha per noi interesse.

⁽⁷⁾ C. SEGRE, *Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi*, « Rend. del Circolo Matematico di Palermo », vol. V, 1891, pag. 192.

Ricordo, poichè ne avrò bisogno tra poco, che le coppie di punti prese da due rette sono rappresentate sulla V_4^6 di SEGRE da una quadrica dell' S_3 e che le proiettività fra le due rette sono rappresentate dalle coniche della quadrica.

⁽⁸⁾ Si dice, con BOMPIANI, $S(r)$ osculatore ad una superficie, in un punto P , lo spazio lineare di dimensione minima che contiene gli $S(r)$ osculatori in P alle curve della superficie passanti per P , cioè lo spazio lineare di dimensione minima che contiene il punto P e i punti derivati sino a quelli d'ordine r . In particolare, l' $S(1)$ osculatore in P alla superficie è il piano tangente in P . L' $S(r)$ osculatore ad una curva in un punto P è lo spazio lineare di dimensione minima che contiene il punto P e i punti derivati sino a quelli d'ordine r . L' $S(2)$ osculatore ad una superficie è in generale un S_2 e, nel nostro caso, l' $S(2)$ osculatore in P alla superficie Σ è proprio un S_2 (e non uno spazio di dimensione minore) perchè si è supposto che nella coppia (O, O') l'Jacobiano sia $\neq 0$ (si veda la mia Nota citata).

La T è allora rappresentata dalle equazioni

$$[1] \quad \begin{cases} x' = ax + bx^2 + (c + d)xy + [3] \\ y' = ay + (b + d)xy + cy^2 + [3] \end{cases}$$

a, b, c, d essendo costanti ($a \neq 0$) e indicando con $[3]$ i termini d'ordine > 2 .

La V_4^6 di SEGRE è rappresentata dalle equazioni parametriche (indicando con X_i le coordinate omogenee in S_8).

$$[2] \quad \begin{aligned} X_1 &= xx', X_2 = yy', X_3 = x', X_4 = xy', \\ X_5 &= yy', X_6 = y', X_7 = x, X_8 = y, X_9 = 1. \end{aligned}$$

Le equazioni parametriche di Σ si ottengono ponendo nelle [2] per x', y' le espressioni [1]. L' $S(2)$ osculatore in P a Σ è lo spazio individuato da P , dai due punti derivati primi e dai tre punti derivati secondi, cioè dai punti (scriviamo per brevità soltanto le coordinate non nulle):

$$X_9 = 1; X_3 = a, X_7 = 1; X_6 = a, X_8 = 1; X_1 = a, X_3 = b; X_5 = a, X_6 = b; \\ X_2 = a, X_3 = c + d, X_4 = a, X_6 = b + d.$$

Questo $S[2] = S_3^*$ osculatore è quindi rappresentato dalle equazioni

$$\begin{aligned} bX_1 + (c + d)X_2 - aX_3 + a^2X_7 &= 0 \\ (b + d)X_4 + cX_5 - aX_6 + a^2X_8 &= 0 \\ X_2 - X_4 &= 0. \end{aligned}$$

Sostituendo in queste le [2] si ottiene

$$[3] \quad \begin{cases} bxx' + (c + d)yx' - ax' + a^2x = 0 \\ (b + d)xy' + cy' - ay' + a^2y = 0 \\ yx' - xy' = 0. \end{cases}$$

I punti della intersezione di V_4^6 con l' $S(2)$ sono quelli relativi ai valori di x, y, x', y' soddisfacenti alle [3]; vale a dire le coppie C , di punti dei piani π, π' , che sono rappresentate sulla V_4^6 dai punti in cui questa è segata dall' $S(2)$, sono quelle formate dai punti $(x, y), (x', y')$ che soddisfanno le [3].

Il luogo L dei punti (x, y) del piano π che compaiono nelle coppie C , si ottiene eliminando x', y' fra le [3]. Si trova

$$xy(x - y) = 0.$$

Dunque L è costituito dalle tre rette caratteristiche $x = 0, y = 0, x - y = 0$.

Dalla terza delle [3] si deduce poi che i punti del piano π' che sono accoppiati, nelle coppie C , coi punti delle rette $x = 0, y = 0, x - y = 0$

appartengono rispettivamente alle rette caratteristiche $x' = 0$, $y' = 0$, $x' - y' = 0$. E le prime due delle [3] provano infine che i punti delle coppie C appartenenti alle rette caratteristiche x , x' si corrispondono nella proiettività (caratteristica) γ_1

$$[4] \quad x' = \frac{ax}{1 - \frac{b}{a}x}.$$

Analogamente per le [3], fra le rette caratteristiche y , y' si ha la proiettività caratteristica γ_2

$$[5] \quad y' = \frac{ay}{1 - \frac{c}{a}y}$$

e, fra le rette caratteristiche $x - y = 0$, $x' - y' = 0$, si ha la proiettività caratteristica γ_3

$$[6] \quad x' = y' = \frac{ax}{1 - \frac{b+c+d}{a}x}.$$

Siccome le proiettività fra le coppie di rette dei piani π , π' sono rappresentate sopra V_4^6 da coniche, l'asserto è dimostrato ⁽⁹⁾.

3. - Sussiste il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una trasformazione quadratica osculi nella coppia (O, O') la trasformazione puntuale T è che essa subordini fra le coppie di rette caratteristiche le proiettività caratteristiche ⁽¹⁰⁾.

⁽⁹⁾ Alla stessa conclusione si può giungere per via sintetica. Infatti l' $S(2) = S_2^*$ sega la V_4^6 di S_3 in una curva che è d'ordine 6 ed ha nel punto di osculazione di S_2^* un punto triplo a tangenti complanari (nel piano ivi tangente a Σ). Se le tre tangenti sono distinte, questa curva (come si vede subito, per esempio, con proiezione dal piano tangente) si spezza in tre componenti piane, che sono coniche e rappresentano appunto sulla V_4^6 le tre proiettività caratteristiche.

⁽¹⁰⁾ L'intorno d'ordine r di T , nella coppia (O, O') , è rappresentato dalle [1] in cui si tenga conto soltanto dei termini d'ordine $\leq r$. Le [1], arretrate ai termini d'ordine r , diremo pure che costituiscono l'elemento d'ordine r di T , nella coppia (O, O') .

Due trasformazioni puntuali T, T_0 si dirà che si *approssimano* (o che una di esse *approssima* l'altra) nell'intorno d'ordine r della coppia (O, O') quando coincidono gli elementi d'ordine r di T, T_0 nella coppia (O, O') . In particolare T, T_0 si diranno *tangenti* in (O, O') quando si approssimano nell'intorno di 1° ordine di (O, O') ; se T, T_0 si approssimano nell'intorno di 2° ordine di (O, O') si dirà anche che si *osculano* nell'intorno di (O, O') .

Ricorriamo, per la dimostrazione, alla rappresentazione sulla V_4^6 dell' S_8 di SEGRE (n. 2).

Una trasformazione quadratica fra i piani π, π' è rappresentata dalla superficie sezione di V_4^6 con un S_6 ⁽¹¹⁾.

Dico che:

Le trasformazioni quadratiche osculatrici la T nella coppia (O, O') sono quelle relative agli S_6 che passano per l' $S(2)$ osculatore in P a Σ ⁽¹²⁾.

Infatti perchè una trasformazione quadratica T_0 osculi in (O, O') la T è necessario che la superficie Σ_0 rappresentativa di T_0 sopra V_4^6 abbia in P per $S(2)$ osculatore l' $S(2) = S_5^*$ osculatore in P a Σ ⁽¹³⁾. Siccome Σ_0 è l'intersezione di V_4^6 con un S_6 , l' S_6 deve contenere l' S_5^* .

Inversamente, consideriamo un S_6 passante per S_5^* ⁽¹⁴⁾. L'intersezione di questo S_6 con V_4^6 è una superficie Σ_0 che rappresenta una trasformazione quadratica T_0 . Dico che T_0 oscula in (O, O') la T ; infatti gli elementi curvilinei (del 2° ordine) in P di Σ sono tali anche per V_4^6 e quindi anche per la sezione Σ_0 di V_4^6 con l' S_6 perchè questo S_6 passa per l' S_5^* a cui tali elementi appartengono.

Ed ora si osservi che gli S_6 che passano per l' S_5^* passano anche per le tre coniche in cui l' S_5^* sega V_4^6 (n. 2), e inversamente (giacendo le tre coniche in S_5^* e non in uno spazio lineare di dimensione < 5).

⁽¹¹⁾ Tale superficie, come ha riconosciuto il SEGRE, coincide con quella studiata diffusamente dal BORDIGA (« Comptes Rendus », vol. 52, 1886; « Atti dell'Istituto Veneto », vol. IV, ser. VI, 1886, pag. 1461). Si veda VILLA, *Superficie della V_4^6 di Segre e relative trasformazioni puntuali*, « Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Bologna », vol. IX, ser. IX, 1942.

⁽¹²⁾ Sono esclusi gli S_6 seganti in un S_3 l' S_4 tangente in P a V_4^6 , cioè gli S_6 passanti per l' $S(2) = S_5^*$ osculatore in P a Σ ed appartenenti all' \bar{S}_7 ($X_2 - X_4 = 0$) individuato dall' S_5^* e dall' S_4 tangente a V_4^6 in P .

⁽¹³⁾ Due trasformazioni puntuali T, T_0 si approssimano nell'intorno d'ordine r della coppia (O, O') quando (e solo quando) sopra V_4^6 le relative superficie Σ, Σ_0 hanno in P calotte d'ordine r coincidenti. La denominazione di *calotta* all'intorno di un punto di una superficie, è stata introdotta dal BOMPIANI. Si veda, ad esempio, BOMPIANI, *Gli analoghi proiettivi dei teoremi di Meusnier e di Eulero*. « Rend. di Matematica », ser. IV, vol. II, 1938, pag. 99.

Lo spazio lineare ambiente della calotta d'ordine r di Σ in P è l' $S(r)$ osculatore in P a Σ .

⁽¹⁴⁾ Gli S_6 passanti per l' S_5^* e appartenenti all' \bar{S}_7 di cui alla nota ⁽¹²⁾, ed essi soltanto, segano V_4^6 in superficie Σ_0 (aventi punto doppio in P) che rappresentano trasformazioni quadratiche T_0 per cui in (O, O') l'Jacobiano è nullo. Orbene una tale trasformazione T_0 non oscula la T in (O, O') poichè l'Jacobiano di T in (O, O') si è supposto $\neq 0$, mentre se in (O, O') le T, T_0 si osculassero avrebbero lo stesso Jacobiano (dipendendo questo dall'intorno del 1° ordine).

Nel seguito si supporrà che l' S_6 per l' S_5^* non appartenga all' \bar{S}_7 .

Siccome le tre coniche rappresentano (n. 2) le proiettività caratteristiche fra le tre coppie di rette caratteristiche il teorema è dimostrato.

Dal precedente teorema segue:

Le trasformazioni quadratiche osculatrici la T nella coppia (O, O') sono ∞^2 .

Altrettanti sono infatti gli S_0 per l' S_3^* .

Segue pure:

I punti singolari delle trasformazioni quadratiche osculatrici appartengono alle rette caratteristiche.

Infatti in una trasformazione quadratica ad una retta corrisponde una conica degenerare solo quando la retta passa per uno dei punti singolari; siccome le coppie di rette caratteristiche si corrispondono nelle trasformazioni quadratiche osculatrici, tali rette passano per i punti singolari.

Osservazione. — Appare anche direttamente che i punti singolari delle trasformazioni quadratiche osculatrici appartengono alle rette caratteristiche e che le trasformazioni quadratiche osculatrici subordinano sulle coppie di rette caratteristiche le proiettività caratteristiche.

Infatti, data una trasformazione quadratica T_0 , le tre rette caratteristiche di T_0 , uscenti da un punto, sono le rette che congiungono tale punto coi tre punti singolari e le tre proiettività caratteristiche di T_0 sono le proiettività subordinate da T_0 fra le coppie di rette caratteristiche.

Se la trasformazione quadratica oscula in (O, O') la T , in (O, O') le due trasformazioni devono avere le stesse rette caratteristiche e le stesse proiettività caratteristiche (dipendendo questi elementi dall'intorno del 2° ordine) e quindi segue l'asserto ⁽¹⁵⁾ ⁽¹⁶⁾.

⁽¹⁵⁾ Si noti che nessuno dei punti singolari delle trasformazioni quadratiche osculatrici può cadere in $O (O')$. Infatti, data una trasformazione quadratica T_0 , le coppie di punti corrispondenti in T_0 per le quali s'annulla l'*Jacobiano*, sono tutte e sole quelle per cui uno dei punti è singolare per T_0 . Quindi T_0 non può avere in $O (O')$ punto singolare ed osculare in (O, O') la T poichè in (O, O') l'*Jacobiano* di T si è supposto $\neq 0$.

Per lo stesso motivo non può $O (O')$ appartenere a nessuno dei lati del triangolo individuato dai punti singolari delle trasformazioni quadratiche osculatrici.

⁽¹⁶⁾ Partendo da questa *Osservazione* si può dimostrare il teorema del testo anche in modo diretto, e facilmente.

Matematica (Geometria). — *Sulle direttrici di grado virtuale minimo d'una rigata algebrica di genere $p > 0$.* Nota di GUIDO ZAPPA, presentata ⁽¹⁾ dall'Accademico FRANCESCO SEVERI.

Le rigate algebriche dal punto di vista proiettivo sono state studiate oltre mezzo secolo fa ⁽²⁾.

Allo scopo di lumeggiare un problema posto ad un discepolo ricercatore del Reale Istituto Nazionale di Alta Matematica, SEVERI ⁽³⁾ in una recente Memoria ha studiato le rigate dal punto di vista delle trasformazioni birazionali.

Per la natura occasionale del lavoro, e per l'intenzione, in esso dichiarata, di offrire ai discepoli dell'Istituto taluni problemi attraenti, varie questioni sono lasciate in sospenso: per esempio, la determinazione delle direttrici di grado virtuale minimo ⁽⁴⁾.

Richiamiamo brevemente i risultati di SEVERI sulle direttrici di una rigata astratta ⁽⁵⁾. Anzitutto egli prova che esiste un minimo (positivo, negativo o nullo) pel grado delle direttrici di una data rigata astratta F , minimo che non scende mai al disotto del grado di una direttrice irriducibile prefissata o dell'opposto di questo. Inoltre, egli mostra che una direttrice di grado virtuale minimo è caratterizzata dalla proprietà di tagliare nel minimo numero possibile di punti ogni altra direttrice; di

⁽¹⁾ Nell'Adunanza del 5 giugno 1942-XX.

⁽²⁾ C. SEGRE, *Sulle rigate razionali in uno spazio lineare qualunque*. « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. 19 (1883-84), pagg. 355-372; *Ricerche sulle rigate ellittiche di qualunque ordine*. Id., vol. 21 (1885-86), pagg. 868-891; *Intorno alla geometria su una rigata algebrica*. « Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei », ser. 4^a, vol. 3 (1887), pagg. 3-6; *Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques*. II partie, « Mathematische Annalen », 34 (1889), pagg. 1-25.

⁽³⁾ F. SEVERI, *Sulla classificazione delle rigate algebriche*. « Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni », ser. 5^a, vol. 2 (1941), pagg. 1-32.

⁽⁴⁾ Che figura anche nella rubrica « Problemi, risultati e discussioni » dei « Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni », ser. VI, vol. 2, pag. 113, questione 55.

⁽⁵⁾ Op. cit. in ⁽³⁾, pag. 9 e sgg.

modo che le direttrici di grado minimo di F si riducono alle direttrici di ordine minimo sopra una rigata proiettiva Φ in corrispondenza birazionale senza eccezione con la F .

Dopo ciò SEVERI giunge al risultato che, se p (> 0) è il genere di F , questa possiede direttrici di grado virtuale p o $p - 1$, l'uno caso escludendo l'altro. Resta però a tal punto aperta la questione se vi siano effettivamente rigate per cui p , o $p - 1$, rappresenti il valore minimo del grado virtuale delle direttrici.

D'altra parte, già nei lavori di C. SEGRE ⁽⁶⁾ si trova dimostrato che una rigata proiettiva regolare ⁽⁷⁾ d'ordine n e genere p possiede almeno una direttrice il cui ordine eguaglia la parte intera del numero $\frac{1}{2}(n + p)$; risultato che, come mostra lo stesso SEVERI, equivale alla esistenza di direttrici di grado p o $p - 1$ sopra una rigata astratta.

Di più, C. SEGRE afferma che « in generale », l'ordine minimo delle direttrici di una rigata proiettiva regolare è precisamente eguale alla parte intera di $\frac{1}{2}(n + p)$, il che equivale ad affermare che « in generale » il grado minimo delle direttrici di una rigata astratta di genere p è p o $p - 1$. Ma, giustamente, SEVERI osserva che, da un lato, dai lavori di SEGRE non risulta che esistano rigate proiettive per cui l'ordine delle direttrici non si abbassa mai al di sotto della parte intera di $\frac{1}{2}(n + p)$; e che, d'altro canto, per poter parlare di rigate generali, bisogna precisare quali parametri si considerino variabili con continuità: il che non vien fatto da SEGRE.

Non può in particolare in questo caso considerarsi generale una rigata per cui siano generici i moduli del fascio di generatrici, perchè, come osserva SEVERI, esistono rigate astratte di genere p a moduli arbitrari, dotate di direttrici di grado virtuale nullo, ed anche negativo. Quindi, dire che, in generale, una rigata di genere p ha direttrici di grado minimo eguale a p od a $p - 1$ non ha senso, sino a che le rigate si considerino a meno di trasformazioni birazionali qualunque (poichè in tal caso i soli parametri da cui la rigata dipende sono i moduli del fascio di generatrici); mentre può aver senso se le rigate si considerano a meno di trasformazioni birazionali senza eccezioni oppure se si fissa l'attenzione sopra una particolare famiglia di rigate proiettive.

In questa Nota, dimostro che esistono effettivamente rigate di genere p , per cui il grado minimo delle direttrici è p o $p - 1$. Precisa-

(6) Ved. Memoria citata dei « Mathematische Annalen », pag. 13.

(7) Per questa e per altre definizioni, si confronti la Memoria di SEVERI citata in ⁽⁸⁾.

mente, basandomi sui risultati, da me recentemente conseguiti ⁽⁸⁾, sulla degenerazione delle rigate in sistemi di piani, dimostro che esiste una rigata spezzata in piani, per cui il grado minimo delle direttrici è esattamente p o $p - 1$, e che è, d'altra parte, limite d'una rigata irriducibile. Poichè, quando una rigata, variando con continuità, tende ad una rigata particolare, il grado delle sue direttrici può diminuire, ma non crescere, e poichè, come abbiamo osservato, si sa già che il grado virtuale minimo delle direttrici delle rigate di genere p non è mai superiore a p o a $p - 1$ (a seconda che il grado di una e quindi di tutte le direttrici della rigata ha la parità di p o quella di $p - 1$), concludo che esistono rigate irriducibili per cui il grado minimo delle direttrici è p o $p - 1$. Nel frattempo provo altresì che esiste una famiglia di rigate proiettive dell' S_3 (la cui generica rigata ha genere p ed è a moduli arbitrari), nella quale le rigate aventi il grado minimo delle direttrici minore di $p - 1$ formano una varietà algebrica subordinata. Per le rigate di questa famiglia ha quindi senso dire che, in generale, il grado minimo delle direttrici è p o $p - 1$.

Non ho invece affrontato il problema di vedere se si può dar senso all'affermazione, che entro la varietà il cui elemento generico è l'astratto delle rigate di genere p tra loro birazionalmente equivalenti senza eccezione, la rigata generale ha come grado minimo delle sue direttrici il valore p o $p - 1$. Questo problema si riconnette infatti in modo molto stretto con quello della determinazione dei moduli aritmetici di una rigata, indicato anch'esso da SEVERI ⁽⁹⁾.

Si può tuttavia indurre con sufficiente sicurezza che esistono rigate di genere p per cui il grado minimo delle direttrici è un qualunque intero positivo prefissato, minore di $p - 1$. Ciò risulterà evidente dal seguito per le rigate spezzate in piani. Indicherò una via mediante la quale, estendendo alle rigate iperspaziali le ricerche svolte nella mia Memoria citata sulle rigate di S_3 , è quasi certamente possibile dimostrare la cosa per le rigate irriducibili.

1. Sia Φ una rigata proiettiva d'ordine n e genere p , birazionalmente equivalente senza eccezioni ad una rigata astratta F , su cui vogliamo determinare il grado minimo delle direttrici.

Sia A una direttrice di Φ , di grado virtuale minimo v . Risulta dalla citata Memoria di SEVERI ⁽¹⁰⁾, che A è anche una direttrice d'ordine minimo di Φ , che si ha $n - v = 2\lambda$, con λ intero, e che l'ordine di A

⁽⁸⁾ In un lavoro in corso.

⁽⁹⁾ Opera citata in ⁽³⁾, pag. 30. Cfr. anche la questione n. 56 della Rubrica « Problemi, risultati e discussioni » nei « Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni », ser. V, vol. 2 (1941), pag. 114.

⁽¹⁰⁾ Pag. 10.

è $\nu + \lambda$. Basterà pertanto dimostrare che, se $n - p$ è pari, l'ordine minimo delle direttrici di Φ è $\frac{1}{2}(n + p)$, mentre se $n - p$ è dispari, quest'ordine è $\frac{1}{2}(n + p - 1)$; e ne seguirà che il grado minimo delle direttrici di F è, nel primo caso, p , nel secondo, $p - 1$.

2. Sia Λ una rigata spezzata in piani, connessi tra loro mediante rette, in modo che sopra ciascun piano non cadano mai più di tre rette di connessione; e supponiamo che Φ , variando con continuità, tenda a Λ . Il fascio delle generatrici di Φ tenderà al sistema costituito da n fasci di rette ciascuno dei quali ha per sostegno uno dei piani di Λ , e per centro un punto in cui convergono le rette di connessione appartenenti al suddetto piano⁽¹⁾. La direttrice A , quando Φ tende a Λ , dovrà tendere ad una curva spezzata B , di genere virtuale p (incontrante in un punto ciascuna generatrice limite), ed eventualmente ad un ulteriore gruppo di generatrici limite di Λ . L'ordine di B è pertanto minore od eguale a quello di A .

Una curva che, come B , incontri in un sol punto ciascuna generatrice limite, verrà detta, per brevità, *direttrice limite*. Segue allora dalle considerazioni di cui sopra, che se Φ ammette una forma limite Λ , spezzata in piani nel modo anzidetto, e dotata di una direttrice limite B , d'ordine ρ eguale alla parte intera di $\frac{1}{2}(n + p)$ e genere virtuale p , di modo che ρ sia l'ordine minimo delle direttrici limiti appartenenti a Λ ed aventi il genere virtuale p , l'ordine di A non è inferiore alla parte intera di $\frac{1}{2}(n + p)$. E poichè d'altra parte Φ ha certamente direttrici aventi per ordine la parte intera di $\frac{1}{2}(n + p)$, segue in tal caso che l'ordine minimo delle direttrici di Φ è esattamente eguale a quest'ultimo numero, come si vuol dimostrare.

3. Tutto si riduce pertanto a dimostrare *l'esistenza di una rigata Λ , spezzata in piani nel modo voluto, la quale da un lato sia limite d'una rigata irriducibile d'ordine n e genere p , e dall'altro non abbia direttrici di genere virtuale p , il cui ordine sia inferiore alla parte intera di $\frac{1}{2}(n + p)$.*

Basterà naturalmente dimostrare la cosa per un dato valore di n . Possiamo pertanto supporre $n \equiv 3p + 2$.

(¹) (fr. la mia Memoria: *Sulla degenerazione delle superficie algebriche in sistemi di piani distinti, con applicazioni allo studio delle rigate*, « Atti della Reale Accademia d'Italia » (in corso di stampa).

In tal caso sappiamo ⁽¹²⁾ che una curva piana generica Δ di classe n e genere p è curva di diramazione di una rigata irriducibile di S_3 , d'ordine n e genere p . Sia Φ una tal rigata. Sappiamo pure ⁽¹³⁾ che una curva qualunque di classe n e genere virtuale p , anche spezzata, può considerarsi limite di Δ . Sia Σ una curva costituita da $n + p - 1$ rette doppie, di genere virtuale p , con n punti di connessione, per ciascun dei quali non passin mai più di tre rette di Σ . È noto ⁽¹⁴⁾ che una tal curva può sempre considerarsi come una curva limite di classe n e genere p , e quindi come limite di Δ .

Quando Δ tende a Σ , le tangenti di Δ tendono alle rette dei fasci aventi per centri gli n punti di connessione di Σ ; e la rigata Φ tende ad una rigata Λ spezzata in piani, di genere virtuale p . Questi piani si connettono fra loro attraverso $n + p - 1$ rette, delle quali quelle che giacciono in un medesimo piano, non mai più di tre, passano per un medesimo punto; tali rette si proiettano nelle rette di Σ , la quale è da considerarsi curva di diramazione di Λ . Il fascio delle generatrici di Φ tende ad un fascio spezzato in n fasci piani di rette, ciascuno dei quali ha per sostegno uno dei piani in cui si spezza Λ , e per centro il punto in cui convergono le rette di connessione appartenenti al detto piano, come del resto abbiamo già affermato. Questo fascio spezzato è da considerarsi come il fascio delle generatrici di Λ , e si proietta nel sistema delle rette appartenenti ai fasci che hanno per centri i punti di connessione di Σ .

Da quanto precede discende che, per raggiungere lo scopo che ci siamo proposti, basta dimostrare che esiste una curva spezzata del tipo di Σ , tale che ogni rigata spezzata in piani che l'ammetta come curva di diramazione, non possieda direttrici di genere virtuale p e ordine minore della parte intera di $\frac{1}{2}(n + p)$.

4. Conservando a Σ il significato del numero precedente, fissiamo l'attenzione sull'involuppo limite Θ aderente a Σ , il quale, come abbiamo visto, è costituito da n fasci di rette, connessi tra loro da $n + p - 1$ rette, ogni fascio contenendo al più tre rette di connessione.

Consideriamo l'ente duale di Θ . Esso è un n -latero Ω di genere virtuale p , avente quindi $n + p - 1$ punti di connessione; inoltre su ogni retta di Ω vi sono al più tre punti di connessione.

Supporremo d'ora in poi $p > 0$, poichè il caso $p = 0$ è stato esaurientemente studiato da SEGRE.

⁽¹²⁾ Op. cit. in ⁽⁸⁾.

⁽¹³⁾ F. SEVERI, *Vorlesungen über algebraische Geometrie*, Teubner, Leipzig, 1921, Anhang F, pag. 322 e sgg.

⁽¹⁴⁾ Op. cit. in ⁽⁸⁾.

Diremo *circuito d'ordine k* un k -latero in cui si possono ordinare i lati di una successione, in modo che il primo lato sia connesso soltanto con l'ultimo e col secondo, il secondo soltanto col primo e col terzo, il terzo soltanto col secondo e con quarto, ..., l'ultimo soltanto col penultimo e col primo. Sia k un numero dispari, e si considerino p circuiti d'ordine k distinti, $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_p$. Si connettano poi Ψ_1 e Ψ_2 mediante due rette b_1 e a_2 in modo che b_1 sia connessa con un lato di Ψ_1 e con a_2 , mentre a_2 sia connessa con b_1 e con un lato di Ψ_2 . Analogamente si connettano Ψ_2 e Ψ_3 mediante due rette b_2 e a_3 in modo che b_2 sia connessa con un lato di Ψ_2 - diverso da quello connesso con a_2 - e con a_3 , mentre a_3 sia connessa con b_2 e con un lato di Ψ_3 , ... e così via. Conetteremo così in modo analogo, Ψ_3 a Ψ_4 , Ψ_4 a Ψ_5 , ..., Ψ_{p-1} a Ψ_p . Verremo ad ottenere un n -latero (con $n = kp + 2(p-1) = (k+2)p - 2$), avente $(k+3)p - 3$ punti di connessione, e quindi genere virtuale

$$(k+3)p - 3 - (n-1) = (k+3)p - 3 - (k+2)p + 2 + 1 = p.$$

Designeremo un tal n -latero colla frase: *n -latero ordinario, di genere virtuale p , di prima specie*. E si noti che nel caso che sia $p = 1$, un tal n -latero si riduce al solo circuito Ψ_1 .

Si dirà invece *n -latero ordinario, di genere virtuale p , di seconda specie* un n -latero costruito in modo del tutto uguale a quello di prima specie, con la sola differenza che Ψ_p si prende con $k+1$ lati anzichè con k . In tal caso viene $n = (k+2)p - 1$. E si osservi che negli n -lateri di prima specie n ha la stessa parità di p , mentre in quelli di seconda specie n ha la parità opposta a quella di p .

5. Possiamo ora supporre che Ω sia un n -latero ordinario, di genere virtuale p , di prima specie, costruito a partire da un certo valore di k . Conservando a Θ e a Ω il significato di cui ai numeri precedenti abbiamo intanto che la sezione piana generica di ogni rigata spezzata avente in Σ una sua curva di diramazione, ha lo stesso schema di connessione di Ω .

Sia Λ una tal rigata. In essa avremo pertanto, in corrispondenza al circuito Ψ_1 di Ω , un cosiddetto *circuito di piani* Ξ_1 , cioè una successione di piani connessi il primo col secondo, il secondo col terzo, ..., l'ultimo col primo. Analogamente, in corrispondenza ai circuiti di rette Ψ_2, \dots, Ψ_p si avranno i circuiti di piani Ξ_2, \dots, Ξ_p , e in corrispondenza alle rette

$$\begin{array}{l} b_1, a_2, b_2, a_3, \dots, b_{p-1}, a_p, \\ \text{i piani} \quad Y_1, X_2, Y_2, X_3, \dots, Y_{p-1}, X_p, \end{array}$$

i quali connettono tra loro i vari circuiti.

Una direttrice B di Λ di genere virtuale p ed ordine minimo, deve incontrare tutte le generatrici di Λ , e pertanto avrà a comune con

ciascun piano di Λ una retta, oppure un solo punto, che sarà necessariamente il centro del fascio delle generatrici appartenenti al piano dato. Sia α un piano di Λ , avente a comune con B il solo centro delle generatrici che vi appartengono, e sia β un piano connesso con α , mediante una retta di connessione r . Sia poi P il centro del fascio delle generatrici appartenenti ad α , e Q quello del fascio delle generatrici appartenenti a β . I punti P e Q , in base a quanto abbiamo ricordato al n. 3, appartengono necessariamente ad r ; ma sono distinti tra loro, perchè ad essi corrispondono in Σ due punti di connessione distinti.

Inoltre B , avendo genere virtuale p , deve avere la stessa connessione del sistema delle generatrici di Λ , e pertanto la parte di B appartenente a β deve essere connessa con la parte appartenente ad α . Ma B , per ipotesi, ha a comune con α il solo punto P ; quindi la parte di B che appartiene a β deve passare per P , e di conseguenza non può ridursi ad un sol punto, poichè questo punto dovrebbe essere per necessità Q , mentre Q è distinto da P . Da ciò segue che B ha una retta a comune con β . In conclusione:

Se due piani α e β di Λ sono direttamente connessi tra loro mediante una retta di connessione, una direttrice di genere virtuale p , e di ordine minimo, di Λ , deve avere una retta a comune con almeno uno dei piani α e β .

6. Dalla proposizione ora dimostrata segue immediatamente che B ha a comune una retta con almeno uno dei piani Y_1 e X_2 , con almeno uno dei piani Y_2 e X_3, \dots , con almeno uno dei piani Y_{p-1} ed X_p .

Si consideri poi uno dei circuiti di piani da cui è costituita Λ , per esempio, Ξ_1 . Dalla proposizione che chiude il n. 5 discende che, essendo i piani di Ξ_1 disposti in una successione ciclica, in modo che due piani consecutivi siano direttamente connessi tra loro, il numero dei piani di Ξ_1 aventi a comune con B una retta sono almeno tanti quanti i piani di Ξ_1 aventi a comune con B un punto. Ma il numero, k , dei piani di Ξ_1 , è dispari, pertanto B ha una retta a comune con almeno $\frac{k+1}{2}$ dei piani di Ξ_1 . Altrettanto può dirsi per gli altri circuiti, e quindi

B ha a comune $\frac{k+1}{2}$ rette con ciascuno dei circuiti $\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_p$.

7. Dalle due proposizioni del numero precedente discende che B ha a comune complessivamente $\frac{1}{2}(k+1)p$ rette coi circuiti $\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_p$, e complessivamente $p-1$ rette coi piani $Y_1, X_2, Y_2, X_3, \dots, Y_{p-1}, X_p$. Quindi l'ordine di B è almeno $\frac{1}{2}(k+1)p + p - 1 = \frac{1}{2}(k+3)p - 1 = \frac{1}{2}[(k+2)p - 2 + p]$. E ricordando che $n = (k+2)p - 2$, si conclude che:

L'ordine di B è $\cong \frac{1}{2}(n+p)$.

Tenuto presente quanto si è affermato alla fine del n. 3, giungiamo infine alla conclusione:

Esistono rigate, di genere p e di un opportuno ordine n avente la medesima parità di p , per cui l'ordine minimo delle direttrici è $\frac{1}{2}(n+p)$.

Tenendo conto poi del n. 1 si ha che

Esistono rigate di genere p , per cui il grado minimo delle direttrici è p .

Se si suppone invece che Ω sia un n -latero ordinario, di genere virtuale p , di seconda specie, con lievi, ovvie modifiche al ragionamento precedente, si dimostra che:

Esistono rigate di genere p , e di un opportuno ordine n avente parità opposta a quella di p , per cui l'ordine minimo delle direttrici è $\frac{1}{2}(n+p-1)$.

In conseguenza:

Esistono rigate di genere p , per cui il grado minimo delle direttrici è $p-1$.

8. Dalla mia Nota citata in ⁽⁸⁾ risulta che, se $n \cong 3p+2$, esiste una famiglia di rigate di S_3 , la cui rigata generica ha per curva di diramazione una curva generica di classe n e genere p ; ora, dai numeri precedenti risulta che la rigata generica di questa famiglia ha come grado minimo delle sue direttrici il numero p , o il numero $p-1$, a seconda che n è o no della stessa parità di p (almeno se si prende n sufficientemente alto). In questo senso si può dire che le rigate di genere p aventi direttrici di grado inferiore a $p-1$ sono particolari. Come abbiamo notato nella introduzione, non possiamo decidere se tal frase abbia senso quando si considerino come lo stesso ente due rigate birazionalmente equivalenti senza eccezione, perchè non sappiamo da quali moduli dipenda una tal rigata entro la classe delle rigate ad essa birazionalmente equivalenti con eccezioni.

Mediante procedimenti simili a quelli usati nei numeri precedenti, si può tuttavia dimostrare che esistono rigate spezzate in piani il cui grado minimo delle direttrici di genere virtuale p è un qualunque numero positivo fissato minore di $p-1$. Non è però possibile dedurre da ciò l'esistenza di rigate irriducibili godenti di questa proprietà, in quanto se una rigata irriducibile tende ad una rigata spezzata in piani, l'ordine, e quindi il grado, di una sua direttrice può al limite diminuire, potendosi staccare da essa alcune generatrici.

Indico ora una via che presumo possa servire a dimostrare l'effettiva esistenza di rigate irriducibili di genere p , per cui il grado di una direttrice raggiunge come valore minimo un numero positivo prefissato minore di $p-1$. Se A è una direttrice di grado minimo di una rigata, e C è una

qualsiasi altra direttrice, di grado sufficientemente alto, la somma di A e di un conveniente gruppo di generatrici è linearmente equivalente a C ⁽¹⁵⁾; onde, se facciamo l'immagine proiettiva del sistema lineare completo $|C|$, una delle sezioni iperpiane della rigata F così ottenuta si spezzerà in un gruppo di generatrici e nella trasformata della A (che chiameremo ancora A , per semplicità).

Nella mia Memoria citata ⁽¹⁶⁾, dimostro che condizione necessaria e sufficiente affinché una curva piana sia sezione piana di una rigata di S_3 , è che essa sia proiezione di una curva Γ appartenente ad una quadrica di S_5 da un piano appartenente alla quadrica stessa; e che, fissa tenendo la curva Γ da proiettarsi e facendo variare il piano da cui si esegue la proiezione, si ottengono ∞^3 curve proiezioni, ciascuna delle quali è omografica ad una sezione piana di una medesima rigata. L'ordine di una particolare curva scelta tra queste, si abbassa, quando il piano da cui si esegue la proiezione si appoggia a Γ in un certo numero di punti.

Sarebbe molto interessante determinare una analoga condizione necessaria e sufficiente affinché una curva di un S_{r-1} sia sezione iperpiana di una rigata non conica di S_r . È da credere che affinché una curva goda di queste proprietà occorra e basti che essa sia proiezione di una curva Γ appartenente ad una certa varietà V , birazionalmente equivalente alla grassmanniana delle rette di S_r , da un conveniente spazio lineare appartenente alla V ; e che al variare entro V dello spazio lineare da cui si proietta, Γ venga proiettato in ∞^r curve ciascuna delle quali è omografica ad una sezione iperpiana della stessa rigata F . Si verrebbe così a stabilire una corrispondenza birazionale tra le sezioni iperpiane di F e gli spazi lineari di una certa dimensione, che siano contenuti in V .

Se ora la F è l'immagine proiettiva del sistema lineare completo $|C|$ di cui sopra, una sezione iperpiana contenente la direttrice d'ordine minimo A dovrà corrispondere ad uno spazio lineare α di V che si appoggia nel massimo numero di punti alla Γ . L'ordine, e quindi il grado, di A , dipenderà dal numero dei punti di appoggio. L'esistenza di rigate aventi come minimo grado delle loro direttrici un certo numero viene in tal modo a dipendere dall'esistenza in V di curve di un certo ordine, per cui il numero dei punti di appoggio agli spazi lineari di una certa dimensione contenuti in V raggiunga un certo massimo.

La determinazione di una condizione necessaria e sufficiente affinché una curva sia sezione iperpiana di una rigata non conica di S_r riescirà anche utile nello studio di altri problemi relativi alle rigate. Vi ritorneremo in altra occasione.

⁽¹⁵⁾ Op. cit. in ⁽³⁾, pag. 7.

⁽¹⁶⁾ Op. cit. in ⁽⁸⁾.

Meccanica. — *Generalizzazione del teorema di Jacobi della meccanica analitica ai sistemi anolonomi.* Nota di GIOVANNI LAMPARIELLO, presentata (1) dall'Accademico GIOVANNI GIORGI.

1. La teoria dei sistemi dinamici anolonomi, com'è noto, non ha ancora raggiunto un assetto altrettanto soddisfacente quanto quella dei sistemi olonomi.

Le ricerche generali intorno a quest'importante soggetto della Dinamica hanno mirato fin qui in massima parte a stabilire la forma delle equazioni dinamiche più adatta per la discussione dell'andamento del moto.

Il VIERKANDT (1) ha usato per primo il metodo dei moltiplicatori di LAGRANGE; il KORTEWEG (2) ha applicato le equazioni di LAGRANGE introducendovi le reazioni provenienti dai vincoli anolonomi ed ha mostrato come si possano stabilire le equazioni del moto eliminando le reazioni; l'APPELL (3) ha trovato una notevole forma delle equazioni la cui struttura dipende dall'energia di accelerazione del sistema che è funzione delle coordinate lagrangiane e delle loro derivate prime e seconde oltre che eventualmente del tempo.

Al MAGGI (4), allo TZÈNOFF (5) ecc. si debbono altre forme delle equazioni.

Il VOLTERRA (6) ha introdotto per primo certi parametri che chiama caratteristiche del moto. Si può dire che le ricerche del VOLTERRA intorno ai sistemi a caratteristiche indipendenti siano le sole che abbiano carattere sistematico in ordine al difficile problema dell'integrazione. Il BOLTZMANN (7) ha ritrovato le equazioni del VOLTERRA ed HAMEL (8) ha assegnato ad esse una forma che può considerarsi come definitiva se per tale si deve intendere quella più adatta per affrontare l'integrazione.

S. A. TCHAPLYGHIN (9) e QUANJEL (10) hanno proposto un teorema di JACOBI generalizzato per l'integrazione delle equazioni, seguendo metodi differenti, che implicano delle restrizioni estranee alla natura del problema.

Il DOBRONRAVOV (11), muovendo dalle equazioni di VOLTERRA-HAMEL, ha enunciato il teorema di JACOBI generalizzato nel caso dei vincoli scleronomi (indipendenti dal tempo) ed ha indicato il metodo per la dimostrazione.

(1) Nell'Adunanza del 5 giugno 1942-XX.

Rimaneva da fare un ulteriore passo, considerando anche i vincoli reonomi (dipendenti dal tempo). È ciò che qui ci proponiamo, costruendo l'equazione a derivate parziali dalla quale facciamo dipendere il problema d'integrazione delle equazioni dinamiche.

Alla presente breve Nota seguirà una Memoria più ampia con tutti i necessari sviluppi.

2. Siano q_1, q_2, \dots, q_n le coordinate lagrangiane in corrispondenza biunivoca con le configurazioni di un sistema dinamico soggetto a vincoli di forma pfaffiana

$$[1] \quad \sum_{i=1}^n \alpha_{ik}(q_1, \dots, q_n; t) dq_k + \alpha_{i n+1}(q_1, \dots, q_n; t) dt = 0$$

dove l'indice i assume m valori ($m < n$). Esempi di vincoli siffatti sono offerti per esempio, da corpi rigidi animati da moto di puro rotolamento su superficie rigide fisse o in moto conosciuto.

Volendo fissare le idee su di un esempio concreto, consideriamo una sfera σ rigida obbligata a rotolare senza strisciare su di un piano $\tilde{\omega}$ rotante su se stesso intorno ad un suo punto Ω .

Diciamo ξ_0, η_0, ζ_0 le coordinate del centro O della sfera rispetto ad un sistema di assi cartesiani fissi di cui il piano coordinato $\xi\eta$ coincida con $\tilde{\omega}$, con che la ζ_0 eguaglia il raggio r della sfera, θ, φ, ψ gli angoli di EULERO intorno ad O (relativi ad una terna di assi solidali con la sfera passanti per O).

La condizione di puro rotolamento implica che, all'istante t , il punto di contatto C della sfera σ col piano $\tilde{\omega}$, considerato come appartenente a σ , deve avere la stessa velocità vettoriale di C , considerato come punto del piano $\tilde{\omega}$.

Se dunque Ω_1 è la velocità angolare di $\tilde{\omega}$ (ortogonale al piano $\xi\eta$), si ha

$$V_0 + \Omega \wedge (C - O) = \Omega_1 \wedge (C - \Omega).$$

Poichè le coordinate dei punti C ed O rispetto agli assi fissi $\Omega\xi\eta\zeta$ sono

$$\xi_0, \eta_0, 0 \quad ; \quad \xi_0, \eta_0, r,$$

indicando con π, χ, ρ le analoghe componenti di Ω , si ha

$$\dot{\xi}_0 - r\chi = -\omega_1 \eta_0, \quad \dot{\eta}_0 + r\pi = \omega_1 \xi_0.$$

Ma, in virtù di formule classiche, si ha

$$\begin{aligned} \pi &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi \\ \chi &= \dot{\theta} \sin \psi - \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi. \end{aligned}$$

Dunque si hanno in definitiva i vincoli

$$\begin{aligned} d\xi_0 - r \sin \psi d\theta + r \sin \theta \cos \psi d\varphi + \omega_1 \eta_0 dt &= 0 \\ d\eta_0 + r \cos \psi d\theta + r \sin \theta \sin \psi d\varphi - \omega_1 \xi_0 dt &= 0. \end{aligned}$$

Si vede che i coefficienti di dt dipendono da t per il tramite di ω_1 e da ξ_0 , η_0 , mentre i coefficienti di $d\xi_0$, $d\eta_0$, $d\theta$, $d\varphi$ sono indipendenti dal tempo.

Se la rotazione di $\tilde{\omega}$ è uniforme, la Ω_1 è costante e i coefficienti di dt non dipendono dal tempo.

Un esempio in cui i coefficienti del dt fossero funzioni del solo tempo si ha immaginando che il piano $\tilde{\omega}$ sia animato da moto traslatorio. In tal caso si assumerà come piano $\Omega\xi\eta$ un piano fisso parallelo a $\tilde{\omega}$.

Se gli m vincoli ⁽¹⁾ sono integrabili, cioè sostituibili con altrettante equazioni finite nelle q indipendenti e nella t , il sistema è olonomo con $n-m$ gradi di libertà.

Se gli m vincoli non sono integrabili, sono ∞^n tutte le possibili configurazioni del sistema, ed invece ∞^{n-m} le possibili configurazioni *infinitamente vicine* ad ogni configurazione assegnata, il che significa che la totalità degli spostamenti infinitesimi compatibili con i vincoli a partire da ogni configurazione è inferiore a quella delle configurazioni. In altre parole, il sistema non può passare da una configurazione C_0 ad un'altra C_1 attraverso una successione continua *qualunque* di configurazioni ⁽¹⁾.

I vincoli ed il sistema diconsi *anOLONOMI*.

Questo concetto meccanico così importante che si trasporta anche ai sistemi continui è dovuto, com'è noto, ad HERTZ per quanto prima di quest'illustre fisico fossero già stati considerati speciali sistemi anOLONOMI, per es., da LAGRANGE (cfr. A. VOSS, *Ueber die Differentialgleichungen der Mechanik*, « Math. Ann. », Bd. 25).

Quale che sia la natura dei vincoli, olonomi od anOLONOMI, definiamo nel modo seguente n parametri

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$$

che chiamiamo *caratteristiche cinetiche*.

Poniamo

$$[2] \quad \omega_i = \sum_1^m \alpha_{ik} \dot{q}_k + \alpha_{i,n+1}$$

⁽¹⁾ Cfr. T. LEVI-CIVITA-U. AMALDI, *Lezioni di meccanica razionale*, vol. 1º, cap. VI, § 2; vol. 2º, cap. V, § 8, Bologna, Zanichelli; G. GIORGI, *Lezioni di meccanica razionale* (in corso di stampa), vol. 1º (ed. litografata provvisoria, Cremonese, Roma, 1931, pagg. 190-193);

in corrispondenza agli m vincoli assegnati, diciamo per i valori

$$n-m+1, \quad n-m+2, \dots, n$$

dell'indice i ; siano inoltre le $\omega_1, \dots, \omega_{n-m}$ funzioni lineari arbitrarie delle \dot{q} con le α_{ik} ($i = 1, \dots, n-m; k = 1, \dots, n$) e le $\alpha_{i n+1}$ funzioni delle q e t , ad esempio, le stesse \dot{q} (nel quale caso $\alpha_{i n+1}$ è nulla e le α_{ik} sono tutte nulle tranne una che si riduce all'unità).

Questa impostazione ha il vantaggio di esser valida anche per i sistemi olonomi quando sia necessario o convenga introdurre al posto delle \dot{q} altrettante caratteristiche cinetiche. Per un sistema anolonomo ad $n-m$ gradi di libertà, m delle caratteristiche sono nulle e di ciò si terrà conto nelle equazioni dinamiche.

In tal caso, infatti, i vincoli (1) si esprimono con le equazioni

$$[1'] \quad \omega_{n-m+1} = 0, \dots, \omega_n = 0.$$

Dalle [2] si ha

$$\omega_i dt = \sum_k^n \alpha_{ik} dq_k + \alpha_{i n+1} dt.$$

Poniamo

$$[3] \quad dx_i = \omega_i dt \quad (i = 1, \dots, n)$$

e chiamiamo, col WHITTAKER (1), quasi coordinate le quantità x_1, \dots, x_n di cui sono definite attraverso le [3] solo delle variazioni infinitesime.

Se le forme

$$\sum_k^n \alpha_{ik} dq_k + \alpha_{i n+1} dt$$

sono differenziali esatti, le x sono coordinate (nel senso ordinario).

Dalle [2], supposto che le α_{ik} formino un determinante α non nullo, si ha

$$[4] \quad \bar{q}_i = \sum_k^n \beta_{ik} \omega_k + \beta_{i n+1} \quad (i = 1, \dots, n)$$

essendo

$$[5] \quad \beta_{ik} = \alpha^{(ki)} \quad , \quad \beta_{i n+1} = - \sum_k^n \alpha^{(ki)} \alpha_{k n+1}.$$

Le $\alpha^{(ki)}$ sono i reciproci delle α_{ki} nel senso del calcolo delle matrici.

(1) *Analytical Dynamics*, ch. II, Cambridge, University Press, 4^a ed., 1937; cfr. anche BOLTZMANN, «Wien. Sitzungs-Ber.», III, pag. 1603, 1902.

3. Ciò posto, calcoliamo l'energia cinetica T^* del sistema in funzione delle q , delle caratteristiche ω e del tempo t e poniamo

$$[6] \quad p_i = \frac{\partial T^*}{\partial \omega_i}.$$

Chiamiamo quasi momenti cinetici queste quantità.

Poichè la T è una funzione quadratica nelle ω , le [6] sono risolubili rispetto alle ω e si hanno così le caratteristiche in funzione delle coordinate q , dei quasi momenti e del tempo.

Costruiamo la funzione

$$[7] \quad H = \sum_1^n p_i \omega_i - (T^* + U)$$

con le variabili p, q, t ; la $U(q; t)$ è il potenziale delle forze impresse al sistema.

Se T_2, T_1, T_0 sono i gruppi di termini quadratici, lineari e di grado zero nelle ω , per il teorema di Eulero, la H si riduce a

$$T_2^* - (T_0^* + U),$$

mentre la forma quadratica T_2^* espressa nelle variabili canoniche va sostituita con la forma reciproca.

Formiamo l'equazione a derivate parziali del primo ordine

$$[8] \quad H\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_n}; q; t\right) + \sum_1^n \beta_{i, n+1} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} = 0$$

di cui il primo termine si ottiene sostituendo ad ogni p la espressione differenziale

$$[9] \quad p_k = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_k} = \sum_1^n \beta_{ik} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_i} \quad (k = 1, \dots, n).$$

Sussiste il seguente

TEOREMA. SE

$$\mathcal{V}(q_1, \dots, q_n; c_1, \dots, c_n; t)$$

È UNA SOLUZIONE COMPLETA DELL'EQUAZIONE [8], LE EQUAZIONI

$$[10] \quad p_i = \sum_1^n \beta_{ki} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_k} \quad (i = 1, \dots, n)$$

$$[11] \quad c'_i = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial c_i}$$

DOVE LE $c_1, \dots, c_n; c'_1, \dots, c'_n$ SONO $2n$ COSTANTI ARBITRARIE, FORMANO LA SOLUZIONE GENERALE DELLE EQUAZIONI CANONICHE GENERALIZZATE.

LE [11] DA SOLE CARATTERIZZANO LE COORDINATE q IN FUNZIONE DEL TEMPO E DELLE $2n$ COSTANTI c, c' E COSTITUISCONO LA SOLUZIONE GENERALE DELLE EQUAZIONI DI VOLTERRA-HAMEL.

Se i vincoli sono scleronomi e il potenziale U non dipende dal tempo, l'equazione [8] si riduce alla forma

$$[8'] \quad H\left(\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial x_n}; q\right) + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t} = 0$$

dove la H espressa nelle q ed ω è soltanto

$$(T_2^*) - U$$

cioè l'energia (meccanica) totale del sistema in funzione delle coordinate e dei quasi momenti cinetici.

Sussiste il principio della conservazione dell'energia e si può cercare di soddisfare alla [8'] con una funzione

$$[12] \quad \mathcal{W} = -Et + \mathcal{W}$$

dove E è la costante dell'energia.

La [8] si riduce allora alla più semplice forma

$$[13] \quad H\left(\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial x_n}; q\right) = E.$$

Se \mathcal{W} è una soluzione completa di questa equazione, in cui figurano oltre la costante E , altre $n-1$ costanti arbitrarie c_2, \dots, c_n , le equazioni

$$[14] \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial E} = t - t_0 \\ \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial c_k} = c'_k \end{cases} \quad (k = 2, 3, \dots, n)$$

caratterizzano le q come funzioni del tipo

$$q_i = q_i(t - t_0; E, c_2, \dots, c_n; c'_2, \dots, c'_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

e risolvono il problema dinamico.

Per calcolare le $q(t)$ soddisfacenti ai vincoli [1], basterà sostituire nelle [1] le funzioni q di t, c, c' dedotte dalle [11], con che si hanno m equazioni atte a determinare m costanti in funzione di t e delle rimanenti $2n - m$.

In definitiva, la totalità dei movimenti del sistema anolonomo dipende da $2n - m$ costanti arbitrarie, conformemente alle ∞^n configurazioni e agli $n - m$ gradi di libertà.

BIBLIOGRAFIA

- (1) VIERKANDT, *Ueber gleitende und rollende Bewegung*, « Monatshefte der Math. und Phys. », 1892; cfr. anche N. M. FERRERS, « Quart. Journ. Math. », vol. 12, 1871; C. NEUMANN, Leipzig.-Ber. Bd. 40, 1888; E. GUGINO, « Rend. Lincei », 1930.
- (2) KORTEWEG, *Ueber eine ziemlich verbreitete unrichtige Behandlungsweise eines Problems der rollenden Bewegung, ecc.* « Nieuw Arch. voor Wiskunde », Deel. 1899.
- (3) P. APPELL, *Sur une forme générale des équations de la dynamique*, « Compt. Rend. », 1899; *Traité de mécanique rationnelle*, t. II; *Les mouvements de roulement en dynamique*, « Collection Scientia », 1899.
- (4) G. A. MAGGI, *Di alcune forme delle equazioni della dinamica applicabili ai sistemi anolonomi*, « Rend. Lincei », 1901; cfr. anche P. WORONETZ, *Moskau Math. Samml.*, vol. 22, 1901 e *Ueber die Bewegung eines starren Körpers, der ohne Gleitung auf einer beliebigen Fläche rollt*, « Math. Ann. », Bd. 70, 1911; H. POINCARÉ, *Sur une forme nouvelle des équations de la mécanique*, « Compt. Rend. », Paris, to. 132, 1901; N. ČETAJEV, « Compt. Rend. », Paris, to. 185, 1927.
- (5) I. TZENOFF, *Sur les équations du mouvement des systèmes matériels non holonomes*, « Journ. de Liouville », 1920; cfr. anche « Math. Ann. », t. 91, 1924.
- (6) V. VOLTERRA, *Sopra una classe di equazioni dinamiche*, « Atti della R. Accad. delle Sc. di Torino », 1898; *Sulla integrazione di una classe di equazioni dinamiche*, « ibidem », 1898.
- (7) L. BOLTZMANN, *Ueber die Form der Lagrangeschen Gleichungen für nichtholonyme generalisierte Koordinaten*, Wien. Sitzungsber., 1902; « Gesammelte Abhandlungen », III.
- (8) G. HAMEL, *Die Lagrange-Eulerschen Gleichungen der Mechanik*, « Zeitschrift für Math. und Phys. », 1904; *Ueber die virt. Verschiebungen in der Mechanik*, « Math. Ann. » 1904; *Ueber die Grundlagen der Mechanik*, « Math. Ann. », 1909; *Ueber nichtholonome Systeme*, « Math. Ann. », 1924; *Das Hamiltonsche Prinzip bei nichtholonomen Systemen*, « Math. Ann. », 1935; *Nichtholonome Systeme höherer Art.*, « Sitz. bericht. der Berliner Math. Gesell. », 1938.
- (9) S. A. TCHAPLYGHIN, lavoro in lingua russa.
- (10) J. QUANJEL, *Les équations générales de la mécanique dans le cas des liaisons non holonomes*, « Rend. Palermo », 1906.
- (11) V. V. DOBKONRAVOV, *Generalization of Hamilton-Jacobi's theorem to quasi-coordinates*, « Compt. Rend. de l'Ac. des Sc. de l'URSS », 1939.

Meccanica. — *Sulle discontinuità dei potenziali poliarmonici.* Nota di MARIA PASTORI, presentata ⁽¹⁾ da UMBERTO CISOTTI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Per potenziali poliarmonici di ordine m , di superficie, di doppio strato, di spazio, si intendono quelle funzioni che si ottengono dai corrispondenti potenziali newtoniani, sostituendo alla funzione armonica elementare $\frac{1}{r}$, la funzione m -armonica elementare r^{2m-3} (dove r è la distanza tra il punto potenziato e un punto generico del campo potenziante) ⁽²⁾.

Per $m = 2$ si hanno i potenziali biarmonici che entrano negli integrali delle equazioni della statica elastica ⁽³⁾, e le cui discontinuità vennero studiate da SOMIGLIANA ⁽⁴⁾, nell'ipotesi che siano regolari e derivabili senza limitazioni quelle funzioni dei punti del campo agente che rappresentano la densità per i potenziali armonici. Precisamente egli calcolò le discontinuità delle derivate di tali potenziali fino alle terze, e ciò in vista di alcune applicazioni elastiche, e trovò che:

a) per i potenziali biarmonici di superficie, sono continue, attraverso la superficie agente, le derivate prime e seconde, le discontinuità incominciando a presentarsi nelle derivate terze;

b) per i potenziali biarmonici di spazio, sono continue, attraverso la superficie che limita lo spazio agente, le derivate prime, seconde e terze;

c) per i potenziali biarmonici di doppio strato, sono continue, attraverso la superficie agente, le derivate prime, le discontinuità incominciando a presentarsi nelle derivate seconde.

⁽¹⁾ Nell'Adunanza del 5 giugno 1942-XX.

⁽²⁾ Cfr. V. GIULOTTO, *Il problema di Dirichlet nel campo poliarmonico e nel caso di una distribuzione continua di massa con densità variabile sulla superficie sferica.* « Rend. Ist. Lombardo », vol. LXII, 1930, pagg. 1-24 § 3.

⁽³⁾ C. SOMIGLIANA, *Sulle equazioni dell'elasticità.* « Annali di Mat. », serie 2^a, vol. XVII, 1888-89, pagg. 37-74, oppure in « Memorie scelte », Torino, 1936, pagg. 51-76.

⁽⁴⁾ C. SOMIGLIANA, *Sulle discontinuità dei potenziali elastici.* « Atti della R. Acc. di Torino », vol. 51, 1915-16, pagg. 1330-1352.

In questa Nota osservo che, conservando le ipotesi di Somigliana sulla densità dell'agente, si trova più in generale per i potenziali poliarmonici quanto segue:

1° Le discontinuità delle derivate dei potenziali m -armonici di superficie incominciano a presentarsi nelle derivate m -esime quando m è dispari, e solo nelle $(m+1)$ -esime quando m è pari.

2° Le discontinuità delle derivate dei potenziali m -armonici di spazio incominciano a presentarsi nelle derivate $(m+1)$ -esime quando m è dispari, e solo nelle $(m+2)$ -esime quando m è pari.

3° Le discontinuità delle derivate dei potenziali m -armonici di doppio strato incominciano a presentarsi nelle derivate $(m-1)$ -esime quando m è dispari e solo nelle m -esime quando m è pari.

E il calcolo di tali discontinuità si riduce sempre, come è facile prevedere, a quello delle discontinuità relative ai potenziali armonici e alle loro derivate.

Questi risultati mostrano come si estenda al caso generale la differenza di comportamento tra il caso di m dispari e quello di m pari che già si manifesta per $m=1$ ed $m=2$, quando si confrontino i ben noti risultati sulle discontinuità dei potenziali armonici e delle loro derivate con quelli sopra ricordati sulle discontinuità dei potenziali biarmonici. Essi mostrano inoltre che, come già per i potenziali ordinari, così in generale le discontinuità delle derivate dei potenziali di spazio incominciano a presentarsi con un ritardo di un'unità nell'ordine di derivazione rispetto a quelli di superficie, mentre le discontinuità delle derivate dei potenziali di doppio strato incominciano a presentarsi con un anticipo di un'unità nell'ordine di derivazione rispetto a quelli di superficie.

1. - POTENZIALI DI SUPERFICIE.

Sia:

$$[1] \quad V = \int_{\sigma} h r^{2m-3} d\sigma,$$

dove σ è la superficie agente, h una funzione regolare dei punti $M(a, b, c)$ di essa, r la distanza del punto $P(x, y, z)$ dello spazio da un generico punto M di σ :

$$[2] \quad r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}.$$

Supposto P esterno a σ e derivando in P , si ha:

$$[3] \quad \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= (2m-3) \int_{\sigma} h r^{2m-5} (x-a) d\sigma = \\ &= (2m-3) \left[x \int_{\sigma} h r^{2m-5} d\sigma - \int_{\sigma} h a r^{2m-5} d\sigma \right]; \end{aligned}$$

e analogamente per le altre variabili. Ogni derivata è quindi una somma di potenziali $(m-1)$ -armonici di superficie.

Dovendo ora passare alle derivate di ordine superiore, distinguiamo il caso in cui la derivazione si fa sempre rispetto alla stessa variabile da quello in cui la derivazione si fa rispetto a variabili diverse.

1° caso: derivate rispetto alla stessa variabile.

Si ha:

$$[4] \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= (2m-3) \int_{\sigma} h [r^{2m-5} + (2m-5) r^{2m-7} (x-a)^2] d\sigma \\ \frac{\partial^3 V}{\partial x^3} &= (2m-3) (2m-5) \int_{\sigma} h [3r^{2m-7} (x-a) + (2m-7) r^{2m-9} (x-a)^3] d\sigma \\ \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} &= (2m-3) (2m-5) \int_{\sigma} h [3r^{2m-7} + 6(2m-7) r^{2m-9} (x-a)^2 + \\ &\quad + (2m-7) (2m-9) r^{2m-11} (x-a)^4] d\sigma \\ &\dots\dots\dots \\ &\text{ecc.} \end{aligned} \right.$$

In generale, nella derivata k -esima, il termine dove r compare con esponente più basso sarà, salvo un coefficiente numerico, della forma:

$$[5] \quad \int_{\sigma} h r^{2m-3-2k} (x-a)^k d\sigma.$$

Perciò la derivata considerata sarà certamente continua attraverso σ finchè:

$$2m-3-2k \geq -1.$$

Il caso dell'eguaglianza dà:

$$k = m-1$$

ed il termine considerato diviene:

$$[5'] \quad \int_{\sigma} h (x-a)^{m-1} r^{-1} d\sigma.$$

In un'ulteriore derivazione in P , il termine che potrà dar luogo a discontinuità sarà, sempre salvo un coefficiente numerico, della forma:

$$[6] \quad \int_{\sigma} h (x-a)^{m-1} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} d\sigma.$$

Supponiamo ora m pari; sviluppando la potenza $(x-a)^{m-1}$ si otterrà un numero pari di termini, tutti dello stesso grado in x ed a complessivamente, e con segni alternati; scomponendo in corrispondenza l'integrale [6] come si è fatto nell'ultimo membro di [3], si avrà una combinazione di m derivate prime di potenziali armonici di superficie, ciascuno dei quali presenta, nel passaggio attraverso σ , la ben nota discontinuità; ma tali discontinuità si distribuiscono a coppie di termini eguali e contrari e perciò si elidono. Quindi nel caso di m pari anche le derivate m -esime sono continue attraverso σ .

Supponiamo ora m dispari, e quindi $(x-a)^{m-1}$ con un numero dispari di termini. Il ragionamento precedente ci porterà a concludere che non tutti i termini relativi alle discontinuità attraverso σ si elidono e ci darà modo di calcolare tale discontinuità mediante le note formole relative alle derivate dei potenziali armonici di superficie. Concludendo in questo primo caso:

Per i potenziali m -armonici di superficie le discontinuità incominciano a presentarsi nelle derivate m -esime quando m è dispari, e solo nelle $(m+1)$ -esime quando m è pari.

E il loro calcolo si riduce, come risulta dal procedimento precedente, a quello delle discontinuità delle derivate degli ordinari potenziali armonici di superficie.

2° caso: derivate rispetto a diverse variabili.

Se le derivate successive non sono fatte rispetto alla stessa variabile, ma rispetto a variabili diverse, nella derivata k -esima il termine dove r compare con esponente più basso sarà, salvo un coefficiente numerico, della forma:

$$[7] \quad \int_{\sigma} h r^{2m-3-2k} (x-a)^{k_1} (y-b)^{k_2} (z-c)^{k_3} d\sigma$$

con k_1, k_2, k_3 numeri positivi (uno dei quali può essere anche nullo), e tali che:

$$k_1 + k_2 + k_3 = k$$

e si avrà certamente continuità fino a $k = m-1$.

Per un'ulteriore derivazione, si possono ripetere i ragionamenti del primo caso, con la sola modificazione che in luogo di $(x-a)^{m-1}$ va sostituito un prodotto di potenze di $(x-a)$, $(y-b)$, $(z-c)$ in cui la somma degli esponenti è $m-1$. E si arriva anche qui alla conclusione del primo caso.

2. — POTENZIALI DI SPAZIO.

Per il potenziale m -armonico di spazio:

$$[8] \quad V = \int_{\tau} h r^{2m-3} d\tau$$

dove τ è lo spazio agente, che supponiamo racchiuso entro la superficie σ , aggiungiamo esplicitamente l'ipotesi che h , oltre ad essere funzione regolare dei punti $M(a, b, c)$ di τ , sia derivabile senza limitazioni.

Derivando in un punto $P(x, y, z)$ esterno a τ e tenendo presente [2], si ha:

$$[9] \quad \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= \int_{\tau} h \frac{\partial r^{2m-3}}{\partial x} d\tau = - \int_{\tau} h \frac{\partial r^{2m-3}}{\partial a} d\tau = \\ &= - \int_{\tau} \frac{\partial}{\partial a} (h r^{2m-3}) d\tau + \int_{\tau} r^{2m-3} \frac{\partial h}{\partial a} d\tau. \end{aligned}$$

E per il teorema di GAUSS sulla trasformazione di integrali, indicando con α il coseno dell'angolo che la normale a σ volta verso l'interno forma con l'asse delle x , si ha:

$$[10] \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \int_{\sigma} h \alpha r^{2m-3} d\sigma + \int_{\tau} r^{2m-3} \frac{\partial h}{\partial a} d\tau.$$

La derivata prima del potenziale m -armonico di spazio è quindi la somma di un potenziale m -armonico di spazio e di un potenziale m -armonico di superficie. Da ciò si deduce che le discontinuità delle derivate successive incominciano a presentarsi con un ritardo di un'unità nell'ordine di derivazione rispetto ai potenziali m -armonici di superficie, e che quindi si avrà:

Per i potenziali m -armonici di spazio le discontinuità incominciano a presentarsi nelle derivate $(m+1)$ -esime quando m è dispari e solo nelle derivate $(m+2)$ -esime quando m è pari.

E per ridurre il calcolo di tali discontinuità a quello delle derivate degli ordinari potenziali armonici di superficie basta derivare successivamente i due termini del secondo membro di [10] operando, nel secondo termine, trasformazioni analoghe a quelle che si son fatte su [9].

3. - POTENZIALI DI DOPPIO STRATO.

Consideriamo infine il potenziale m -armonico di doppio strato:

$$[11] \quad V = \int_{\sigma} h \frac{\partial r^{2m-3}}{\partial n} d\sigma,$$

conservando le notazioni del § 1. Se indichiamo con α, β, γ i coseni direttori della normale nel generico punto di σ , e cioè le componenti del suo versore \mathbf{n} , il vettore che ha per componenti:

$$[12] \quad U_1 = \int_{\sigma} h \alpha r^{2m-3} d\sigma, \quad U_2 = \int_{\sigma} h \beta r^{2m-3} d\sigma, \quad U_3 = \int_{\sigma} h \gamma r^{2m-3} d\sigma$$

potrà essere rappresentato così:

$$[12'] \quad \mathbf{U} = \int_{\sigma} h \mathbf{n} r^{2m-3} d\sigma.$$

Si ha allora, per una nota formula di calcolo vettoriale:

$$\operatorname{div} \mathbf{U} = \int_{\sigma} \operatorname{div} \mathbf{n} h r^{2m-3} d\sigma + \int_{\sigma} \mathbf{n} \times \operatorname{grad} (h r^{2m-3}) d\sigma.$$

Ma $\operatorname{div} \mathbf{n} = H$ è la curvatura media di σ ed $\mathbf{n} \times \operatorname{grad} (h r^{2m-3})$ è la derivata del prodotto $h r^{2m-3}$ nella direzione di \mathbf{n} . E poichè h , definita solo nei punti di σ , può collegarsi con una funzione dei punti dello spazio in modo che sia nulla la sua derivata nella direzione di \mathbf{n} ⁽¹⁾, si ha:

$$[13] \quad \operatorname{div} \mathbf{U} = \int_{\sigma} H h r^{2m-3} d\sigma + \int_{\sigma} h \frac{\partial r^{2m-3}}{\partial n} d\sigma.$$

Quindi, per la [11]:

$$[14] \quad V = \operatorname{div} \mathbf{U} = \int_{\sigma} H h r^{2m-3} d\sigma.$$

⁽¹⁾ Cfr. G. A. MAGGI, *Sul collegamento di una funzione data nei punti di una superficie con una funzione dei punti dello spazio, e sua applicazione alla teoria della funzione potenziale di doppio strato*. « Nuovo Cimento », serie VI, vol. XIV, 1917, pagg. 5-11. V. anche dello stesso A., il volumetto: *Teoria fenomenologica del campo elettromagnetico*. (Milano, 1931, § 48.)

Il primo termine è, per [12] [12'] una somma di derivate di potenziali m -armonici di superficie e l'ultimo è un potenziale di superficie, che ha in ogni punto per densità il prodotto della densità primitiva per la curvatura media della superficie σ in quel punto.

Da ciò si deduce che le discontinuità delle derivate successive incominciano a presentarsi con un anticipo di un'unità nell'ordine di derivazione rispetto ai potenziali m -armonici di superficie, e che quindi si avrà:

Per i potenziali m -armonici di doppio strato, le discontinuità incominciano a presentarsi nelle derivate $(m-1)$ -esime quando m è dispari e solo nelle m -esime quando m è pari.

OSSERVAZIONE SUI POTENZIALI FORMATI CON LE POTENZE PARI DI r .

Come è noto, fra le funzioni poliarmoniche elementari ci sono anche le potenze pari di r . Precisamente, oltre ad r^{2m-3} , è funzione m -armonica anche r^{2m-2} ⁽¹⁾.

Ma per i potenziali formati con tali funzioni non è il caso di parlare di discontinuità. Essi e le loro derivate sono tutte continue; anzi, dopo un certo numero di derivazioni sotto il segno, r sparisce. Infatti, derivando successivamente sotto il segno integrale, si hanno formole del tipo delle [4] o delle analoghe per gli altri tipi di potenziali, dove però figurano solo potenze pari di r . Così, dopo k derivazioni, il termine nel quale r ha esponente più basso, conterrà:

$$r^{2m-2-2k}$$

che per $k = m - 1$ ha esponente nullo. Dopo $m - 1$ derivazioni sparisce quindi r dall'ultimo termine, e lo stesso, nelle derivazioni successive, avviene per i precedenti.

⁽¹⁾ Cfr. R. MARCOLONGO, *Teoria matematica dell'equilibrio dei corpi elastici*. (Milano, 1904, Cap. I, § 2).

Una Monografia abbastanza recente sulle funzioni poliarmoniche si trova in « *Actualités scientifiques et industrielles* », N.º 331: M. NICOLESCO; *Les fonctions polyarmoniques*. (Paris, 1936).

Astronomia. — *I problemi fondamentali della Cosmogonia e la legge di Newton nel caso di più pianeti.* Nota IX ⁽¹⁾ di GIUSEPPE ARMELLINI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. — Nelle nostre precedenti Note sull'argomento, abbiamo sempre trattato il caso ideale di un Sole accompagnato da un unico pianeta. Come vedemmo allora (supponendo che il pianeta — come avviene per i pianeti reali — compia la sua rivoluzione intorno al Sole nello stesso senso ed in un tempo maggiore di quello impiegato dal Sole a compiere una rotazione), a causa del termine cosmogonico introdotto nella legge di NEWTON, il parametro dell'orbita planetaria diviene funzione crescente del tempo, mentre diminuisce l'inclinazione dell'orbita sul piano dell'elettore solare e diminuisce pure la sua eccentricità. Anzi questa ultima diminuisce in modo relativamente rapido, per cui, dopo un tempo generalmente piccolo rispetto all'età dei pianeti, l'orbita diviene presso a poco circolare ed il parametro si confonde quasi col semiasse maggiore.

Passiamo ora al caso di più pianeti.

2. — Ovviamente, se questi pianeti s'immaginano tutti di massa infinitesima, il problema non cambia, giacchè ognuno di essi è sottoposto soltanto all'attrazione del Sole senza soffrire nessuna perturbazione dagli altri. Se invece i pianeti sono di massa finita, il problema diviene estremamente complicato e può studiarsi solo — supponendo sempre che le masse siano piccole, come pure le eccentricità e le inclinazioni — con i metodi approssimati dati dalla Meccanica Celeste nella Teoria delle Perturbazioni.

In linea di massima possiamo dire che, se le masse planetarie sono piccole rispetto a quella solare — come appunto avviene nel caso dei pianeti reali del nostro sistema — il movimento ha luogo in modo analogo a quello valevole nel caso di un solo pianeta, ma appare perturbato e complicato dalla comparsa di termini fluttuanti, per cui per esempio, l'eccentricità, pur diminuendo secolarmente, può crescere per qualche tempo e così di seguito. Ma qui vogliamo occuparci soltanto del parametro

⁽¹⁾ Presentata nell'Adunanza del 5 giugno 1942-XX.

dell'orbita, per cui — come tra breve vedremo — si perviene ad un risultato di notevole importanza cosmogonica.

Per illustrarlo, notiamo che secondo la Meccanica Celeste, il parametro dell'orbita di un pianeta è proporzionale al quadrato del momento della quantità di moto posseduta dal pianeta stesso; onde l'accrescimento continuo del parametro, che ha luogo nel caso di un solo pianeta, mostra che il momento stesso passa, per così dire, dal Sole al pianeta.

Ora, nel caso di più pianeti, il calcolo mostra che tale passaggio avviene ancora, ma in *duplice modo*. E cioè — numerando i pianeti secondo la loro distanza dal Sole — si trova che *ognuno di essi assorbe momento della quantità di moto dal Sole e dai pianeti precedenti e lo cede a quelli seguenti*. Ne segue che i parametri delle orbite dei pianeti più vicini al Sole (astruendo sempre dalle perturbazioni periodiche) crescono *meno* rapidamente di quel che avverrebbe se essi fossero isolati, mentre quelli dei pianeti più lontani crescono *più* rapidamente. Ma — e qui sta appunto l'importanza cosmogonica del fenomeno — il calcolo numerico dimostra che mentre il rallentamento è *piccolo* ed anzi trascurabile per i pianeti più vicini al Sole, l'acceleramento è *notevolissimo* per i pianeti più lontani e specialmente per Nettuno.

Se ne deduce che — a parità di valore del coefficiente cosmogonico ε — il tempo impiegato dall'orbita di Nettuno (supposto che questo pianeta si sia distaccato dal Sole ed abbia circolato in un primo tempo nelle sue vicinanze) per raggiungere le dimensioni attuali, è assai minore di quel che sarebbe se questo pianeta fosse isolato. Ne segue che — a parità del coefficiente cosmogonico ε — l'età del Sistema Planetario è *assai minore* di quanto risulterebbe non tenendo conto dell'azione reciproca dei pianeti. E ciò permette di assegnare ad ε anche valori estremamente bassi, senza che l'età del Sistema Planetario arrivi a limiti troppo elevati.

Passiamo ora a dimostrare quanto si è detto.

3. — Indicando con P_i il pianeta di posto i , con p_i il parametro della sua orbita e con ε il coefficiente cosmogonico, possiamo scrivere limitandoci ai termini di primo ordine in ε :

$$[1] \quad \frac{dp_i}{dt} = \varepsilon (S_i + C_i)$$

dove chiamiamo con S_i e C_i le perturbazioni cagionate dal Sole e dagli altri pianeti. In proposito, come vedemmo nelle passate Note, si ha:

$$[2] \quad S_i = \frac{2}{5} r^2 n_i (\omega - n_i)$$

essendo r il raggio solare, ω la velocità angolare di rotazione del Sole ed n_i il moto medio del pianeta.

In unità C. G. S. i valori del coefficiente S_i per gli attuali pianeti sono dati dalla seguente:

TABELLA I.

Mercurio: $3200 \cdot 10^6$	Giove: $93 \cdot 10^6$
Venere: $1600 \cdot 10^6$	Saturno: $37 \cdot 10^6$
Terra: $1000 \cdot 10^6$	Urano: $13 \cdot 10^6$
Marte: $570 \cdot 10^6$	Nettuno: $6 \cdot 10^6$

4. — Passiamo ora a calcolare il coefficiente C_i . Chiamando con C_{ih} il termine dovuto all'attrazione del pianeta P_h su P_i , avremo ovviamente:

$$[3] \quad C_i = \sum_h' C_{ih}$$

dove l'accento indica che la sommatoria va estesa a tutti i valori di h escluso naturalmente $h = i$. Resta dunque a determinare le C_{ih} .

A tale scopo, prendiamo per origine il Sole e per piano xy il piano dell'orbita attuale del pianeta P_i : siano x_i, y_i, x_h, y_h, z_h le coordinate dei due pianeti, r_i la distanza di P_i dal Sole, m_i ed m_h le due masse ed r_{ih} la distanza tra i due pianeti. Ricordando l'espressione della forza perturbatrice dovuta al termine cosmogonico, avremmo subito per i valori delle due prime componenti di questa forza sul pianeta P_i :

$$[4] \quad \begin{cases} X_i = \varepsilon f m_i \sum_h' m_h (x_h - x_i) \frac{1}{r_{ih}^3} \frac{dr_{ih}}{dt} \\ Y_i = \varepsilon f m_i \sum_h' m_h (y_h - y_i) \frac{1}{r_{ih}^3} \frac{dr_{ih}}{dt} \end{cases}$$

dove f indica sempre il coefficiente attrattivo. Poichè le eccentricità e le inclinazioni sono piccole, trascuriamo le seconde potenze dell'inclinazione ed i termini contenenti a fattore l'eccentricità e chiamiamo con L_i ed L_h le distanze angolari dei due pianeti dall'asse x . Ora, trascurando i termini contenenti l'eccentricità (la quale figura del resto alla seconda potenza nei termini secolari) e trascurando pure la seconda potenza dell'inclinazione dell'orbita del pianeta P_h sul piano xy , inclinazione supposta molto piccola, si ha immediatamente:

$$[5] \quad \begin{cases} x_i = a_i \cos L_i \\ y_i = a_i \sin L_i \end{cases}$$

$$[6] \quad \begin{cases} x_h = a_h \cos L_h \\ y_h = a_h \sin L_h \end{cases}$$

$$[7] \quad r_{ih}^2 = a_i^2 + a_h^2 - 2 a_i a_h \cos \lambda_{ih}$$

dove abbiamo poste:

$$[8] \quad \lambda_{ih} = L_i - L_h$$

e dove a_i ed a_h indicano i semiassi delle due orbite.

Derivando rispetto al tempo, otteniamo:

$$[9] \quad r_i \frac{dr_i}{dt} = a_i a_h (n_i - n_h) \sin \lambda_{ih}.$$

5. - Ciò posto, indicando con A_i il momento della quantità di moto di P_i , abbiamo dalla Meccanica:

$$[10] \quad \frac{dA_i}{dt} = x_i Y_i - y_i X_i$$

da cui ricaviamo, tenendo conto delle [4], della [5] e della [9]:

$$[11] \quad \frac{dA_i}{dt} = -\varepsilon f a_i^2 m_i \sum_h a_h^2 m_h (n_i - n_h) F_{ih}$$

essendo

$$[12] \quad F_{ih} = \frac{\sin^2 \lambda_{ih}}{[a^2 + a_h^2 - 2 a_i a_h \cos \lambda_{ih}]^2}.$$

D'altra parte, si ha dalla Teoria delle Orbite,

$$[13] \quad A_i = m_i \sqrt{M f p_i}$$

dove M indica la massa del Sole. Derivando e ricordando la nota relazione:

$$[14] \quad n_i^2 a_i^3 = M f$$

otteniamo, trascurando il quadrato dell'eccentricità:

$$[15] \quad \frac{dA_i}{dt} = \frac{m_i \sqrt{M f}}{2 \sqrt{p_i}} \frac{dp_i}{dt} = \frac{m_i n_i a_i}{2} \frac{dp_i}{dt}.$$

Paragonando con la [10] abbiamo allora:

$$[16] \quad \frac{dp_i}{dt} = 2 \varepsilon f a_i \sum_h a_h^2 m_h \left(\frac{n_h}{n_i} - 1 \right) F_{ih}$$

donde, dalla [1] e dalla [3] ricaviamo immediatamente:

$$[17] \quad C_{ih} = 2 f a_i a_h^2 m_h \left(\frac{n_h}{n_i} - 1 \right) F_{ih}.$$

Poichè, per il nostro scopo, abbiamo soltanto bisogno di trovare le perturbazioni secolari, potremo sostituire F'_{ih} con il suo valore medio $[F'_{ih}]$.

Ora si ha, integrando per parti,

$$\begin{aligned}
 [18] \quad [F'_{ih}] &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\text{sen}^2 \lambda_{ih} d\lambda_{ih}}{[a_i^2 + a_h^2 - 2a_i a_h \cos \lambda_{ih}]^2} = \\
 &= -\frac{1}{4\pi a_i a_h} \left(\frac{\text{sen} \lambda_{ih}}{a_i^2 + a_h^2 - 2a_i a_h \cos \lambda_{ih}} \right)_0^{2\pi} + \\
 &+ \frac{1}{4\pi a_i a_h} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \lambda_{ih} d\lambda_{ih}}{a_i^2 + a_h^2 - 2a_i a_h \cos \lambda_{ih}} = \\
 &= \frac{1}{4\pi a_i a_h} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \lambda_{ih} d\lambda_{ih}}{a_i^2 + a_h^2 - 2a_i a_h \cos \lambda_{ih}}
 \end{aligned}$$

e quindi, completando l'integrazione, abbiamo subito:

$$[19] \quad [F'_{ih}] = \frac{1}{2a_i^2 (a_i^2 - a_h^2)} \quad \text{per} \quad a_i > a_h$$

$$[20] \quad [F'_{ih}] = \frac{1}{2a_h^2 (a_h^2 - a_i^2)} \quad \text{per} \quad a_i < a_h.$$

Per semplificare le notazioni, poniamo:

$$[21] \quad \gamma_{ih} = \frac{a_i}{a_h} \quad \text{per} \quad a_i > a_h$$

$$[22] \quad \gamma_{ih} = \frac{a_h}{a_i} \quad \text{per} \quad a_i < a_h$$

con che γ_{ih} risulta sempre maggiore dell'unità. La [17] ci dà allora:

$$[23] \quad C_{ih} = \frac{fm_h}{a_i} \left(\frac{n_h}{n_i} - 1 \right) \frac{1}{\gamma_{ih}^2 - 1}$$

onde C_{ih} risulta positiva per $h < i$, essendo allora $n_h > n_i$, e negativa nel caso contrario. Il parametro di ogni pianeta viene quindi aumentato dall'azione dei pianeti interni e diminuito da quella dei pianeti esterni.

6. Scegliendo sempre le unità del sistema C.G.S. ed eseguendo i calcoli numerici otteniamo per il Sistema Planetario *attuale* la seguente

TABELLA II.

Valori dei coefficienti C_{ih} .

	Mercurio $i = 1$	Venere $i = 2$	Terra $i = 3$	Marte $i = 4$	Giove $i = 5$	Saturno $i = 6$	Urano $i = 7$	Nettuno $i = 8$
Mercurio $h = 1$		$1,0 \cdot 10^6$	$0,6 \cdot 10^6$	$0,3 \cdot 10^6$	$0,0 \cdot 10^6$	$0,0 \cdot 10^6$	$0,0 \cdot 10^6$	$0,0 \cdot 10^6$
Venere $h = 2$	$-14 \cdot 10^6$		$15 \cdot 10^6$	$8,4 \cdot 10^6$	$1,5 \cdot 10^6$	$0,6 \cdot 10^6$	$0,2 \cdot 10^6$	$0,1 \cdot 10^6$
Terra $h = 3$	$-9,2 \cdot 10^6$	$-15 \cdot 10^6$		$12 \cdot 10^6$	$2,1 \cdot 10^6$	$0,9 \cdot 10^6$	$0,3 \cdot 10^6$	$0,2 \cdot 10^6$
Marte $h = 4$	$-0,4 \cdot 10^6$	$-0,8 \cdot 10^6$	$-1,0 \cdot 10^6$		$0,3 \cdot 10^6$	$0,1 \cdot 10^6$	$0,0 \cdot 10^6$	$0,0 \cdot 10^6$
Giove $h = 5$	$-120 \cdot 10^6$	$-220 \cdot 10^6$	$-290 \cdot 10^6$	$-450 \cdot 10^6$		$550 \cdot 10^6$	$210 \cdot 10^6$	$110 \cdot 10^6$
Saturno $h = 6$	$-11 \cdot 10^6$	$-20 \cdot 10^6$	$-27 \cdot 10^6$	$-40 \cdot 10^6$	$-120 \cdot 10^6$		$80 \cdot 10^6$	$43 \cdot 10^6$
Urano $h = 7$	$-0,4 \cdot 10^6$	$-0,8 \cdot 10^6$	$-1,0 \cdot 10^6$	$-1,6 \cdot 10^6$	$-5,1 \cdot 10^6$	$-8,7 \cdot 10^6$		$8,6 \cdot 10^6$
Nettuno $h = 8$	$-0,2 \cdot 10^6$	$-0,4 \cdot 10^6$	$-0,5 \cdot 10^6$	$-0,8 \cdot 10^6$	$-2,5 \cdot 10^6$	$-4,4 \cdot 10^6$	$-8,0 \cdot 10^6$	

In conformità alla [23] osserviamo che tutti i termini al disopra della diagonale principale sono positivi, mentre tutti quelli al disotto sono negativi.

Da questa tabella (dove per il nostro scopo cosmogonico abbiamo spinto i calcoli in modo da ottenere l'ordine di grandezza per cui bastano due cifre significative) sommando per colonna, otteniamo subito i valori dei coefficienti C_i secondo la [3]. Paragonando con la tabella I, otteniamo la seguente tabella definitiva che ci dà, a meno del coefficiente ε e sempre in unità C.G.S., le variazioni del parametro dei pianeti prodotte dal

Sole (seconda colonna), prodotte dai pianeti (terza colonna) e le variazioni totali (quarta colonna). Tutti i calcoli sono arrotondati alle prime due cifre significative.

TABELLA III.

Coefficienti di variazione del parametro.

Pianeti	S_i	O_i	$S_i + O_i$
Mercurio	$3200 \cdot 10^6$	$-160 \cdot 10^6$	$+ 3040 \cdot 10^6$
Venere	$1600 \cdot 10^6$	$-260 \cdot 10^6$	$+ 1340 \cdot 10^6$
Terra	$1000 \cdot 10^6$	$-300 \cdot 10^6$	$+ 700 \cdot 10^6$
Marte	$570 \cdot 10^6$	$-450 \cdot 10^6$	$+ 120 \cdot 10^6$
Giove	$93 \cdot 10^6$	$-120 \cdot 10^6$	$- 27 \cdot 10^6$
Saturno	$37 \cdot 10^6$	$+ 540 \cdot 10^6$	$+ 577 \cdot 10^6$
Urano	$13 \cdot 10^6$	$+ 280 \cdot 10^6$	$+ 293 \cdot 10^6$
Nettuno	$6 \cdot 10^6$	$+ 160 \cdot 10^6$	$+ 166 \cdot 10^6$

7. Come appare da questa tabella l'incremento del parametro dell'orbita di un pianeta (che si ottiene direttamente moltiplicando il rispettivo coefficiente per ε) per Mercurio e Venere è dovuto, quasi interamente, all'effetto solare. Per la Terra e Marte, l'influenza degli altri pianeti diviene invece molto sensibile e sensibilissima per Giove, per cui l'effetto del Sole è più che controbilanciato dall'effetto planetario dovuto in gran parte al vicino Saturno; basterebbe però aumentare di poco la velocità angolare di rotazione del Sole (come avveniva in tempi più antichi) perchè, anche per Giove, l'effetto solare divenisse preponderante. Per i pianeti più lontani l'effetto planetario è interamente preponderante ed anzi, come dicemmo in principio, per tale ragione il parametro dell'orbita di Nettuno cresce circa trenta volte più rapidamente di quel che avverrebbe se si tenesse conto soltanto dell'azione del Sole. Come dicemmo, ne segue che se, oltre alla nostra legge cosmogonica si vuole anche ammettere che Nettuno sia originato dal Sole, si possono dare ad ε valori anche estremamente bassi senza superare, per l'età del Sistema Planetario, l'ordine di grandezza generalmente ammesso.

Geodesia. — *Complemento alla Nota: Sull'ellitticità dell'equatore terrestre.* Nota ⁽¹⁾ dell'Accademico CARLO SOMIGLIANA.

In una Nota che ha per titolo: *Le relazioni lineari che esistono fra i valori della gravità sul geoide ellissoico*, pubblicata negli « Atti della Reale Acc. delle Scienze di Torino » nel 1934, vol. 69, ho stabilito le seguenti formole pei valori della gravità alle estremità degli assi

$$[1] \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{g_a}{a} = \frac{1}{abc} \left(\gamma M - \omega^2 \frac{2\alpha}{a^2} \right) + \frac{\omega^2}{a^2} E \\ \frac{g_b}{b} = \frac{1}{abc} \left(\gamma M - \omega^2 \frac{2\beta}{b^2} \right) + \frac{\omega^2}{b^2} E \\ \frac{g_c}{c} = \frac{1}{abc} \gamma M + \frac{\omega^2}{c^2} E. \end{array} \right.$$

Per brevità mi riferisco, pel significato dei simboli a quella Nota, ed a quella richiamata nel titolo di questa. Per i rapporti che compaiono nei primi membri delle precedenti equazioni io ho trovato anche le seguenti espressioni

$$[2] \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{g_a}{a} = \frac{\gamma M}{abc} - \frac{\omega^2}{3} \Psi_a \\ \frac{g_b}{b} = \frac{\gamma M}{abc} - \frac{\omega^2}{3} \Psi_b \\ \frac{g_c}{c} = \frac{\gamma M}{abc} - \frac{\omega^2}{3} \Psi_c. \end{array} \right.$$

Dal confronto delle equazioni [1] [2] ricaviamo così

$$[3] \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{2\alpha}{abc} = \frac{1}{3} (a^2 \Psi_a - c^2 \Psi_c) \\ \frac{2\beta}{abc} = \frac{1}{3} (b^2 \Psi_b - c^2 \Psi_c) \end{array} \right. \quad E = -\frac{1}{3} c^2 \Psi_c$$

⁽¹⁾ Presentata nell'Adunanza del 5 giugno 1942-XX.

formole assai utili nello svolgimento della teoria, poichè permettono di eliminare dai calcoli le costanti α, β assai ingombranti per la loro non semplice definizione, introducendo invece le trascendenti Ψ , che possono essere considerate come funzioni note delle due eccentricità.

Consideriamo infatti l'espressione della gravità data dalla formola [14] della Nota citata: *Le relazioni lineari* ecc., che può scriversi

$$[4] \quad g = \frac{1}{abc} \left(\gamma M \sqrt{\Omega} - \omega^2 \frac{\chi}{\sqrt{\Omega}} \right)$$

ove

$$\Omega = a^2 \lambda^2 + b^2 \mu^2 + c^2 \nu^2$$

$$\chi = 2 (\alpha \lambda^2 + \beta \mu^2) - abc E$$

e λ, μ, ν sono i coseni di direzione della normale all'ellissoide nel punto considerato.

(Si noti che questa espressione di Ω differisce da quella indicata colla stessa lettera, nella Nota citata dell'Accademia di Torino, per un fattore a^2 che essa contiene in più).

Sostituendo nella espressione di χ i valori di α, β, E delle equazioni [3] si ottiene

$$\frac{3}{abc} \chi = a^2 \Psi_a \lambda^2 + b^2 \Psi_b \mu^2 + c^2 \Psi_c \nu^2$$

espressione notevolmente semplice e simmetrica. Quindi possiamo concludere che l'espressione della gravità [4] introducendo la densità media k si può scrivere

$$[5] \quad g = \frac{4}{3} \pi \gamma k \sqrt{\Omega(\varphi, \psi)} - \frac{\omega^2}{3} \frac{\Gamma(\varphi, \psi)}{\sqrt{\Omega(\varphi, \psi)}}$$

ove

$$\Gamma(\varphi, \psi) = a^2 \Psi_a \lambda^2 + b^2 \Psi_b \mu^2 + c^2 \Psi_c \nu^2$$

$$\Omega(\varphi, \psi) = a^2 \lambda^2 + b^2 \mu^2 + c^2 \nu^2$$

φ, ψ essendo la latitudine e la longitudine, per cui

$$\lambda = \cos \varphi \cos \psi \quad \mu = \cos \varphi \sin \psi \quad \nu = \sin \varphi.$$

Notiamo anche che Ω ha un significato geometrico assai semplice. Se indichiamo con p la perpendicolare abbassata dal centro dell'ellissoide al piano tangente nel punto (φ, ψ) di coordinate x, y, z si ha

$$p = x\lambda + y\mu + z\nu = \sqrt{a^2 \lambda^2 + b^2 \mu^2 + c^2 \nu^2} = \sqrt{\Omega}$$

poichè

$$[6] \quad \frac{x}{a^2} = \frac{\lambda}{\sqrt{\Omega}} \quad \frac{y}{b^2} = \frac{\mu}{\sqrt{\Omega}} \quad \frac{z}{c^2} = \frac{\nu}{\sqrt{\Omega}}.$$

Quindi $\sqrt{\Omega}$ rappresenta la distanza del piano tangente dal centro dell'ellissoide

Possiamo ottenere ora l'espressione più generale del teorema di CLAIRAUT per l'ellissoide a tre assi.

Consideriamo due punti P_1, P_2 dell'ellissoide le cui coordinate geografiche siano rispettivamente φ_1, ψ_1 e φ_2, ψ_2 ed indichiamo con gli indici 1 e 2 le espressioni g, Ω, Γ relative a questi due punti. Avremo

$$g_1 = \frac{4}{3} \pi \gamma k \sqrt{\Omega_1} - \frac{\omega^2}{3} \frac{\Gamma_1}{\sqrt{\Omega_1}}$$

$$g_2 = \frac{4}{3} \pi \gamma k \sqrt{\Omega_2} - \frac{\omega^2}{3} \frac{\Gamma_2}{\sqrt{\Omega_2}}$$

ed eliminando la densità media fra queste due relazioni

$$[A] \quad \frac{g_1}{\sqrt{\Omega_1}} - \frac{g_2}{\sqrt{\Omega_2}} = -\frac{\omega^2}{3} \left(\frac{\Gamma_1}{\Omega_1} - \frac{\Gamma_2}{\Omega_2} \right).$$

È questa la relazione che lega fra loro due valori qualsiasi della gravità sull'ellissoide a tre assi, e che può considerarsi come l'estensione del teorema classico di CLAIRAUT.

Se consideriamo un terzo punto P_3 distinto dai precedenti, e la relativa formola per la gravità, fra questa e le due che precedono possiamo eliminare k ed ω^2 ; si ottiene così

$$[B] \quad \frac{g_1}{\sqrt{\Omega_1}} \left(\frac{\Gamma_2}{\Omega_2} - \frac{\Gamma_3}{\Omega_3} \right) + \frac{g_2}{\sqrt{\Omega_2}} \left(\frac{\Gamma_3}{\Omega_3} - \frac{\Gamma_1}{\Omega_1} \right) + \frac{g_3}{\sqrt{\Omega_3}} \left(\frac{\Gamma_1}{\Omega_1} - \frac{\Gamma_2}{\Omega_2} \right) = 0.$$

Questa formola permette di calcolare un valore qualsiasi della gravità sull'ellissoide in funzione di altri due comunque scelti. Tutta la teoria delle relazioni fra i valori della gravità e le costanti dell'ellissoide è contenuta in queste due formole [A] [B].

Veniamo ora alla formola del sig. HEISKANEN. Supponiamo che nella formola [A] il punto P_1 sia al polo, cioè $\lambda_1 = \mu_1 = 0, \nu_1 = 1$; ed il punto P_2 all'equatore in un punto di longitudine ψ , quindi sia $\lambda_2 = \cos \psi, \mu_2 = \sin \psi, \nu_2 = 0$. La [A] diviene

$$\frac{g_0}{c} - \frac{g(\psi)}{\sqrt{a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi}} = -\frac{\omega^2}{3} \left(\Upsilon_0 - \frac{a^2 \Upsilon_a \cos^2 \psi + b^2 \Upsilon_b \sin^2 \psi}{a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi} \right)$$

e ponendo

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad \varepsilon'^2 = \frac{a^2 \Psi_a - b^2 \Psi_b}{a^2 \Psi_a}$$

si può scrivere

$$\frac{g_e}{c} - \frac{g(\psi)}{a\sqrt{1 - e'^2 \sin^2 \psi}} = -\frac{\omega^2}{3} \left(\Psi_e - \frac{\Psi_a (1 - \varepsilon'^2 \sin^2 \psi)}{1 - e'^2 \sin^2 \psi} \right).$$

Questa formola è perfettamente rigorosa. Se adottiamo l'approssimazione di CLAIRAUT, si ha

$$\Psi_a = \frac{9}{2} \quad \Psi_b = \frac{9}{2} \quad \Psi_e = -3$$

e la formola diviene

$$\frac{g_e}{c} - \frac{g(\psi)}{a\sqrt{1 - e'^2 \sin^2 \psi}} = \frac{5}{2} \omega^2.$$

Da questa relazione possiamo dedurre immediatamente quella ammessa dal prof. HEISKANEN, qualora si accetti di sostituire alla distanza dalla tangente p il raggio vettore ρ dell'ellisse meridiana. Posto infatti in questo caso

$$\alpha(\psi) = \frac{c - \rho}{\rho}$$

si ha subito per lo schiacciamento dell'ellisse meridiana ψ

$$\alpha(\psi) = \frac{5}{2} \frac{\omega^2 c}{g(\psi)} - \frac{g_e - g(\psi)}{g(\psi)}$$

che è la relazione felicemente intuita dal sig. HEISKANEN, della quale risulta così assegnata la vera origine analitica.

Vediamo ora entro quali limiti di approssimazione sia lecita in generale la sostituzione del raggio vettore dell'ellisse meridiana alla distanza dalla tangente. Dalle [6] si ha

$$\rho^2 = x^2 + y^2 = \frac{a^4 \cos^4 \psi + b^4 \sin^4 \psi}{a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi}$$

e quindi, poichè

$$\frac{a^4 - b^4}{a^4} = e'^2 (2 - e'^2)$$

avremo

$$\frac{\dot{p}}{p} = \frac{(1 - e'^2 (2 - e'^2) \sin^2 \psi)^{\frac{1}{2}}}{1 - e'^2 \sin^2 \psi}$$

o anche avviluppando in serie

$$\frac{\dot{p}}{p} = 1 + \frac{1}{2} e'^4 \sin^2 \psi - e'^4 \left(1 - \frac{1}{2} e'^2\right) \sin^4 \psi + \dots$$

Basterà quindi trascurare la quarta potenza della piccolissima eccentricità e' per avere l'identità fra il raggio vettore e la distanza dalla tangente.

Osserviamo infine che dalla relazione [A] quando essa venga applicata alle tre coppie dei vertici dell'ellissoide, e si accetti l'approssimazione di CLAIRAUT, si hanno le formole

$$\frac{g_b}{b} - \frac{g_c}{c} = -\frac{5}{2} \omega^2 \quad \frac{g_c}{c} - \frac{g_a}{a} = \frac{5}{2} \omega^2$$

$$\frac{g_a}{a} - \frac{g_b}{b} = 0.$$

Considerando inoltre i tre schiacciamenti

$$\alpha = \frac{a-c}{a} \quad \alpha' = \frac{a-b}{a} \quad \alpha'' = \frac{b-c}{b} \quad (\alpha' + \alpha'' - \alpha' \alpha'' = \alpha).$$

Dalle equazioni precedenti si ha

$$\alpha = \frac{5}{2} \frac{\omega^2 c}{g_a} - \frac{g_c - g_a}{g_a} \quad \alpha'' = \frac{5}{2} \frac{\omega^2}{g_b} - \frac{g_c - g_b}{g_b}$$

$$\alpha' = \frac{g_a - g_b}{g_b}.$$

Quest'ultima espressione dello schiacciamento dell'ellisse equatoriale risolve immediatamente la quistione posta dal sig. HEISKANEN, di dedurre cioè tale schiacciamento dai valori della gravità.

Infatti se ammettiamo di avere una formola della gravità normale

$$g = G (1 + \beta \sin^2 \varphi - \varepsilon \sin^2 2\varphi + \delta \cos^2 \varphi \cos 2\psi)$$

abbiamo subito, dalla formola precedente,

$$\alpha' = \frac{2\delta}{1 + \delta}.$$

Il sig. HEISKANEN ha trovato $\alpha' = 2 \delta$. Ma anche colla formola precedente, prendendo per δ il valore della prima formola della gravità normale calcolata dal sig. HEISKANEN

$$\delta = 0,0000276$$

e per a il semiasse dell'ellissoide internazionale, si trova

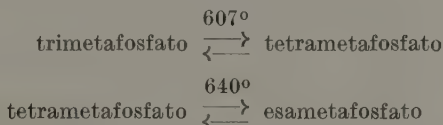
$$a - b = 352 \text{ m.}$$

che è appunto il valore ottenuto dall'illustre geodeta finlandese, per la differenza dei semiassi dell'ellisse equatoriale.

Possiamo quindi concludere che, in questo caso, il metodo intuitivo ed il metodo fondato su concetti analitici rigorosi conducono a risultati che sostanzialmente concordano. E ciò dovrà certamente soddisfare i valorosi geodeti della scuola di Helsinki.

Chimica. — *L'analisi strutturale ed i legami chimici. Ricerche sui polimetafosfati: trimetafosfato di sodio* ⁽¹⁾. Nota di VINCENZO CAGLIOTI, GIORDANO GIACOMELLO e ENNIO BIANCHI, presentata ⁽²⁾ dall'Accademico FRANCESCO GIORDANI.

I polimetafosfati di sodio sono stati oggetto di molti studi, tra i quali ricordiamo quelli classici di FLEITMANN e HENNEBERG ⁽³⁾, di LINDBOOM ⁽⁴⁾, TAMMANN ⁽⁵⁾ e KNORRE ⁽⁶⁾, che trattano le condizioni di preparazione e descrivono le proprietà più importanti dei sali, e le ricerche di PASCAL ⁽⁷⁾, sugli equilibri che si stabiliscono ad alta temperatura tra alcuni polimeri, secondo gli schemi:



Recentemente SALIH ⁽⁸⁾ e poi TREADWELL e LEUTWYLER ⁽⁹⁾, hanno studiato il comportamento alla titolazione potenziometrica degli acidi corrispondenti ai diversi termini e la capacità di questi a dare complessi con i metalli alcalino-terrosi. TREADWELL ha fatto pure delle ipotesi sulla struttura dei singoli polimetafosfati, ai quali ha assegnato alcune

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma e Centro di Chimica Inorganica del C. N. R.

⁽²⁾ Nell'Adunanza del 5 giugno 1942-XX. Pervenuta all'Accademia il 7 aprile 1942-XX.

⁽³⁾ FLEITMANN e HENNEBERG, « Lieb. Ann. », 65, 304 (1848); « Pogg. Ann. », 78, 233 (1849).

⁽⁴⁾ LINDBOOM, « Ber. », 8, 122 (1875).

⁽⁵⁾ TAMMANN, « Zeitschr. Phys. Chemie », 6, 124 (1890); « Journ. Prakt. Chemie », 45, 424 (1892).

⁽⁶⁾ KNORRE, « Zeitschr. Anorg. Chemie », 24, 375 (1900).

⁽⁷⁾ PASCAL, « Bull. Soc. Chim. Franc. », 35, 1131 (1924).

⁽⁸⁾ SALIH, « Bull. Soc. Chim. Franc. », [5], 3, 1391 (1936).

⁽⁹⁾ TREADWELL e LEUTWYLER, « Helv. Ch. Acta », 21, 1450 (1938).

formule di struttura che rendono conto del loro comportamento, senza peraltro avere la possibilità, col metodo impiegato, di controllarne direttamente l'esattezza.

Nel campo delle nostre ricerche sui legami chimici nei solidi e sulle relazioni tra reattività delle sostanze allo stato solido e struttura ⁽¹⁾ ci è parso di grande interesse sottoporre ad indagine sistematica i poli-metafosfati, per vedere quali gruppi costituiscano i diversi termini dei vari polimeri e trarre delle relazioni con le proprietà chimiche di questi.

E ciò in analogia con quanto è stato fatto nel campo dei silicati, nel qual caso si sono potute porre in evidenza delle relazioni tra le proprietà chimiche e le strutture a « isola » a « catena » ed a « strati » dei diversi termini.

a) *Preparazione della sostanza.* — Nella presente Nota esponiamo i risultati ottenuti dallo studio strutturistico del trimetafosfato.

Fra i diversi metodi di preparazione del trimetafosfato abbiamo trovato quale più semplice e sicuro quello proposto dal KNORRE: abbiamo riscaldato per sei ore a 300° il miscuglio di una parte di ortofosfato di sodio ($\text{Na}_2\text{HPO}_4 \cdot 12\text{H}_2\text{O}$) e tre parti di nitrato di ammonio.

La massa spugnosa viene lasciata raffreddare, addizionata d'acqua e spappolata in un mortaio: quindi si filtra in modo da separare il trimetafosfato disciolto, da altri polimeri poco solubili. Alla soluzione si aggiungono 2-3 parti di alcool a 95°; precipita in forma gelatinosa il trimetafosfato che viene filtrato alla pompa.

La massa viene ridisciolta nella minima quantità d'acqua fredda.

Si sottopone a filtrazione per allontanare le parti meno solubili e si riprecipita con circa 2 volumi d'alcool operando nella maniera seguente: alla soluzione acquosa si aggiunge goccia a goccia ed agitando energicamente, alcool etilico finchè il liquido assume una leggera opalescenza persistente anche all'agitazione. Dopo di che la soluzione viene lasciata a sè per alcune ore alla temperatura di 10-15°.

Non è conveniente operare a temperatura più bassa, perchè aumentando la velocità di cristallizzazione i cristalli non si sviluppano bene.

Seguendo questo metodo si formano dei bellissimi cristalli che possono assumere dimensioni anche di cm. 0.5 di lunghezza e che, in essiccatore, dopo qualche giorno, perdono la loro acqua di cristallizzazione,

⁽¹⁾ 1. — V. CAGLIOTI e G. GIACOMELLO, « La Ricerca Scientifica », I, 193 (1938); 2. — V. CAGLIOTI e G. GIACOMELLO, « La Ricerca Scientifica », I, 545 (1938); 3. — V. CAGLIOTI e G. GIACOMELLO, « La Ricerca Scientifica », 4, 271 (1939); 4. — V. CAGLIOTI e G. GIACOMELLO, « Atti X Congresso Internazionale di Chimica », II (1938); 5. — V. CAGLIOTI e G. GIACOMELLO, « Gazzetta Chimica Italiana », 69, IV, 245 (1939).

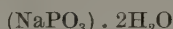
dando origine ad una sostanza polverulenta il cui spettro a polvere è differente da quello della sostanza cristallina.

La soluzione acquosa del prodotto cristallino non dà alcun precipitato per trattamento con cloruro di calcio.

La determinazione quantitativa del fosforo e dell'acqua dà in media i seguenti risultati:

$$\text{P}_2\text{O}_5 : 51,25 \% \qquad \text{H}_2\text{O} : 26,80 \%$$

in buona concordanza coi valori che si calcolano per la formula:



e cioè:

$$\text{P}_2\text{O}_5 : 51,43 \% \qquad \text{H}_2\text{O} : 26,08 \%$$

e con quelli trovati da WIESLER e da FLEITMANN e HENNEBERG.

La tribasicità di questo sale è stata dimostrata da WIESLER ⁽¹⁾ con misure di conduttività. Non era infatti possibile adottare misure crioscopiche od ebullioscopiche, in quanto il sale si scioglie solo in acqua, in cui si dissocia mentre non è solubile in solventi organici. Egli ha applicato la relazione empirica dedotta da OSTWALD-WALDEN in base a numerose esperienze:

$$\frac{d\lambda}{dv} = n_1 n_2 c_v$$

dove n_1 rappresenta la valenza del catione, n_2 quella dell'anione e c_v è una grandezza dipendente dalla diluizione v che si può determinare sperimentalmente. Per la maggior parte dei sali, quando si tiene conto della variazione di conducibilità fra la diluizione 32 e 1024, tale costante assume in media il valore di 10,8. Per il trimetafosfato l'autore ha trovato che $d\lambda$, fra le diluizioni 32 e 1024 (praticamente diluizione corrispondente alla conducibilità limite) è 30, e poichè $n_1 = 1$ e c_v è in media 10,8, risulta $n_2 = 2,76 \cong 3$.

Resta quindi dimostrata per il trimetafosfato in soluzione la formula $\text{Na}_3[(\text{PO}_3)_3]$, e per il sale cristallizzato la formula $\text{Na}_3(\text{PO}_3)_3 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$, in cui esiste l'isola $(\text{PO}_3)_3'''$.

Una soluzione acquosa del trimetafosfato di sodio trattata con soluzione acquosa di solfato di stricnina, ha dato dopo qualche giorno dei bellissimi cristalli bianchi di aspetto lucente setaceo con punto di fusione 234° , contenenti il 17,16 % di P_2O_5 .

(1) WIESLER, « Zeitschr. An. Chem. », 28, 177 (1901).

Per il trimetafosfato di stricnina della formula $(C_{21}H_{22}N_2O_2)_3 \cdot H_3(PO_3)_3$ si calcola una percentuale di P_2O_5 di 17,19. Questo sale è solubile in acqua a 18° nella proporzione di circa il 2,13 %.

b) *Esame strutturistico del trimetafosfato di sodio* $(NaPO_3)_3 \cdot 6H_2O$.

1° *Determinazione delle costanti cristallografiche:*

I cristalli del trimetafosfato hanno l'aspetto di prismi trigonali; all'esame ottico col microscopio di polarizzazione si dimostrano triclinali. Sono stati determinati mediante fotogrammi oscillatori intorno agli assi, i periodi della cella elementare e dai tre diagrammi Weissenberg sono stati dedotti gli angoli. I valori misurati per gli assi e per gli angoli sono:

$$\begin{array}{lll} a = 8,41 \text{ \AA} & b = 10,92 \text{ \AA} & c = 9,86 \text{ \AA} \\ \alpha = 67^\circ,51' & \beta = 92^\circ,6' & \gamma = 106^\circ,10'. \end{array}$$

Poichè la densità della sostanza è 1,786 ⁽¹⁾, nella cella elementare sono contenute 2 molecole di $(NaPO_3)_3 \cdot 6H_2O$.

c) *Determinazione del gruppo spaziale e analisi Patterson.*

Dall'esame statistico dei riflessi ottenuti sui fotogrammi oscillatori e dall'esame ottico risulta come più probabile il gruppo spaziale P_1 .

L'intensità dei riflessi dei diagrammi Weissenberg intorno ai tre assi, è stata determinata per confronto tenendo conto anche delle intensità delle riflessioni dovute alle radiazioni $K\beta$ del rame ⁽²⁾. Nella tabella seguente: (tabella I) sono riportati per le facce in zona con l'asse b , oltre agli indici, al 2 sen ϑ e l'intensità, pure i fattori di Lorentz, il quadrato del fattore di struttura F^2 e la sua radice quadrata F in unità relative arbitrariamente fissate.

Coi dati della tabella e con gli analoghi delle facce in zona con gli altri due assi sono state eseguite le tre proiezioni vettoriali Patterson dei piani ab , bc ed ac .

2° Di queste tre proiezioni vettoriali, quella del piano $[010]$ riportata nella figura 1, ci è sembrata la più adatta per trarre delle conclusioni sulla possibile struttura del trimetafosfato.

⁽¹⁾ Questa determinazione è stata eseguita col metodo del picnometro, usando come liquido il benzolo, nel Laboratorio di Chimica Fisica del prof. B. Pesce, dalla dott.ssa M. V. Lago, che sentitamente ringraziamo.

Con un volumometro ad aria abbiamo ritrovato 1,82. Secondo CLARK (loc. cit.) la densità del trimetafosfato sarebbe 2,476. Tale valore è stato ripreso e riportato in tutti i trattati e però si riferisce al sale fuso.

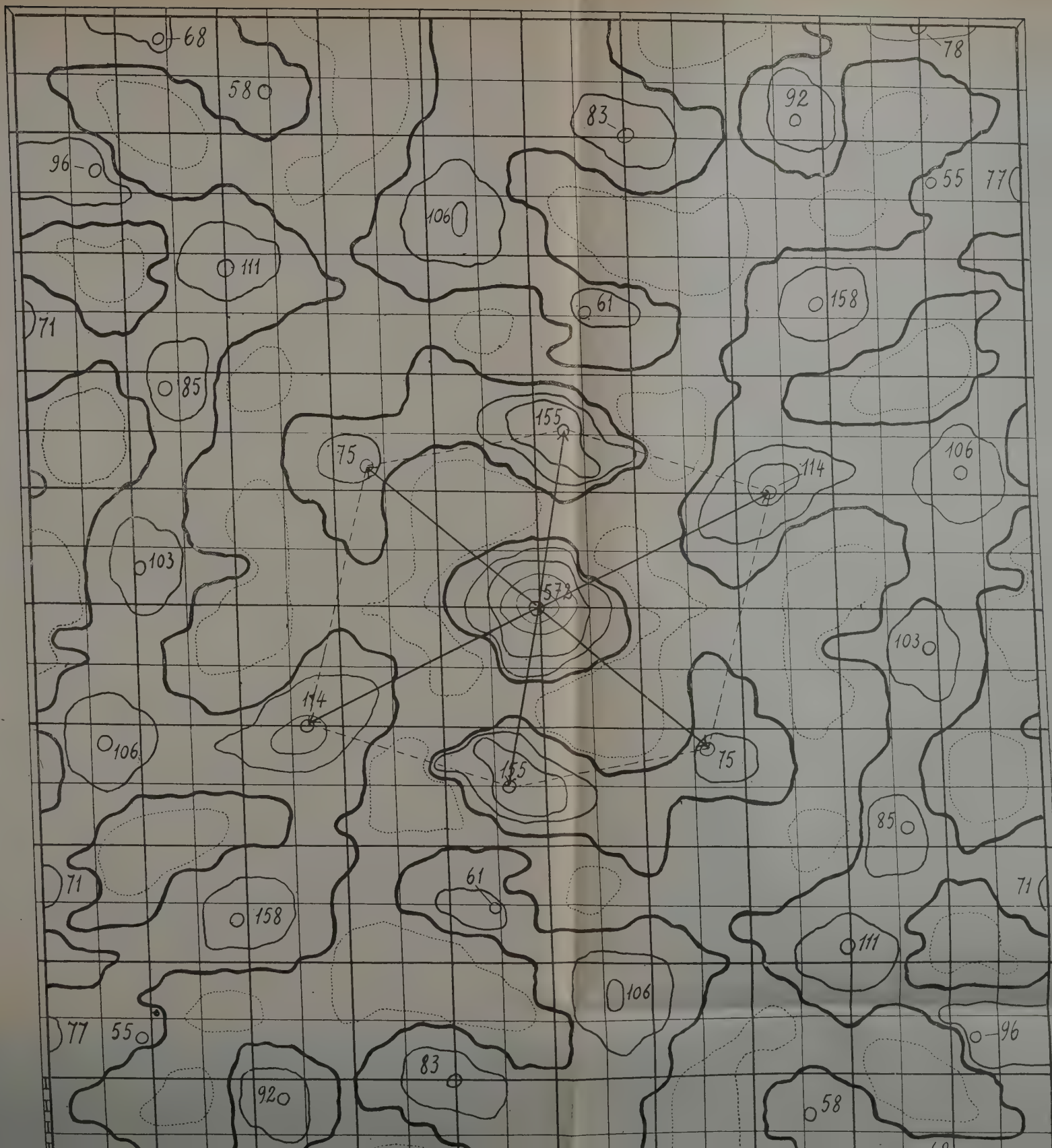
⁽²⁾ Le intensità sono state valutate nei film esposti tre ore, sei ore e dodici ore, mantenendo costanti l'intensità della sorgente dei raggi X, il tempo di sviluppo, ecc., in modo da poter apprezzare le intensità deboli e le intensità fortissime.

TABELLA I.

Indici	2 sen ϑ	Intensità I	Lorentz L	I/L = F ²	F
100	0,202	4.500	9,30	.484	22
200	0,405	12.600	4,55	2.770	52,6
300	0,608	13.200	2,80	4.720	68,7
400	0,810	5.600	1,95	2.870	53,5
500	1,013	1.600	1,40	1.142	33,8
600	1,215	1.400	1,10	1.270	35,6
700	1,418	800	1,00	800	28,2
800	1,621	800	1,10	728	27,0
900	1,823	1.200	1,90	632	25,2
001	0,176	20.000	11,40	1.755	41,9
002	0,352	400	5,30	75	8,7
003	0,528	1.400	3,40	412	20,3
004	0,704	2.800	2,30	1.220	35,0
005	0,880	600	1,70	353	18,8
006	1,056	600	1,35	444	21,1
007	1,232	3.000	1,10	2.730	52,2
008	1,408	3.000	1,05	2.860	53,5
009	1,584	200	1,10	182	13,5
0010	1,760	400	1,60	250	15,8
101	0,260	17.000	7,50	2.270	47,6
102	0,395	8.000	4,80	1.665	40,8
103	0,540	8.000	3,30	2.425	49,2
104	0,710	2.000	2,25	890	29,8
105	0,895	5.000	1,70	2.940	54,2
106	1,060	2.500	1,30	1.925	43,9
101	0,290	9.000	6,50	1.385	37,2
102	0,425	2.600	4,40	591	24,4
104	0,750	2.600	2,20	1.180	34,3
105	0,920	1.400	1,60	875	29,6
106	1,100	1.600	1,20	1.330	36,5
107	1,270	5.400	1,05	5.150	71,8

Segue TABELLA I.

Indici	2 sen ϑ	Intensità I	Lorentz L	I/L = F ²	F
201	0,450	1.500	4,10	366	19,1
202	0,510	11.600	3,50	3.310	57,8
203	0,640	7.800	2,70	2.890	53,7
204	0,750	600	2,20	273	16,6
205	0,935	5.200	1,60	3.250	57,0
206	1,100	6.000	1,20	5.000	70,7
201	0,460	5.600	4,00	1.400	37,4
202	0,560	7.600	3,25	2.340	48,4
203	0,700	2.400	2,40	1.000	31,6
204	0,850	2.600	1,80	1.445	38,0
205	1,000	1.400	1,45	965	31,2
206	1,160	1.400	1,15	1.220	35,0
208	1,500	1.600	1,05	1.520	39,0
302	0,685	1.600	2,45	653	25,6
303	0,780	4.000	2,10	1.900	43,6
304	0,890	5.000	1,70	2.940	54,2
305	1,020	1.500	1,40	1.070	32,7
306	1,170	1.500	1,15	1.300	36,1
307	1,330	1.600	1,05	1.520	39,0
308	1,480	1.700	1,05	1.620	40,2
301	0,655	6.000	2,60	2.300	48,0
302	0,755	1.000	2,10	475	21,8
303	0,860	800	1,75	457	21,4
304	0,975	2.800	1,50	1.870	43,2
305	1,100	600	1,20	500	22,4
306	1,270	2.800	1,05	2.660	51,6
307	1,430	1.200	1,05	1.145	33,8
401	0,810	1.200	2,00	600	24,5
402	0,860	1.600	1,80	890	39,8
405	1,160	2.000	1,15	1.740	41,7
409	1,730	1.400	1,45	965	31,2
407	1,500	2.800	1,10	2.550	50,5



Segue TABELLA I.

Indici	2 sen ϑ	Intensità I	Lorentz L	I/L = F ³	F
501	1,025	11.200	1,40	8.000	89,5
502	1,055	11.200	1,45	7.730	88,0
503	1,110	1.000	1,20	834	28,9
506	1,400	1.000	1,05	953	30,8
$\bar{5}01$	1,050	2.800	1,45	1.930	43,9
$\bar{5}06$	1,535	2.800	1,10	2.550	50,5
601	1,225	1.500	1,10	1.365	36,9
604	1,360	1.600	1,05	1.525	39,1
$\bar{6}01$	1,250	2.800	1,05	2.660	51,6
702	1,250	3.200	1,05	3.050	55,2
703	1,490	1.800	1,05	1.710	41,4
$\bar{7}03$	1,565	1.200	1,10	1.090	33,0
801	1,645	3.000	1,20	2.500	50,0
901	1,840	1.800	2,05	880	29,7

Infatti se bene osserviamo i vettori che congiungono il massimo d'origine coi massimi 114, 155, 75 e simmetrici, vediamo risultare, se pure deformata, a causa della non ortogonalità della proiezione, una simmetria quasi esagonale.

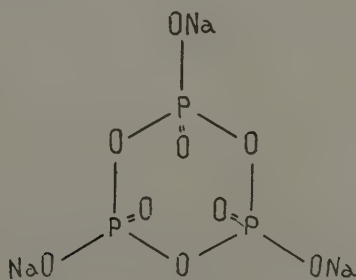


Fig. 2.

Ciò può essere dovuto ad una simmetria esagonale risultante dall'insieme delle due molecole contenute nella cella elementare che è provvista di un centro di simmetria. Tenendo conto pure dell'abito pseudo-trigonale del cristallo abbiamo subito avanzato l'ipotesi che la formula

più probabile per il trimetafosfato fosse quella schematicamente rappresentata dalla figura 2.

Restano da stabilire le distanze fra i diversi atomi e gli angoli nello spazio, racchiusi dalle congiungenti i centri degli atomi di ossigeno e di fosforo.

L'ipotesi più semplice da farsi era quella di ammettere per l'ossigeno, il sodio, il fosforo sfere d'azione eguali a quelle calcolate da PAULING ⁽¹⁾ per gli ioni O^{--} , P^{++++} e Na^+ e che le congiungenti il centro dell'atomo di fosforo con l'ossigeno avessero la stessa direzione delle congiungenti il centro del tetraedro coi suoi vertici quando si immagina il centro occupato dal fosforo.

Una volta stabilita la forma di una molecola, la presenza del centro di simmetria ci suggerisce la posizione degli atomi della seconda molecola nella cella elementare, quando sia nota la distanza tra due atomi vicini appartenenti a due molecole diverse.

Come base per questa distanza noi abbiamo tenuto la distanza $O^{--}-O^{--}$ di due atomi di ossigeno appartenenti a due molecole di trimetafosfato diverse e abbiamo fatto l'ipotesi che essa fosse uguale a quella determinata da WEST pel fosfato monopotassico ⁽²⁾. Secondo questo modo di vedere, nella cella elementare le due molecole di trimetafosfato sono così accoppiate come risulta rappresentato schematicamente dalla figura 3 quando il sistema delle due molecole sia osservato in direzione normale al piano passante per i tre atomi di fosforo appartenenti ad una stessa molecola e dalla figura 4 quando la figura 3 è osservata nella direzione parallela al piano del foglio.

Il modello così costituito è stato messo nella cella elementare tenendo come criterio per la sua posizione le dimensioni della cella in relazione alle dimensioni del modello nelle diverse direzioni e l'intensità dei riflessi più forti, in quanto da attribuirsi a piani reticolari più densi di atomi.

Tenendo conto della forte intensità del piano [101] si è fatto coincidere con questo il piano normale a quello contenente tre atomi di fosforo di una sola molecola e la cui traccia è rappresentata dalla linea tratteggiata delle figure 3 e 4.

Se l'insieme delle due molecole assume questa posizione, risulta pure giustificata la forte intensità del riflesso dovuto alla faccia (200). In più gli ioni appartenenti a molecole diverse collocate in celle contigue, vengono a distare dagli ossigeni appartenenti al gruppo $P=O$ di una distanza uguale a quella corrispondente alla distanza $-O-Na$ di una stessa mole-

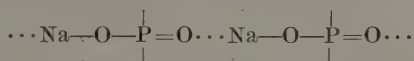
⁽¹⁾ PAULING, « J. Am. Chem. Soc. », 45, 765 (1927).

⁽²⁾ WEST, « Zeitschr. für Kristall. », 74, 306 (1930).

At

Acc

cola, così che nel reticolo viene a risultare una continuità di legame che si può schematizzare nel modo seguente:



Per trovare quale doveva essere presumibilmente la posizione delle molecole d'acqua di cristallizzazione è stato costruito un modello in



Fig. 5.

modo da tenere in considerazione una cella elementare e le sei ad essa contigue, nelle quali sono state disposte in modo analogo le molecole del trimetafosfato.

Da questo modello risulta in modo chiaro che esistono degli spazi liberi sulle congiungenti uno ione sodio coi suoi vicini appartenenti alla stessa cella elementare e con quelli equivalenti delle celle contigue.

Nel punto di mezzo di queste congiungenti, senza venir meno alle esigenze di spazio, può venir collocata una molecola d'acqua, cosicchè ogni ione sodio viene ad essere circondato da quattro di tali molecole ed ogni molecola d'acqua si trova posta fra due ioni sodio. In definitiva, ad ogni ione sodio vengono a corrispondere due molecole d'acqua come esige il risultato dell'analisi chimica.

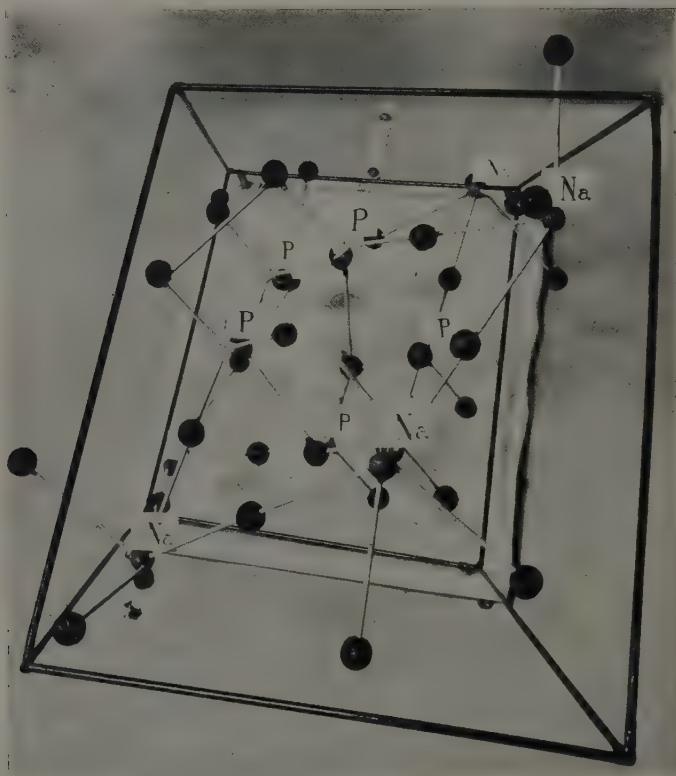


Fig. 6.

Il reticolo risulta quindi formato da isole $(P_3O_9)'''$, ioni sodio e molecole d'acqua. Le figure 5 e 6 rappresentano le fotografie del modello nelle direzioni parallele agli a e b .

d) *Posizione degli atomi nella cella.*

Per controllare l'esattezza del modello proposto, già abbastanza plausibile perchè rende conto, almeno dal lato qualitativo, delle intensità riscontrate per alcune facce sui röntgenofotogrammi, e perchè le mole-

cole delle celle contigue si susseguono in modo che sono rispettate sempre le sfere d'azione dei singoli atomi e raggruppamenti atomici, abbiamo voluto procedere al calcolo delle intensità e del fattore di struttura per le facce più caratteristiche.

Sono state quindi determinate le coordinate degli atomi contenuti in una cella elementare e proiettate sul piano *ac*.

La posizione di queste proiezioni è in buon accordo col risultato dell'analisi Patterson.

Nella tabella II sono riportati i valori delle coordinate delle specie atomiche indicate nella figura 3 e nella tabella III i valori calcolati e trovati delle intensità e del fattore di struttura per le facce prese in consi-

TABELLA II.

Specie atomica	<i>x</i>	<i>z</i>
Na ₁	0,121	0,111
Na ₂	0,207	0,042
Na ₃	0,684	0,398
P ₁	0,575	0,249
P ₂	0,239	0,447
P ₃	0,754	0,363
O ₁	0,498	0,354
O ₂	0,488	0,558
O ₃	0,711	0,565
O ₄	0,429	0,113
O ₅	0,192	0,284
O ₆	0,697	0,404
O ₇	0,792	0,147
O ₈	0,064	0,559
O ₉	0,944	0,263
O Acq. crist. ₁	0,168	0,068
O Acq. crist. ₂	0,486	0,275
O Acq. crist. ₃	0,812	0,648
O Acq. crist. ₄	0,185	0,820
O Acq. crist. ₅	0,162	0,073
O Acq. crist. ₆	0,983	0,227

TABELLA III.

Indici	Valori letti sul film		Valori calcolati	
	Intensità I	F	Intensità I	F
100	4.500	22	870	+ 9,70
200	12.600	52,6	10.900	— 49,00
300	13.200	68,7	15.000	— 73,30
400	5.600	53,5	5.850	+ 54,70
500	1.600	33,8	321	+ 15,72
001	20.000	41,9	18.800	— 40,60
002	400	8,7	60	— 3,36
003	1.400	20,3	885	+ 12,92
004	2.800	35,0	2.100	— 31,20
005	600	18,8	26	+ 3,96
101	17.000	47,6	22.500	+ 54,76
102	8.000	40,8	4.500	— 30,66
103	8.000	49,2	9.700	— 54,44
104	2.000	29,8	4.540	— 43,66
105	5.000	54,2	4.750	— 52,76
201	1.500	19,1	2.000	— 21,18
202	11.600	57,8	8.700	— 48,88
203	7.800	53,7	2.270	— 57,70
302	1.600	25,6	1.940	— 28,10
303	4.000	43,6	3.110	— 38,26
101	9.000	37,2	6.625	+ 32,00
102	2.600	24,4	6.800	+ 39,20
104	2.600	34,3	4.650	+ 46,00
105	1.400	29,6	2.822	+ 42,32
201	5.600	37,4	5.240	+ 36,20
202	7.600	48,4	11.290	— 60,30
203	2.400	31,6	310	+ 11,36
301	6.000	48,0	7.100	— 52,26
302	1.000	21,8	1.240	+ 23,76
303	800	21,4	484	+ 16,88

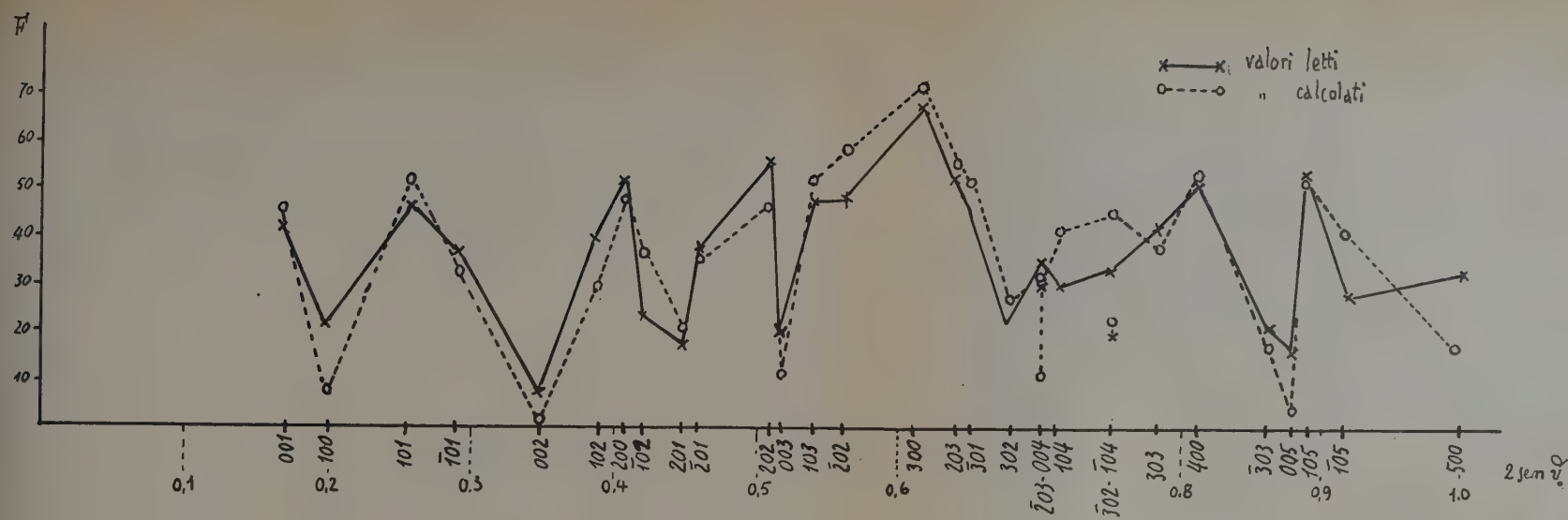


Fig. 7.

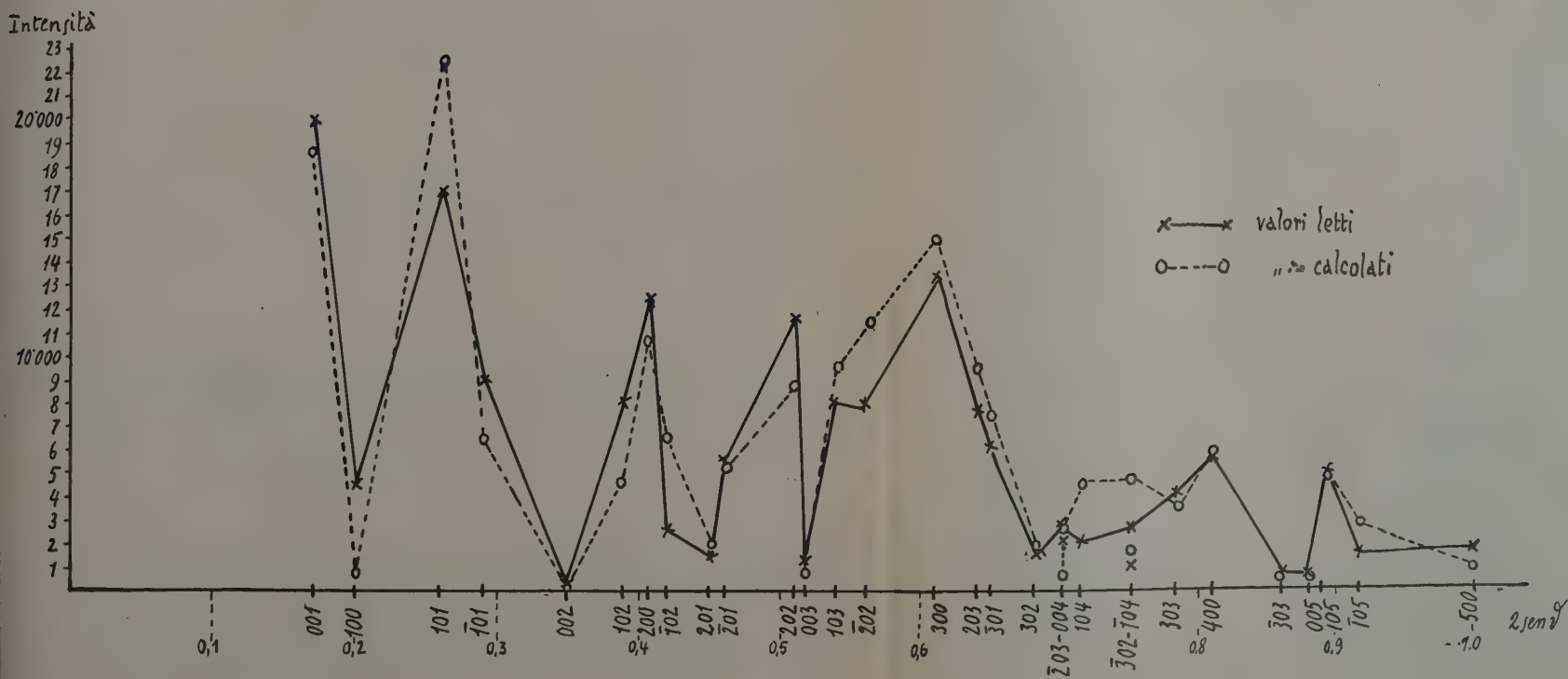


Fig. 8.

derazione ⁽¹⁾; nell'ultima colonna sono riportati pure i segni del fattore di struttura.

Per le facce parallele alle facce (100) e (001) come risulta dai diagrammi delle figure 9 e 10, la concordanza fra i valori calcolati e trovati è perfetta, e per quelle miste (figure 7-8) ove gli errori di lettura delle coordinate si sommano, la concordanza è ancora buona.

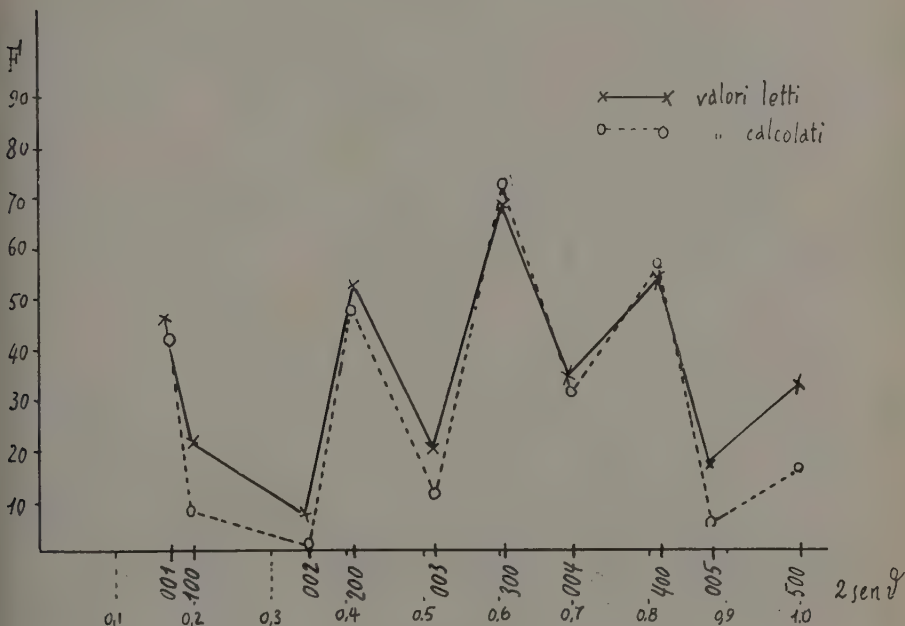


Fig. 9.

Tenendo conto della grande difficoltà nel determinare con esattezza, dal modello, la terza cifra decimale delle singole coordinate e poichè anche lievi differenze incidono notevolmente nel calcolo della intensità delle facce la cui somma degli indici è superiore a 5, si deve ritenere che

(¹) Sono state prese in considerazione le facce a indici non molto elevati, per il fatto che errori nella terza cifra decimale nella lettura delle coordinate dei singoli atomi, portano a differenze notevoli nel calcolo del fattore di struttura, specialmente per le facce a indici elevati. D'altra parte si deve tener conto che in una cella elementare contenente 42 atomi, come nel nostro caso, appartenente al sistema triclino, è molto difficile determinare le coordinate con esattezza.

la concordanza fra valori calcolati è più che soddisfacente e quindi la struttura proposta è esatta (¹).

Tenendo conto dei segni di F calcolati per la posizione prescelta ci proponiamo di eseguire un'analisi Fourier in modo da determinare le coordinate dei singoli atomi con una precisione ancora maggiore anche allo scopo di vedere se nel reticolo tutte le molecole d'acqua di cristalliz-

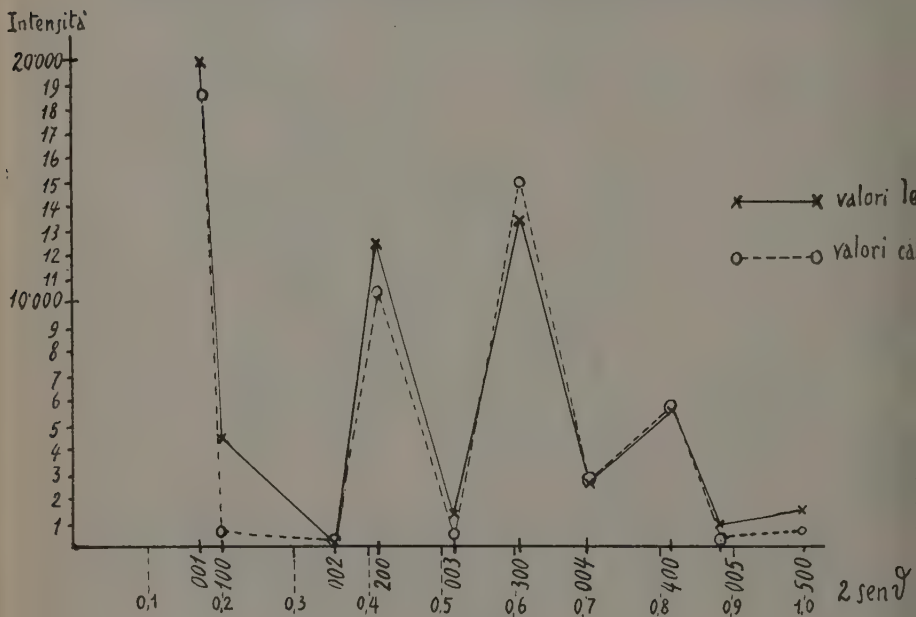
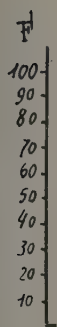


Fig. 10.

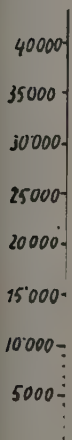
zazione sono equivalenti. La ricerca ha particolare importanza per il fatto che il trimetafosfato da noi esaminato è isomero col fosfato monosodico $\text{NaH}_2\text{PO}_4 \cdot \text{H}_2\text{O}$ sul quale abbiamo in corso analoghe indagini.

(¹) Prima di giungere a questa disposizione degli atomi da noi considerata come definitiva, sono state prese in considerazione diverse posizioni per le due molecole nella cella elementare, alcune delle quali differiscono di poco da quelle corrispondenti alle coordinate date nella tabella. Riportiamo qui nei grafici 11 e 12 i risultati ottenuti per una posizione delle due molecole, in cui la variazione media delle coordinate dei singoli atomi, per una inclinazione diversa delle due molecole nella cella, viene ad essere di $0,25 \text{ \AA}$ per la x e di $0,19 \text{ \AA}$ per la z .

Come si vede l'andamento delle intensità per queste variazioni è molto irregolare anche per le facce a indici bassi come la (200), la (102) e la (300).



Intensit



CONCLUSIONE.

Il trimetafosfato di sodio $\text{Na}_3\text{P}_3\text{O}_9 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ cristallizza nel sistema triclinico con due molecole per cella elementare. Sono state determinate le coordinate degli atomi nella cella. Le isole esistenti sono ioni Na^+ , ioni $(\text{P}_3\text{O}_9)'''$ e molecole d'acqua.

Vengono fissate la forma e le dimensioni dell'aggruppamento P_3O_9 e viene chiarito il meccanismo con cui si compie il processo di polimerizzazione dello ione $(\text{PO}_3)'$.

Le distanze fra ioni O'' e ioni Na^+ , appartenenti ad una stessa molecola o a molecole diverse sono invece presso a poco identiche, così che la continuità reticolare è assicurata da questi ultimi legami.

Biologia (Chimica biologica). — *Su alcuni nicotinil-aminotiazoli*. — I. *2-nicotinilamino-4-metil-tiazolo e 2-nicotinilamino-4-fenil-tiazolo* ⁽¹⁾. Nota di FRANCO LANFRANCHI, presentata ⁽²⁾ da SABATO VISCO, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Non molti sono i derivati piridinici, fra i numerosi presi in esame, che fino ad oggi si son dimostrati attivi nella cura degli organismi pellagrosi. Fra questi, oltre l'acido nicotinico ed i suoi derivati, è da annoverare la 3-metil-piridina (β -picolina), l'acido 2,3-piridin-dicarbossilico (acido chinolinico) e l'acido 3,5-piridin-dicarbossilico (acido dinicotinico). A questi derivati del nucleo piridinico ne va aggiunto un altro di recente sperimentato, che è un derivato del nucleo pirazinico cioè l'acido 2,3-pirazin-dicarbossilico. Senza dubbio però quelli, per i quali esiste un maggior numero di dati clinici, sono l'acido nicotinico ed i suoi derivati, alcuni dei quali insieme all'acido nicotinico stesso sono ormai definitivamente entrati nella terapia.

I derivati dell'acido nicotinico, che hanno dimostrato sicura e notevole azione biologica negli organismi pellagrosi, sono l'estere metilico ed etilico dell'acido nicotinico, la nicotinamide e tre suoi derivati di sostituzione nel gruppo amidico cioè l'acido nicotinurico, la N-monometil-nicotinamide e la N-dietyl-nicotinamide o coramina.

Per quanto riguarda la trigonellina o metilbetaina dell'acido nicotinico non è fino ad oggi definitivamente stabilito se abbia azione anti-pellagrosa o no, non essendo tutti gli AA. d'accordo su questo punto.

Non ci risulta che siano stati esaminati fino ad oggi, per quanto riguarda la loro azione biologica, altri derivati di sostituzione della nicotinamide oltre i tre sopra citati. Noi abbiamo ritenuto di un qualche interesse, in vista di una loro eventuale azione biologica, preparare nuovi derivati della nicotinamide, nei quali uno o due atomi d'idrogeno del gruppo amidico fossero sostituiti da radicali farmacologicamente attivi,

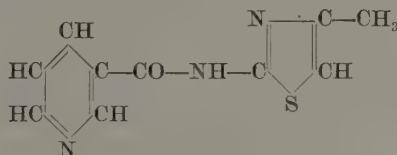
⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia generale della R. Università di Roma.

⁽²⁾ Nell'Adunanza del 5 giugno 1942-XX.

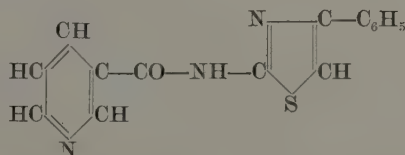
come è dimostrato dal fatto che introdotti in altri composti ne determinano (per esempio, il radicale antipirinic se introdotto nel gruppo amidico dell'acetamide) o ne modificano notevolmente (per esempio, un radicale tiazolico se introdotto nel gruppo amidico della *p*-ammino-fenil-sulfonamide), la loro azione farmacologica.

Nella presente Nota viene riferito sulla sintesi di due nicotinamidi monosostituite, dove un atomo d'idrogeno è sostituito da un radicale tiazolico e precisamente sulla sintesi del

2-nicotinilamino-4-metil-tiazolo



e del 2-nicotinilamino-4-fenil-tiazolo



Tali composti furono preparati per condensazione del cloruro dell'acido nicotinico rispettivamente con il 2-amino-4-metil-tiazolo ed il 2-amino-4-fenil-tiazolo. La condensazione, essendo il cloruro dell'acido estremamente idrolizzabile, fu eseguita in etere perfettamente anidro. Ugualmente bene però può essere impiegata la diossana, nella quale il 2-amino-4-fenil-tiazolo è assai più solubile. La reazione fu eseguita in un primo tempo fra una molecola dell'ammina e una molecola del cloruro d'acido, nella speranza che l'acido cloridrico messo in libertà nella condensazione fosse fissato dal nucleo peridinico con formazione, con rendimento quantitativo, di un cloridrato del nicotinilaminotiazolo. Avendo però isolato dal prodotto di reazione del nicotinilaminotiazolo, del cloridrato dell'aminotiazolo e del cloridrato dell'acido nicotinico, la condensazione fu eseguita in un secondo tempo fra due molecole dell'ammina ed una del cloruro d'acido. In queste condizioni (vedi parte sperimentale) fu isolato solo il nicotinilaminotiazolo e il cloridrato dell'aminotiazolo. Non permettendo i nicotinilaminotiazoli così ottenuti, a causa della loro difficile solubilità in acqua, un impiego diretto per l'esame della loro azione biologica, furono preparati i loro derivati sodici e i loro cloridrati. Sulla loro preparazione come pure sulla preparazione di altri nicotinilaminotiazoli verrà riferito in una prossima Nota.

PARTE SPERIMENTALE.

Preparazione del cloruro dell'acido nicotinico. — Il cloruro dell'acido nicotinico fu preparato secondo MEYER e GRAF ⁽¹⁾ facendo reagire il cloruro di tionile sul sale sodico dell'acido nicotinico, preparato a sua volta a partire dall'acido nicotinico. Nella preparazione fu seguito meticolosamente il procedimento indicato dagli AA. e fu ottenuto così sempre un prodotto completamente puro.

Preparazione del 2-amino-4-metil-tiazolo e del 2-amino-4-fenil-tiazolo. — Questi aminotiazoli furono preparati secondo V. TRAUMANN ⁽²⁾ per condensazione rispettivamente del monocloroacetone e del ω -monobromoacetofenone con la tiourea. Crediamo non inopportuno, a proposito della preparazione di questi composti, riportare alcuni dettagli non riportati dall'A.

Nella condensazione del monocloroacetone con la tiourea, avvenuta senza presenza di acqua, non è necessario, al contrario di quanto dice l'A., riscaldare il miscuglio delle due sostanze perchè avvenga la reazione. La reazione infatti avviene già anche a freddo dopo alcuni minuti dall'avvenuto mescolamento delle due sostanze ed è violentissima ed accompagnata da un fortissimo riscaldamento. Appunto in considerazione di questo fatto il monocloroacetone fu condensato con la tiourea per porzioni di gr. 10. Da gr. 60 di monocloroacetone di fresco distillato (qualora s'impieghi monocloroacetone da qualche giorno distillato si ottiene un prodotto di condensazione rossiccio) e 49,5 gr. di tiourea (1 mol: 1 mol) furono ottenuti gr. 95 del cloridrato dell'aminotiazolo bianchissimo. Il cloridrato fu ricristallizzato da acetone contenente il 10 % di acqua, nel quale è facilmente solubile a caldo e poco a freddo. Ricristallizzato due volte da detto solvente presentò un P. F. = 169-171° (l'A. non indica il P. F.). Il cloridrato è solubilissimo anche a freddo in acqua con la quale forma uno sciroppo, in alcool a 95 % e in alcool etilico assoluto, è insolubile invece anche a caldo in acetone. La base libera fu preparata dal suo cloridrato secondo TSCHERNIAC e NORTON ⁽³⁾ e V. TRAUMANN ⁽²⁾ e purificata per distillazione nel vuoto in corrente di azoto. Fu ottenuto un prodotto ben cristallizzato e bianchissimo con P. F. = 42°, in accordo a quanto trovarono gli AA. Da 40 grammi di cloridrato furono ottenuti

⁽¹⁾ H. MEYER e GRAF, « Ber. der deutsch. chem. Ges. », 61, 2205 (1928).

⁽²⁾ V. TRAUMANN, « Ann. der Chem. », 249, 31 (1888).

⁽³⁾ J. TSCHERNIAC e C. H. NORTON, « Ber. der deutsch. chem. Ges. », 16, 345 (1883).

gr. 22 di base pura (teoria = 31,2 grammi). La condensazione del ω -monobromoacetofenone e della tiourea fu eseguita riscaldando le due sostanze in bagno d'olio a 110–120°, alla quale temperatura le due sostanze fondendo reagiscono vivacemente. Il prodotto di condensazione giallo e con leggero odore di bromoacetofenone fu ricristallizzato da alcool a 95 %. Partendo da 80 grammi di bromoacetofenone e 32 grammi di tiourea (1 mol : 1 mol) ed eseguendo la cristallizzazione da 500 cc. di alcool, furono ottenuti 97 grammi del bromidrato dell'aminotiazolo ben cristallizzato in aghi e perfettamente bianco e inodore. La base libera fu ottenuta secondo le indicazioni dell'A. e ricristallizzata da benzolo. Sostanza bianchissima ben cristallizzata in aghi con P. F. = 147–148°. Partendo da 50 grammi di bromidrato e ricristallizzando la base da 300 cc. di benzolo furono ottenuti gr. 28 della base pura (teoria gr. 34,3).

Preparazione del 2-nicotinilamino-4-metil-tiazolo. – 19,5 grammi del 2-amino-4-metil-tiazolo (2 mol.) furono sciolti in 400 cc. di etere anidrificato per mezzo del sodio metallico e alla soluzione tiazolica, di continuo agitata, fu aggiunta una soluzione di 12 grammi del cloruro dell'acido nicotinico (1 mol.) sciolto in 50 cc. di etere anidro. L'aggiunta fu accompagnata da moderato sviluppo di calore; mentre si formava immediatamente un precipitato giallo-uovo. Il miscuglio fu lasciato a sè a temperatura ambiente per alcune ore e poi in ghiacciaia per una nottata. Il precipitato, filtrato alla pompa su imbuto di Büchner, si presentò come una polvere cristallina giallo-chiara (gr. 28,5).

Il filtrato, distillato completamente l'etere su bagno-maria, lasciò come residuo un olio giallo-aranciato (gr. 2,5) (totale 28,5 + 2,5 = 31 teoria 19,5 + 12 = 31,5). Per separare ora il cloridrato dell'aminotiazolo dal prodotto di condensazione (formandosi per 1 mol. del nicotinilamino-tiazolo 1 mol. del cloridrato dell'aminotiazolo, in base alle quantità poste a reagire, si dovevano teoricamente separare gr. 18,6 del prodotto di condensazione e gr. 12,8 del cloridrato) i 28,5 grammi del precipitato furono messi in sospensione in 120 cc. di acqua, nella quale il cloridrato è solubilissimo. La sostanza rimasta indisciolta, filtrata alla pompa, si presentò come una polvere cristallina di colore gialliccio e pesò gr. 13,5. L'olio giallo-aranciato residuo dall'evaporazione dell'etere risultò essere insolubile in acqua. Era quindi con ogni probabilità prodotto di condensazione (totale 13,5 + 2,5 = 16 grammi teoria = gr. 18,6). Il filtrato acquoso, dopo di esser stato alquanto decolorato per ebollizione con carbone animale, fu concentrato fino a consistenza sciropposa. Per raffreddamento lo sciroppo si rapprese in una massa cristallina semisolida, che, filtrata alla pompa e seccata, pesò gr. 10. Si trattava senza dubbio del cloridrato dell'aminotiazolo (teoria gr. 12,8). Infatti, ricristallizzata per dissoluzione in alcool assoluto e riprecipitazione con etere, presentò un

P. F. = 167-169° e alla prova con ossido di calcio risultò contenere cloro. I 16 grammi della sostanza insolubile in acqua furono sciolti all'ebollizione in benzolo. La soluzione benzolica, decolorata con carbone animale, per raffreddamento lasciò separare una sostanza cristallizzata in piccoli aghi e di color rosa. Nuovamente cristallizzata da benzolo mostrò un P. F. = 176-178°. Ancora una volta ricristallizzata da cloroformio mostrò lo stesso P. F. = 176-178° e si presentò bianchissima e ben cristallizzata in lunghi aghi prismatici. La sostanza al saggio con ossido di calcio risultò essere esente da tracce di cloro. I risultati dell'analisi concordarono per il 2-nicotinilamino-4-metil-tiazolo. Infatti:

per $C_{10}H_9N_3SO$

calcol. N % = 19,18

trovato N % = 19,14

mgr. 3,499 di sostanza diedero 0,564 cc. di azoto a mm. 764 e a 16°C (1).

Preparazione del 2-nicotinilamino-4-fenil-tiazolo. - 17,5 grammi del 2-amino-4-fenil-tiazolo (2 mol.), finemente polverizzato e ben seccato su anidride fosforica, furono disciolti in 600 cc. di etere anidrificato su sodio. Alla soluzione tiazolica, di continuo agitata, fu aggiunta una soluzione di 7 grammi del cloruro dell'acido nicotinico (1 mol.) in 50 cc. di etere anidro. L'aggiunta fu accompagnata da leggero sviluppo di calore; mentre l'etere si colorava in giallo e quasi subito cominciava a separarsi un precipitato bianchissimo. Dopo una nottata, durante la quale la soluzione eterea fu lasciata stare a sè a temperatura ambiente, fu trovato al di sopra del precipitato bianco un precipitato giallo-oro e l'etere completamente limpido. Filtrato alla pompa il precipitato pesò gr. 19. Il filtrato, evaporato tutto l'etere, lasciò un residuo cristallino giallo-oro del peso di gr. 5 (totale $19 + 5 = 24$ grammi teoria $17,5 + 7 = 26,5$ grammi). Per separare il cloridrato dell'aminotiazolo dal prodotto di condensazione, la sostanza fu sottoposta a ripetute cristallizzazioni frazionate dall'alcool al 95 %. Fu così separata una sostanza più solubile, evidentemente impura, con P. F. 185-190° (gr. 8,8) ed una sostanza meno solubile con P. F. 221-223° (gr. 9,9). Essendo la prima, a differenza della seconda, facilmente solubile in acqua a caldo e poco a freddo, fu purificata per ricristallizzazione due volte ripetuta dall'acqua bollente (la soluzione fu ogni volta decolorata con carbone animale) e fu ottenuta così una sostanza bianchissima in lunghi aghi lucenti con P. F. = 195-197°, che al saggio con ossido di calcio fu riconosciuta contenere cloro. Si

(1) Le microanalisi furono da me eseguite nel Laboratorio di microanalisi dell'Istituto di Fisiologia generale della R. Università di Roma.

trattava quindi del cloridrato dell'aminotiazolo, come risultò nella maniera più sicura dal fatto che un miscuglio della sostanza con il cloridrato dell'aminotiazolo (preparato a partire dall'aminotiazolo stesso, P. F. = 195-197°) non mostrò alcuna depressione nel punto di fusione. La seconda sostanza con P. F. = 221-223° fu purificata per ricristallizzazione due volte ripetuta da alcool al 95 % (la soluzione bollente fu ogni volta decolorata con carbone animale) e fu ottenuta così una sostanza bianchissima, soffice, dall'aspetto setaceo e costituita da lunghi aghi prismatici con P. F. = 223-224°. La sostanza al saggio con ossido di calcio fu riconosciuta completamente esente da cloro. I risultati all'analisi concordano per il 2-nicotinilamino-4-fenil-tiazolo. Infatti:

per $C_{15}H_{11}N_3SO$

Calcolato N % = 14,95

Trovato N % = 15,08

mgr. 4,513 di sostanza diedero cc. 0,585 di azoto alla pressione di 751 millimetri e alla temperatura di 17° C. ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Loc. cit. in ⁽¹⁾ a pag. 5.

Geologia. — *Gli « Strati di Graua », orizzonte mesocretaceo dell'Africa Orientale Italiana.* Nota ⁽¹⁾ di MICHELE GORTANI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Fossili del periodo cretaceo furono più volte segnalati nell'Africa Orientale, ma, per la scarsità dei reperti o per l'insufficienza delle osservazioni, una serie particolareggiata non fu potuta ancora stabilire. Non solo; ma si può anzi notare come nessun orizzonte cretaceo vi sia ancora abbastanza ben definito nella sua fauna e nelle sue precise condizioni di giacitura ⁽²⁾. In contrasto, per tale riguardo, rispetto alla conoscenza, sia pure parziale, che abbiamo circa la serie giurassica, abbastanza nota nelle sue linee generali e nei caratteri di alcuni suoi termini che hanno fornito abbondanti materiali paleontologici accuratamente studiati.

La ragione di tale contrasto è soprattutto da ricercare nel fatto che nei territori meglio esplorati i terreni cretacei compaiono in prevalenza sotto forma di arenarie quarzose senza fossili (le cosiddette « arenarie superiori »), di deposito continentale, mentre i sedimenti marini sembrano limitati a determinate plaghe degli altipiani meridionali. Il prof. Giuseppe STEFANINI aveva scoperto in Somalia parecchie località fossilifere del Cretaceo marino inferiore, medio e superiore, ed aveva anche resa nota per ciascuna di esse la locale serie stratigrafica ⁽³⁾; ma la morte che lo colpì immaturamente nel pieno vigore della sua attività scientifica, non gli permise di condurre a termine lo studio del materiale raccolto.

Mi parve, quindi, singolare fortuna nel gennaio 1937 il rinvenimento di un orizzonte calcareo mesocretaceo nel gruppo montuoso del Garamullata, nella parte settentrionale degli altipiani Hararini, durante la prima campagna della Missione geologica in A. O., affidatami dall'Azienda Generale Italiana Petroli.

(1) Presentata nell'Adunanza del 5 giugno 1942-XX.

(2) Si può forse fare eccezione per il Cenomaniano delle isole di Semha e Socotra, non ostante la povertà delle faune in esse rinvenute e illustrate dal KOSSMAT.

(3) Vedi G. STEFANINI, *Cenni sulle località fossilifere cretacee della Somalia*. « Palaeontogr. Ital. », vol. XXXII (1931), 1932.

Come già fu indicato (¹), quest'orizzonte si intercala, con potenza massima di una ventina di metri, a circa metà altezza nella serie delle arenarie quarzose superiori, sovrapposte ai calcari giurassici; corrisponde cioè ad un relativamente breve periodo di massima estensione del mare cretaceo avanzante da sud.

Il gruppo del Garamullata supera i m. 3000 con le alte cime delle sue giogate più elevate, dirette in senso NO-SE; da questo nucleo centrale si stacca in direzione generale SSE il lungo contrafforte su cui si succedono l'acuta cima del M. Falti (m. 2710), il bastione della rocca di Graua (m. 2490), la tozza massa tabulare del M. Badu (m. 2760) e la piramide, un po' più bassa, dell'Arabliu: nell'insieme un'allungata dorsale, che orograficamente divide il Cencer dall'altipiano Hararino propriamente detto.

Si ergono quelle cime sulla vasta zona di altipiano tabulare, in lento declino verso mezzodì, formata dai calcari giurassici e sostenuta dallo zoccolo cristallino. Ai calcari giurassici fa seguito, tanto nella dorsale in discorso quanto nello stesso nucleo centrale del Garamullata, la serie cretacea che affiora estesamente sotto le grandi masse di lave stratoidi in cui sono intagliate le cime.

Tale serie, che giunge fino a m. 300 di potenza, è essenzialmente costituita da conglomerati e arenarie quarzosi; ma presenta nella parte inferiore qualche intercalazione calcarea, e più in alto un orizzonte calcareo-arenaceo o calcareo-marnoso-arenaceo, che può dirsi in parecchi punti un banco a Exogyre e Orbitoline. Dove la serie cretacea è più conservata, cioè meno abrasa dallo spianamento erosivo, come in corrispondenza di Graua, quest'orizzonte si trova verso la metà del complesso arenaceo-quarzoso; mentre dove le parti superiori di tale complesso sono state asportate, come alla base del M. Falti e del M. Badu, i calcari a Exogyra affiorano poco al di sotto della serie trappica.

Insieme alle Ostreidi ed alle Orbitoline, che sono dominanti, si riscontrano avanzi di numerose specie di molluschi e rari echinodermi. Lo studio della fauna ha permesso di riconoscere una settantina di forme diverse. Una metà di esse risultano nuove o non determinabili specificamente. Le altre sono:

Choffatella decipiens Schlumb.

Orbitolina concava (Lmk.)

Orbitolina lenticularis (Blum.)

(¹) M. GORTANI e A. BIANCHI, *Osservazioni geologiche e petrografiche nella regione di Harar*. « Boll. Soc. Geol. Ital. », LVI, 1937 (v. pag. 505); ID. ID., *Note illustrative su la carta geologica degli Altipiani Hararini e della Dancalia meridionale*. « Mem. R. Acc. Sc. Bologna », (9) VIII, 1941 (v. pag. 95).

Orbitolina discoidea Gras
Orbitolina conoidea Gras ⁽¹⁾
Tetragramma cf. *variolare* Brgnt.
Salenia cf. *scutigera* Gray ⁽²⁾
Arca (*Barbatia*) *aptiensis* Pict. et Camp.
Arca (*Trigonoarca*) cf. *Passyana* d'Orb.
Arca (*Trigonoarca*) sp., cf. *diceris* Seg.
Ostrea (*Pycnodonta*) *vesiculosa* Sow.
Exogra *Couloni* Defr.
Exogyra conica (Sow.)
Exogyra flabellata Goldf.
Pecten (*Syncyclonema*) cf. *orbicularis* Sow.
Vola Morrisi Pict. et Ren.
Plicatula cf. *auressensis* Coq.
Plicatula sp., cf. *Fourneli* Coq.
Lima (*Mantellum*) *cottaldina* d'Orb.
Myoconcha (?) cf. *angulata* d'Orb.
Cyprina bernensis Leym.
Cyprina cf. *regularis* d'Orb.
Astarte elongata d'Orb.
Astarte sp., cf. *A. (Eriphila?) Herzogi* (Goldf.)
Opis sp., cf. *glareosa* de Lor.
Crassatella (*Anthonia* ?) *Baudeti* Coq.
Cardita Forgemoli Coq.
Cardium sp., cf. *Constantii* d'Orb.
Cardium (*Protocardia*) *hillanum* Sow.
Cyprimeria faba (Sow.)
Cyprimeria vibrayeana d'Orb.
Cyprimeria meridionalis Seg.
Tylostoma cf. *depressum* Pict. et Camp.
Tylostoma cf. *ellipticum* Pict. et Camp.
Tylostoma sp., cf. *Torrubiae* Shar.
Natica cf. *gaultina* d'Orb.
Turritella cf. *vibrayeana* d'Orb.
Aporrhais (?) *Dutruegi* Coq.
Pervinquieria sp.

È una fauna che spetta certamente al Cretaceo medio, inteso come l'insieme dell'Aptiano, dell'Albiano e del Cenomaniano. Ma si può arrivare a datarla in modo più preciso.

⁽¹⁾ I foraminiferi furono studiati dal prof. ALFREDO SILVESTRI.

⁽²⁾ Gli echinidi furono studiati dal prof. GIUSEPPE CHECCHIA-RISPOLI.

Un piccolo numero di forme è dell'Aptiano o comune all'Aptiano ed al Cretaceo inferiore: *Arca aptiensis*, *Exogyra Couloni*, *Lima cottaldina*, *Cyprina bernensis*, *Astarte Herzogi*, cui si può aggiungere l'*Astarte elongata*, benchè essa sembri rappresentata anche nel Cenomaniano germanico.

Designano invece il Cenomaniano, o sono comuni al Cenomaniano ed al Cretaceo superiore, *Tetragramma variolare*, *Salenia sentigera*, *Arca Passyana*, *Arca diceras*, *Plicatula auressensis*, *P. Fourneli*, *Myoconcha angulata*, *Crassatella Baudeti*, *Cardita Forgemoli*, *Cyprimeria meridionalis*, *Aporrhais Dutrugei*.

Le altre specie sono tutte note dell'Albiano. Alcune sono proprie di questo piano: *Cyprina regularis*, *Opis glareosa*, *Cardium Constantii*, *Cyprimeria vibrayeana*, *Tylostoma depressum*, *T. ellipticum*, *T. Torrubiae*, *Turritella vibrayeana*. È vero che il loro valore stratigrafico è nel nostro caso infirmato dalla circostanza che, per quasi tutte, la determinazione non è assoluta; ma viene a compenso la presenza di un'ammonite del genere *Pervinquieria*, esclusivo dell'Albiano.

Si deve infine tener conto delle forme comuni all'Aptiano e all'Albiano, ossia *Choffatella decipiens*, *Exogyra Couloni*, *Natica gaultina* e (in quasi tutti i suoi giacimenti) *Vola Morrisi*; nonchè delle forme comuni all'Albiano ed al Cenomaniano, e cioè *Ostrea vesiculosa*, *Exogyra flabelata*, *Cyprimeria faba*.

Poichè la fauna proviene da un unico orizzonte, è lecito concludere che si tratta di Albiano; e vien fatto di pensare ad un Albiano piuttosto alto, dati i rapporti più stretti con le faune cenomaniane che non con le aptiane.

Si deve poi osservare come la fisionomia generale della fauna rientri nell'ambito del Mesocretaceo mediterraneo, mentre non si riscontrano legami con la provincia zoogeografica indiana di quel periodo. La forte proporzione di forme nuove, che rappresentano la terza parte delle specie determinate, è in rapporto con la posizione appartata del seno marino in cui si depositarono gli strati di Graua. Seno di mare epicontinentale, la cui scarsa profondità è indicata dalle ostriche e dagli altri grossi molluschi; certamente limitato a breve distanza dalla terra ferma verso settentrione e verso oriente, dove il Cretaceo è per intero continentale, ed aperto invece a mezzodi, cioè verso il Cretaceo marino della Somalia.

Gli « strati di Graua » corrispondono quindi ad un orizzonte calcareo dell'Albiano (probabilmente superiore), di deposito neritico e di tipo faunistico mediterraneo.

Essi possono servire come buon punto di riferimento per la stratigrafia della serie cretacea nell'Africa Orientale.

Paleontologia. — *Zoantari maestrichtiani della Tripolitania* ⁽¹⁾. Nota di ANGIOLA MARIA MACCAGNO, presentata ⁽²⁾ da GIUSEPPE CHECCHIA-RISPOLI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Nella collezione dei fossili del Maestrichtiano della Tripolitania, donata all'Istituto Geopaleontologico della R. Università di Roma dal comm. Ignazio Sanfilippo, si trovano anche alcuni Coralli in ottimo stato di conservazione. Stante la grande rarità di detti fossili in tutta quell'estesissima formazione del Cretaceo superiore, il prof. G. CHECCHIA-RISPOLI me ne ha affidato lo studio, il cui risultato è riuscito di una certa importanza, perchè aumenta le nostre conoscenze su quella già ricca fauna.

Il primo autore, che, in ordine di tempo, si è occupato dei Zoantari di questa regione, è stato L. KRUMBECK, che nel suo lavoro « Beiträge zur Geologie und Palaeontologie von Tripolis » ⁽³⁾, ha descritto un *Cyclolites* aff. *polimorpha* Gldf. ed una *Isastrea* sp.

Nel 1903 C. DE STEFANI, nella sua memoria dal titolo « Fossili della Creta superiore raccolti da M. Sforza in Tripolitania » ⁽⁴⁾, descrisse una nuova specie, il *Cyclolites Krumbecki* dell'Uadi Sofeggin; a questa nuova specie l'autore riporta anche gli esemplari descritti dal KRUMBECK con il nome di *C.* aff. *polimorpha*.

La prof.ssa R. ZUFFARDI-COMERCI, infine, nella Memoria *Fauna del Neo-Cretacico della Tripolitania. — Celenterati* ⁽⁵⁾, descrive i seguenti CORALLI: *Polytremacis stromatoporoides* Th. e P.; *Chaetetes Petri* n. f.; *Actinacis Remesi* Fel.; *Cyclolites Krumbecki* De-Stef.; *Mycetophyllia* n. f. (aff. *nobilis* St.); *Aspidiscus Franchii* Par.; *Trochosmilia tetracycla* Seg., *T. crassicostata* Coq., *T. Batnensis* Coq.; *Parasmilia Edwardsi* Coq.; *Phyllocoenia Pomeli* Th. e P.

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto Geopaleontologico dell'Università di Roma.

⁽²⁾ Nell'Adunanza del 5 giugno 1942-XX.

⁽³⁾ L. KRUMBECK, « Palaeontographica », vol. LIII; Stuttgart, 1906.

⁽⁴⁾ C. DE STEFANI, « Palaeontographia Italica », vol. XIX; Roma, 1913.

⁽⁵⁾ R. ZUFFARDI-COMERCI, « Mem. R. Com. Geol. Ital. », vol. VIII; Roma,

Con la presente Nota vengono ad aggiungersi le seguenti sei specie, cioè:

Latimacandra Sanphilippei sp. nov.

Diploctenium Zuffardii sp. nov.

Astrocoenia decaphylla Michelin

Cyclolites regularis Leymerie

Cyclolites elliptica Lamarck (Guettard sp.)

Rispolites laevigatus gen. et sp. nov.

delle quali, tre vengono per la prima volta indicate per la Tripolitania e tre sono nuove per la scienza; per una di queste ho dovuto istituire anche il genere nuovo *Rispolites*.

Su questi Coralli si trovano frequenti esemplari di *Omphalocyclus macropora*, come avviene per tutti i fossili del Maestrichtiano ⁽¹⁾.

Alla prof.ssa ROSINA ZUFFARDI-COMERCI, che tanto cortesemente mi è stata larga di consigli, vadano i miei vivi ringraziamenti.

Latimacandra Sanphilippei sp. nov.

(Tav. I, Fig. 6).

Polipaio massiccio, globoso, a base subconcava. Sulla superficie i setti, paralleli fra loro, formano delle serie calicinali continue, alcune circoscritte altre allungate; lungo la linea mediana di queste serie vengono a stretto e completo contatto i muri laterali, che, per questa ragione, non sono individuabili. Questa disposizione dei setti e delle muraglie determina delle colline lineari, diritte e prominenti, separate tra loro da larghe valli. Queste colline attraversano la superficie della colonia, divergendo leggermente dal centro alla periferia; al margine girano, dopo averlo costeggiato per tratti di lunghezza variabile e ritornano al centro, avvicinandosi verso la sommità, senza però confluire. Esse sono distanziate l'una dall'altra ed hanno andamento regolare. Sono poco numerose: se ne contano sei su tutta la superficie, una di esse è dicotoma. Alla sommità le colline si abbassano fino a diventare superficiali. Verso la periferia vi sono tre valli trasversali, circoscritte completamente o parzialmente. La cresta delle colline non sempre coincide con la linea di fusione delle muraglie. Le colline hanno una larghezza di 1, 5-2 cm. e scendono con lenti pendii in valli a largo fondo. La massima altezza delle colline si può calcolare ad 1 cm., la massima distanza tra due creste a 2-2,5 cm.

⁽¹⁾ R. ZUFFARDI-COMERCI. Uno studio su questo ed altri Foraminiferi è stato fatto dalla prof.ssa R. ZUFFARDI-COMERCI, *Foraminiferi del Senoniano della Tripolitania*. « Boll. R. Uff. Geol. d'Italia », vol. LI; 1926.

I setti sono paralleli, diritti, sottili, molto lunghi, un po' slargati al distacco dalla muraglia, granulati con granuli grossolani, formati talvolta da due o tre noduli.

Altri caratteri esterni dei setti, come una probabile fine dentellatura al margine superiore, sono molto probabilmente obliterati dalla caratteristica *patina del deserto*, che in seguito a corrasione ricopre il campione. L'alternanza dei setti è di 4 in 4, cioè sono presenti 3 cicli, dei quali, però l'ultimo è incompleto.

Nello spazio di 1 cm. si contano da 12 a 15 setti; alla periferia essi sono più distanziati e se ne contano soltanto 8 in 1 cm.

Manca la columella.

La base è quasi tutta nascosta da incrostazioni organiche, si scorge tuttavia a stento l'esoteca percorsa da numerose coste, le quali sono in corrispondenza dei setti. Queste coste, come i setti, sembrano anch'esse alternanti di 4 in 4, le più robuste corrispondono ai setti principali.

La gemmazione calicinale è marginale.

Per tutti i caratteri elencati e specialmente per il modo di moltiplicazione, mi sono decisa ad attribuire la forma in esame al genere *Latimaecandra* M. E. e J. H. Le specie conosciute di questo genere sono tutte molto lontane da questa forma, tuttavia tra le specie cretacee con le quali essa è stata messa più specialmente a confronto, *L. rustica* de From. ⁽¹⁾ dell'île d'Aix, è l'unica che la ricordi un poco per il numero e la disposizione delle colline, ma anch'essa, ha, con la specie libica, moltissimi caratteri differenziali, come: il polipaio turbinato, la superficie calicinale sub-piana; i setti più sottili e frequenti, alcuni dei quali corrono nel fondo delle valli parallelamente alle muraglie.

Più lontane sono: *L. massiliensis* de From. ⁽²⁾ del Turoniano, che ha creste calicinali ben distinte ed elevate, ma molto sottili, contorte, interrotte e separate da valli strettissime, inoltre i setti sono sottili, disuguali e i centri calicinali superficiali; *L. Dumortieri* de From. ⁽³⁾, anch'essa del Turoniano, con creste allungate e sporgenti, che sono però sempre più basse e sottili di quelle della specie libica; inoltre le serie sono disposte circolarmente e hanno setti uguali molto lobati e contorti in modo da raggiungere i centri calicinali, che sono superficiali e ben distinti. Tutte le altre specie conosciute sono molto più lontane e quindi ho separato specificamente la forma libica con il nome di *L. Sanphilippo* mihi. Caratteri differenziali della nuova specie sono: la forma globosa; la base

⁽¹⁾ M. de FROMENTEL, *Paléontologie française. Terrain Crétacé*, vol. VIII, pag. 453, tav. 109, fig. 1; 1883.

⁽²⁾ M. de FROMENTEL, op. cit., pag. 449, tav. 106, fig. 2; tav. 107, fig. 2 e tav. 108, fig. 2.

⁽³⁾ M. de FROMENTEL, op. cit., pag. 451, tav. 102, fig. 1.

pianeggiante, non pedunculata; le serie calicinali completamente fuse per i muri e formanti colline poco numerose, alte, spesse, a percorso radiale; le colline diminuiscono di altezza andando verso la sommità, dove terminano restando indipendenti; i setti, distinti in tre cicli, sono diritti, sottili, molto disuguali, slargati alla base e poco frequenti.

Località: Uadi Sofeggin (Maestrichtiano).

Diploctenium Zuffardii sp. nov.

(Tav. I, Fig. 4).

Posseggo un solo esemplare, purtroppo incompleto, appartenente al genere *Diploctenium*; esso era in gran parte incluso nella roccia, dalla quale, con grande pazienza, sono riuscita a liberarlo; cosicchè sono risultati chiaramente visibili i caratteri necessari per la determinazione.

Il polipierite è semplice, flabelliforme, pedunculato, a facce piane, divergenti verso l'alto. Il bordo calicinale descrive un arco di cerchio un po' sbassato; le ali estreme del diametro maggiore si ripiegano in basso; esse, nel nostro esemplare, sono rotte, tuttavia si costata, che erano divergenti e che si prolungavano alquanto oltre il peduncolo.

La muraglia è nuda e presenta numerose coste, diritte, serrate, uguali tra loro, che partono dal peduncolo e si allontanano aprendosi a ventaglio; verso i lati esse si piegano alquanto in fuori e in basso; queste coste si dicotomizzano tre volte allontanandosi dalla base; ogni costola, al suo inizio, misura 1 mm. di larghezza; le otto costicine, che derivano dalle tre dicotomizzazioni di ogni costola iniziale, coprono lo spazio di 3 mm. Ho contati 21 rami iniziali conservati e 168 costicine terminali ma il loro numero è certo maggiore negli esemplari interi.

Data la forma del polipaio, i diametri del calice sono molto ineguali. Le due facce divergono, però, in modo che il diametro minore raggiunge quasi i due centimetri; la sezione del calice perpendicolare al diametro maggiore è quindi a forma di V con un valore angolare di 40°. La fossa calicinale è molto lunga, arcuata, profonda circa $\frac{1}{2}$ cm. Manca la columella.

I setti sono numerosi e disuguali di 7 in 7, costituiscono, cioè, 4 cicli, di cui, però, l'ultimo è incompleto.

Nulla si può dire della forma delle ali, che sono rotte un poco al di sotto del peduncolo, sembrano divaricate, ma non sappiamo quale lunghezza avessero raggiunto. Il peduncolo si piega leggermente da un lato.

L'esemplare descritto appartiene indubbiamente al genere *Diploctenium* Gldf. per tutti i caratteri sopra indicati; questo genere, esclusivamente cretacico, è conosciuto nel Turoniano e nel Senoniano e comprende due gruppi: il nostro esemplare prende posto nel secondo, carat-

terizzato da calice fortemente incurvato secondo il diametro maggiore e da apici che scendono più in basso del peduncolo.

La nuova specie si differenzia da tutte quelle conosciute per due caratteri importanti, cioè, per l'entità (quasi due centimetri) del diametro minore, che è data dalla divergenza delle due pareti (in tutti i *Diploctenium* questo diametro è molto piccolo, perchè le pareti hanno andamento quasi parallelo) e per la presenza di quattro cicli nel sistema settale, numero che non era stato raggiunto finora da nessuna specie di questo genere.

Le specie più vicine sono il *D. subcirculare* Mich. ⁽¹⁾, da cui il nostro esemplare si distacca, oltre che per i caratteri suddetti, per le ali divaricate e le maggiori dimensioni e il *D. lunatum* Mich. (Brug. sp.) ⁽²⁾ da cui differisce, oltre che per i caratteri da noi rilevati anche per l'arco dell'orlo calicinale, che è minore invece che maggiore di un semicerchio e per la fossetta calicinale più profonda. Più lontano è *D. affine*, piccola specie del Senoniano del Portogallo descritta da Felix ⁽³⁾.

La forma delle ali non potrà essere specificata fino a che non si troverà un esemplare intero della nuova specie.

Località: Uadi Sofeggin (Maestrichtiano).

Astrocoenia decaphylla M. Ed. e J. H. (Mich. sp.).

(Tav. I, Fig. 2).

- 1816 - *Astrea reticulata* (pars): GOLDFUSS, *Petrefacta Germanica*, pag. 301, tav. CXXXVIII, fig. 1 a-d.
- 1847 - *Astrea decaphylla*: MICHELIN, *Iconographie Zoophytologique*, pagina 302, tav. LXXII, fig. 1.
- 1849 - *Astrocoenia decaphylla*: MILNE-EDWARDS e J. HAIME, *Récherches sur les Polipiers*. IV Mem.: *Monographie des Astréides*, pag. 298.
- 1854 - *Astrocoenia decaphylla*: REUSS, *Beiträge zur Charakteristik der Kreideschichten in den Ostalpen, besonders im Gosauthale und am Wolfgangsee*. «Denkschr. d. Wiener. Acad.», vol. VII, pag. 74; tav. VIII, figg. 4-6.
- 1858 - *Astrocoenia decaphylla*: E. de FROMENTEL, *Introd. à l'Étude des Pol. foss.*, pag. 232.

⁽¹⁾ M. de FROMENTEL, *Paléontologie française. Terrain Crétacé*, vol. VIII, pag. 251; tav. IX, fig. 2; 1883.

⁽²⁾ M. de FROMENTEL, op. cit., pag. 248, tav. X, fig. 1 e tav. XIV, fig. 3.

⁽³⁾ J. FELIX, *Korallen aus portugiesischem Senon*. «Zeitschrift der Deutschen geologischen Gesellschaft», vol. LV, pag. 55, tav. III, fig. 8 e 9; Berlino, 1903.

- 1873 - *Astrocoenia decaphylla*: STOLICZKA, *Cretaceous Fauna of Southern India*. Vol. IV: *The Corals or Anthozoa*. «Mem. of the Geological Survey of India», pag. 28, tav. V, figg. 5-6.
- 1883 - *Astrocoenia decaphylla*: M. de FROMENTEL, *Paléontologie Française-Terrain Crétacé*, vol. VIII, pag. 527, tav. CXLI, fig. 3; tavola CXLVI, fig. 2.
- 1869 - *Astrocoenia decaphylla*: DUNCAN, *British fossil corals*. II, n. 2, pag. 29, tav. CLXXVIII, figg. 7-9.
- 1881 - *Astrea reticulata decaphylla*: QUENSTEDT, *Petrefactenkunde Deutschlands Korallen*, VI, pag. 891, tav. CLXXVIII, figg. 7-9.
- 1898 - *Astrocoenia decaphylla*: FELIX, *Beiträge z. Kenntn. d. Astrocoeninae*. «Zeitschr. d. d. geol. Ges.», vol. 50, pag. 251, tav. XI, fig. 1.
- 1903 - *Astrocoenia decaphylla*: FELIX, *Studien über die korallenführenden Schichten der oberen Kreideformation in den Alpen und den Mediterrangebieten*. I. *Die Anthozoën der Gosauschichten in den Ostalpen*. «Zweite Hälfte. Palaeontographica», vol. 49, pag. 315. Stuttgart.

Posseggo un polipaio di questa specie lungo 9 cm. e largo 5, globoso, di forma irregolare e tozzamente ramosa.

I calici, quasi superficiali, sono poligonali, in maggioranza esagonali, ma il numero dei lati può essere maggiore o minore.

I calici sono uniti per la muraglia per tutta la loro altezza, come risulta da sezioni praticate a differenti livelli. La muraglia è alquanto sottile, ma ben distinta, il suo orlo intorno ai calici appare smerlato per le sporgenze, che vi si formano nei punti di attacco dei setti principali, i quali si alternano nei calici contigui.

La columella è stiliforme, ben distinta nei calici meglio conservati, ma poco sviluppata, essa è in ogni modo distinguibile nettamente in sezioni sottili trasversali.

Il diametro calicinale medio è di mm. 4, poco variabile. La distanza dei centri calicinali è di mm. 3 $\frac{1}{2}$.

L'apparecchio settale è del tipo decamerale con 10 setti più sviluppati, alternati a 10 setti più brevi e più esili.

I setti, attentamente osservati, appaiono minutamente dentati e taluni con espansioni paliformi. (Vedi calice a).

L'Astrocoenia decaphylla è una specie cretacea ritrovata nel Turo-niano e viene ora descritta per il Maestrichtiano.

Località: Uadi Sofeggin. (Maestrichtiano).

Cyclolites regularis, Leym.

(Tav. I, Figg. 3, 3 a, 3 b).

- 1851 - *Cyclolites semiglobosa*: LEYMERIE, *Mémoire sur un Nouveau Type Pyrénéen*. « Mem. de Soc. Geol. de France », ser. II, vol. IV, pag. 199, tav. B, fig. 14.
- 1881 - *Cyclolites regularis*: LEYMERIE, *Mem. Géol. et Pal. des Pyrénées*, pag. 774.
- 1897 - *Cyclolites regularis*: NOETLING, *Fauna of Bdluchistan*, vol. I, parte 3^a. *Fauna of Theupper Cretaceous (Maëstrichtien) Beds of the Mari Hills*, pag. II, tav. I, figg. 13-14. Londra.

Posseggo quattro esemplari di questa specie in buone condizioni di conservazione, tanto che mi sembra utile approfittarne per una particolareggiata descrizione della specie.

Il polipierite è quasi circolare, ugualmente convesso sulla faccia superiore, subplano alla sommità e degradante uniformemente verso il margine. Fossetta calicinale poco più di $\frac{1}{3}$ del diametro, stretta, centrale rispetto all'asse. Base poco rigonfia, ma sempre leggermente convessa.

Epiteca spessa, ornata di evidenti strie di accrescimento irregolarmente distanziate e con un bottone centrale rilevato.

Setti sottili, uniformi, molto numerosi, al margine se ne contano da 38 a 48 in 1 cm.; circa 370 in un esemplare. I setti sono dentati all'orlo superiore, si anastomizzano e portano frequenti sinapticole.

In sezioni sottili parallele e perpendicolari alla base, ho notato che i setti non raggiungono il centro, ma restano liberi.

Dimensioni: diametro mm. 25; altezza mm. 10; lunghezza della fossetta calicinale mm. 9.

Per tali considerazioni credo che i miei esemplari siano da identificarsi con *C. regularis* Leym.: infatti le illustrazioni di questa specie del Cretaceo superiore dei Pirenei ⁽¹⁾ e del Maestrichtiano del Belucistan ⁽²⁾ non lasciano dubbi su questa identità, specialmente per la forma, posizione e lunghezza della fossetta calicinale, per l'assenza di strie radiali

(1) M. A. LEYMERIE, *Sur un nouveau type pyrénéen*. « Mem. Soc. Géol. de France », ser. II, vol. IV, pag. 199, tav. B, fig. 14; Parigi, 1851; Id., *Mém. Géol. et Pal. des Pyrénées*, pag. 774, 1881.

(2) F. NOETLING, *Fauna of Bdluchistan*, vol. I, parte 3^a; *Fauna of Theupper Cretaceous (Maëstrichtien) beds of the Mari Hills*. « Palaeontologia Indica », serie XVI, pag. 11, tav. I, figg. 13-14; Calcutta, 1897.

sull'epiteca e per il numero dei setti, che sono dentati, si anastomizzano e sono forniti di sinapticole. Solo si può notare che gli esemplari libici hanno la base alquanto convessa, invece che piana o subconcava.

Gli esemplari in esame sono ben distinti da *Cyclolites Krumbecki* DE STEFANI del Maestrichtiano della Tripolitania ⁽¹⁾ infatti il *C. regularis* è di forma circolare e molto alto, ha fossetta calicinale centrale, che occupa $\frac{1}{3}$ della lunghezza del diametro e che è abbastanza profonda, mentre il *C. Krumbecki* ha calice a volte ellittico, depresso, fossa columellare lunga e poco profonda, sempre eccentrica, base concava, strie radiali sull'epiteca, sinapticole confluenti in una pseudocolumella.

Nello stesso modo differiscono dal nostro i *Cyclolites* studiati dalla prof. R. ZUFFARDI-COMERCI della fauna maestrichtiana di Tripoli ⁽²⁾ e dall'autrice attribuiti al *C. Krumbecki*, anche se alcuni individui presentano fossetta columellare piccola e centrale, carattere attribuibile a giovanilità degli individui stessi. La differenza permane però sempre nella presenza o meno delle strie radiali sull'epiteca basale.

Località: Uadi Sofeggin (Maestrichtiano).

Cyclolites elliptica Lamarck (Guettard sp.).

(Tav. I, Figg. 5, 5 a, 5 b).

1770 - *Porpites elliptique*: GUETTARD, *Mém. sur les sciences et les arts*, vol. III, pag. 452, tav. XXI, fig. 17-18.

1801 - *Cyclolites elliptica*: LAMARCK, *Histoire des animaux sans vertèbres*, pag. 369.

1816 - *Cyclolites elliptica*: LAMARCK, op. cit., vol. II, pag. 234.

1846 - *Fungia polymorpha* (pars): GOLDFUSS, *Petrefacta Germanica*, pag. 48, tav. XIV figg. 6 e e 6 f.

1846 - *Cyclolites elliptica*: MICHELIN, *Iconographie Zoophytologique*, pagina, 281, tav. LXIV, fig. 1 a (non fig. 1 b).

1851 - *Cyclolites elliptica*: MILNE EDWARD e J. HAIME, *Récherches sur les Polypiers. Monographie des Fongides*. Mem. VI, pag. 103.

1854 - *Cyclolites elliptica*: REUSS, *Beiträge zur Charakteristik der Kreideschichten in den Ostalpen, besonders im Gosauthale und am Wolfgangsee*. « Mem. dell'Acad. de Vienne », vol. VII, pag. 121, tav. XXII, fig. 7.

(1) C. DE STEFANI, *Fossili della Creta superiore*. « Palaeontographia Ital. », vol. XIX, pag. 264, tav. XXIII, figg. 4, 6; Roma, 1913.

(2) R. ZUFFARDI-COMERCI, *Fauna del Neo-Cretacico della Tripolitania. Celerentari*, « Mem. R. Uff. Geol. Ital. », vol. VIII, pag. 12, tav. III, figg. 11, 12, 13; Roma, 1921.

- 1856 - *Cyclolites elliptica*: CATULLO, *Dei terreni di sedimento superiore delle Venezie*, pag. 30, tav. I, fig. 19.
- 1883 - *Cyclolites elliptica*: M. de FROMENTEL, *Paléontologie Française-Terrain Crétacé*, vol. VIII, pag. 345, tav. LIII.
- 1903 - *Cyclolites elliptica*: FELIX, *Studien über die Korallenführenden Schichten der oberen Kreideformation in den Alpen und den Mediterran-gebieten*, 1^a parte. *Die Anthozoën der Gosauschichten in den Ostalpen*. Erste Hälfte. «Palaeontographica», vol. 49, pag. 188.

Tra gli esemplari di *Cyclolites*, che ho a mia disposizione, se ne trova uno che differisce da *C. regularis*, ora descritto, per numerosi caratteri, che corrispondono invece a quelli specifici di *C. elliptica*.

La forma di questo unico esemplare è ellittica, la base piana, solo verso il centro diviene concava, le dimensioni sono un po' minori di quelle date dal de Fromentel, ma l'individuo in esame per la sua giovane età, non doveva aver raggiunto il completo sviluppo.

La base è ricoperta di una forte epiteca, ornata di strie concentriche debolmente marcate; la faccia superiore è molto rigonfia, più alta e ripida dalla parte nella quale la fossetta è più lontana dal margine; questa però ha piccola eccentricità ed è molto allungata secondo il diametro maggiore. I setti sono finissimi e numerosi: se ne contano 49, al margine, nello spazio di 1 cm. Essi sono dentati, anastomizzati e forniti di sinapticole.

Dimensioni: diametro maggiore mm. 28; diametro minore mm. 25; altezza mm. 12; lunghezza della fossetta calicinale mm. 13.

Località: Uadi Sofeggin (Maestrichtiano).

Gen. *Rispolites* nov.

Rispolites laevigatus sp. nov.

(Tav. I, Figg. 1, 1 a, 1 b).

Posseggo due esemplari di questa interessante forma. Per la descrizione mi riferisco al più grande, che è anche il meglio conservato e quello qui figurato.

Il polipierite, che ha un contorno circolare, si espande in fuori a forma di ombrella assottigliandosi nella parte periferica.

La parte inferiore è fortemente concava e segue l'andamento della superiore, in modo che le due superfici vengono ad essere parallele fra loro. La muraglia è nuda, coperta di coste diritte, molto sottili, disuguali di 4 in 4 o di 5 in 5.

Al centro della base sporge il peduncolo di attacco molto ben sviluppato a forma di rilievo trasversale, alla sommità del quale confluiscono le coste. La faccia superiore del polipierite è convessa, ma pianeggiante alla

sommità, con una fossetta calicinale abbastanza larga (quasi 3 mm.) appena accennata in profondità e lunga più di un terzo del diametro del polipierite. I setti, molto numerosi, non si anastomizzano, ma terminano a varia distanza dal centro. Hanno bordo superiore non dentato e raggiungono tutti la stessa altezza, in modo che la superficie della faccia calicinale risulta perfettamente liscia. Il loro percorso è a volte un po' ondulato. Essi sono uniti trasversalmente da un numero grandissimo di sinapticole molto ben sviluppate. Nell'esemplare in esame si contano ben 74 sinapticole tra due setti contigui, scelti tra due che raggiungono il centro. Al margine nello spazio di 1 cm., si contano 49 setti e quindi circa 340 in tutta la circonferenza. I setti si alternano di 9 in 9, sono cioè presenti 5 sistemi completi e l'inizio, con un piccolo setto del 6°. Il tipo dell'apparato settale è così costituito di quattro cicli completi e del 5° incompleto. I setti principali, che raggiungono il centro ai lati della fossetta, si congiungono al fondo di questa; i setti che si trovano agli estremi della fossetta si arcuano un poco intorno a questi estremi.

Manca la columella o la pseudocolumella.



Rispolites laevigatus gen. et sp. n.

Sezione trasversale passante per il piano perpendicolare alla fossetta calicinale (ingr. 2 volte).

Dimensioni: diametro mm. 23; altezza mm. 9,5; lunghezza della fossetta calicinale mm. 7.

Oltre all'esemplare figurato, ne possediamo uno più piccolo, che mostra al completo la faccia inferiore concava, mentre su quella superiore aderisce una valva inferiore di *Pecten* (*Neithea*) *quiquecostatus* Sow.

Rapporti e differenze. — Per quante ricerche abbia fatto non sono riuscita a riportare gli esemplari studiati ad alcun genere noto.

Cycloseris, con il quale questi esemplari hanno i maggiori rapporti, mostra rilevanti differenze, che consistono: nella muraglia subpianeggiante con deboli tracce di aderenza; nei setti molto più larghi di quelli di *Rispolites* e aumentanti di spessore verso il centro; i setti di *Cycloseris*, inoltre, sono di altezza diversa, dentellati sul bordo superiore e granulati lateralmente; il numero dei cicli vi è più elevato e, infine, la fossetta calicinale, che negli esemplari tripolini è molto allungata, in *Cycloseris* è quasi sempre piuttosto circolare; nel *Cycloseris*, poi, non vi sono sinapticole.

Affinità meno strette presentano il gen. *Microseris* de From., che ha la muraglia ricoperta di fittissime granulazioni, senza coste e con rarissime sinapticole; il gen. *Astero-seris* de From., che, oltre le granulazioni sulla muraglia, presenta una columella, setti larghi e dentati; il gen. *Diaseris* M. E. e J. H., che mantiene le tracce dei lobi di cui era formato in gioventù.

Nessuna fusione è possibile poi con *Cyclolites* Lmk., *Episeris* de From., *Thecoseris* de From., i quali, oltre agli altri caratteri differenziali, sono generi forniti di epiteca.

In verità i nostri esemplari presentano a prima vista una grande somiglianza con *Cyclolites*, tanto da esigere un severo confronto con questo genere. È possibile, infatti, il dubbio che fosse esistita un'epiteca sottilissima, la quale, poi, sarebbe stata asportata, come avviene in *Cyclolites Guerangeri* M. E. e J. H.; in questo caso la nostra forma sarebbe dovuta rientrare in *Cyclolites*; però, l'esame della superficie inferiore, che è regolarmente cava, molto profonda e ben conservata in tutti e due gli esemplari, non rileva la minima traccia di epiteca, mentre vi sono ben visibili le coste che ricoprono la muraglia. Inoltre i caratteri dei setti, che sono perfettamente lisci all'orlo e quasi tutti dello stesso spessore e non anastomizzati, differiscono da quelli di *Cyclolites*.

Il genere *Micrabacia* M. E. e J. H. (forma cretacea, che ha costole e setti alternanti al margine) e il genere *Anabacia* d'Orb. (forma giurese, senza muraglia, senza tracce di aderenza, con fossetta calicinale poco profonda e setti crenulati tanto nel bordo superiore che in quello inferiore) sono molto più lontani dei nostri esemplari.

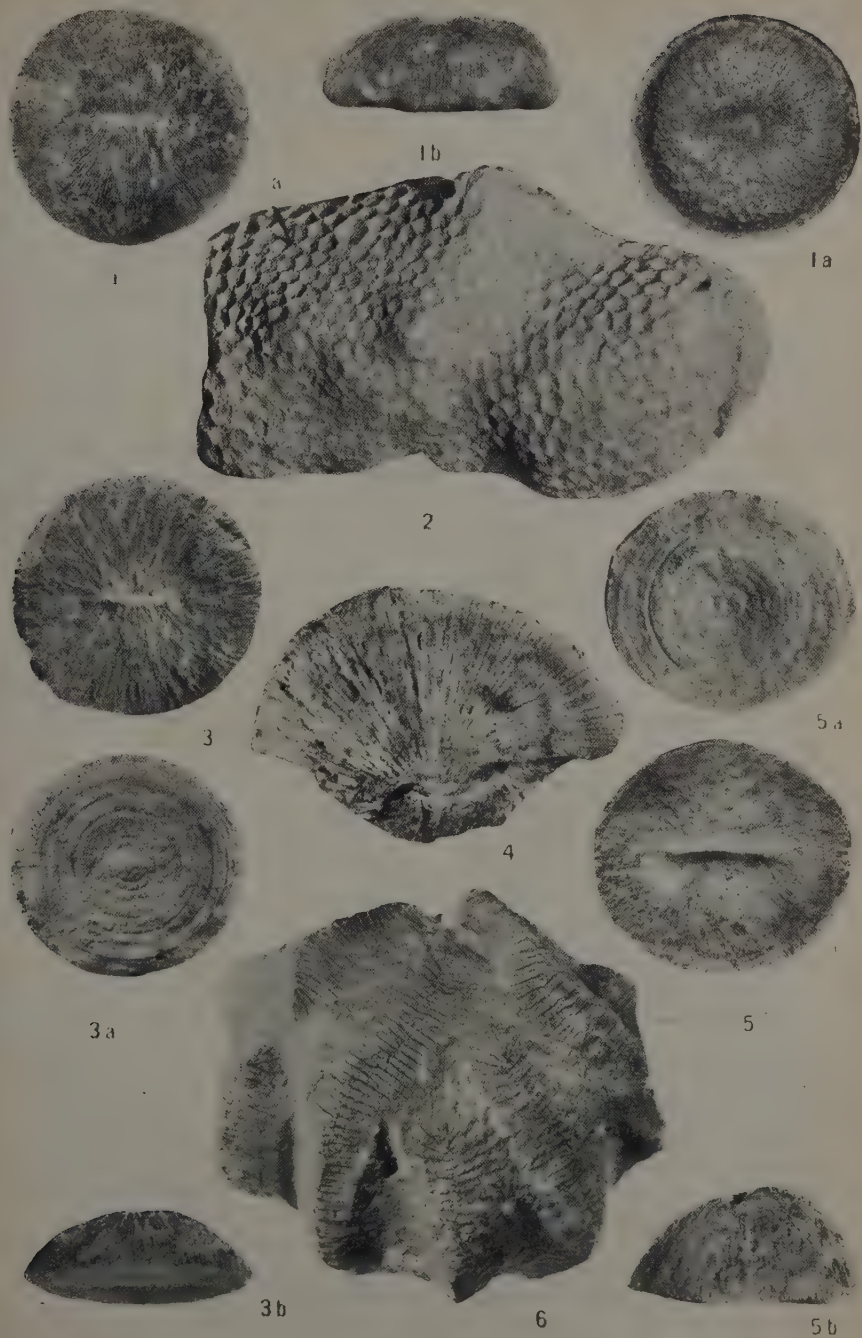
Per queste ragioni mi sono indotta ad istituire per gli esemplari libici un nuovo genere, che trova posto nel sistema vicino a *Cycloseris*.

Il genere, che è dedicato al prof. GIUSEPPE CHECCHIA-RISPOLI, è rappresentato finora, da una sola specie: *Rispolites laevigatus* del Maestrichtiano della Tripolitania.

Località: Uadi Sofeggin (Maestrichtiano).

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

- Fig. 1. — *Rispolites laevigatus* gen. et sp. nov. superficie calicinale; 1 a, superficie basale; 1 b, profilo. Ingr. 1,3 volte.
- Fig. 2. — *Astrocoenia decaphylla* Mich. Gr. nat. a.—calice in cui sono visibili la columella e le espansioni paliformi.
- Fig. 3. — *Cyclolites regularis* Leym., superficie calicinale; 3 a, superficie basale; 3 b, profilo. Ingr. 1,4 volte.
- Fig. 4. — *Diploctenium Zuffardii* sp. nov., visto di lato. Gr. nat.
- Fig. 5. — *Cyclolites elliptica* Lmk (Guettard sp.), superficie calicinale; 5a, superficie basale; 5b, profilo. Ingr. 1,3 volte.
- Fig. 6. — *Latimaeandra Sanphilippoi* sp. nov., superficie calicinale. Gr. nat.



Fisiologia (Fisiologia generale). — Rame e catalasi ⁽¹⁾.
Nota di EUSEBIO TRIA, presentata ⁽²⁾ da SABATO VISCO,
Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

INTRODUZIONE.

La preparazione della catalasi allo stato cristallino è stata ottenuta dal fegato di bue da SUMNER e DOUNCE (1) e da me (2) con due procedimenti nettamente distinti. Il metodo di SUMNER consiste nell'estrazione e precipitazione frazionata con soluzione di diossano, seguita da cristallizzazione con solfato di ammonio. Il metodo da me elaborato consiste nella precipitazione frazionata con solfato di ammonio, seguita da cristallizzazione con solfato di ammonio stesso. Tale metodo ha il vantaggio che si ovvia all'uso di diossano necessario in notevole quantità (3 litri circa per preparazione) per il metodo di Sumner, sostanza questa che non sempre è facile a procurarsi, e che in alcuni casi determina un'inattivazione dell'enzima.

I cristalli di catalasi si presentano sotto la forma di aghi o di parallelepipedi sottili. Per ricristallizzazione da soluzione di fosfati a pH 7,4 si ottengono dei prismi solubili in soluzioni concentrate di NaCl. I cristalli presentano una doppia rifrazione bene evidente, sono poco solubili in acqua, ma solubili in soluzioni di NaCl; coagulano al calore e danno le reazioni colorate delle proteine. Soluzioni molto diluite di catalasi sono gialle, soluzioni concentrate sono invece praticamente nere. Presentano bande di assorbimento a 627 e 536 m μ e un punto isoelettrico a pH 5,7.

La preparazione della catalasi allo stato cristallizzato ha riaperta la questione sulla costituzione chimica di questo enzima, problema che era stato già affrontato da numerosi ricercatori in epoca più antica. Prima ancora che la catalasi fosse stata ottenuta allo stato cristallino ZEILE ed HELLSTRÖM (3) credevano che essa risultasse di una proteina unita ad una catena laterale ematinica. In seguito STERN (4) poté isolare il gruppo pro-

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia generale della R. Università di Roma.

⁽²⁾ Nell'Adunanza del 5 giugno 1942-XX.

stetico come emina cristallizzata. Lavorando con preparati di catalasi cristallizzata da fegato di bue SUMNER e DOUNCE (5) poterono osservare che in addizione all'ematina questo enzima contiene un secondo gruppo prostetico. Questi Autori scindevano la catalasi aggiungendo acetone a soluzioni acidificate dell'enzima. Si otteneva così un precipitato proteico colorato leggermente in blu ed una soluzione intensamente colorata in blu, dalla quale l'emina si separa allo stato cristallino in seguito ad evaporazione dell'acetone. STERN (loc. cit.) crede che la sostanza blu sia biliverdina. LEMBERG (6) d'altra parte osserva che l'emina verde o il verde emocromogeno accompagna la catalasi degli estratti di fegato di cavallo. Più tardi STERN e WICKOFF (7) parlano della sostanza blu come di verde emocromogeno. SUMNER e DOUNCE (loc. cit.) in primo tempo non credevano che si trattasse di biliverdina e neanche di verde emocromogeno. Tale sostanza non può considerarsi come un'impurità giacchè non può essere allontanata dalla catalasi in seguito alle cristallizzazioni successive, piuttosto aumenta con l'aumentare della purezza dell'enzima. Il ferro presente nella catalasi nella quantità di 4 atomi per molecola si trova, secondo gli Autori citati, per metà nell'emina, per metà nella sostanza blu; sicchè ogni molecola di catalasi non contiene 4 molecole di ematina ma soltanto 2. Tentativi di separare i gruppi prostetici della catalasi in maniera reversibile allo stesso modo come riuscì a THEORELL col fermento giallo (8) ed in seguito ad altri ricercatori con altri enzimi (9), non sono riusciti, giacchè in seguito a dialisi contro HCl 0,02 N la catalasi si denatura e si inattiva senza decomposizione. Recentemente LEMBERG, NORRIS e LEGGE (10) partendo dalla catalasi cristallizzata di fegato di bue hanno preparato idrocloruro di biliverdina cristallizzato. Sicchè dunque attualmente non può essere più negato che la sostanza blu che si forma in seguito a trattamento con acetone e acido cloridrico sia biliverdina. Lo stesso SUMNER (11) è attualmente di questa idea.

Riassumendo può dirsi che la catalasi è una proteina contenente protemina e biliverdina, che secondo LEMBERG (loc. cit.) si trovano nel rapporto molecolare di 3:1. La funzione della biliverdina è completamente sconosciuta.

In un suo lavoro AGNER (12) volle mettere l'attività catalasica in rapporto alla quantità di rame presente nella molecola dell'enzima. Egli avrebbe dimostrato che nei suoi preparati amorfi ottenuti con un metodo basato sulla precipitazione frazionata con solfato d'ammonio e purificati col metodo dell'elettroforesi è presente una cupro-proteina che può essere allontanata precipitandola con acido pierico. Egli avanza l'ipotesi che tale cupro-proteina sarebbe indispensabile per l'attività dell'enzima, inquantochè essa catalizzerebbe la riossidazione della forma ferrosa della catalasi per opera dell'ossigeno molecolare secondo lo schema di KEILIN e HARTREE.

Le mie ricerche (13) eseguite nel laboratorio di SUMNER dimostrano che rame non è presente nella catalasi in maniera apprezzabile. In seguito lo stesso AGNER (14) trovò che, in contrasto con le sue precedenti osservazioni, è possibile allontanare quantitativamente il rame con ditiocarbamato senza che l'attività dell'enzima venga ad essere notevolmente alterata.

Come si è detto il metodo di AGNER è basato sulla precipitazione frazionata con solfato d'ammonio. Con tale metodo è a me riuscito ottenere dei preparati di catalasi cristallizzata. La determinazione del rame fu da me eseguita nel laboratorio di SUMNER su preparati ottenuti col metodo della cristallizzazione con diossano. Mi è sembrato pertanto utile, allo scopo di chiarire in maniera definitiva la questione della presenza o meno del rame nella catalasi, se anche nei preparati cristallini ottenuti con le precipitazioni successive col solfato d'ammonio fosse presente o meno questo elemento, giacché la sua presenza potrebbe avere un'importanza notevole e chiarire alcuni punti discordi tra le varie scuole che si occupano del complesso problema della catalasi. Ad esempio, è finora assolutamente incomprendibile il perché preparati amorfi ottenuti da AGNER abbiano un'attività di gran lunga maggiore ($K_f = 62.000$) dei preparati cristallizzati ($30-32.000$).

Che il rame entri nella costituzione di molti enzimi è ben noto. Dopo la purificazione della ossidasi polifenolica eseguita da KUBOWITZ (15), KEILIN e MANN (16) hanno purificato due cupro-proteine cataliticamente attive, la polifenolossidasi dei funghi e la laccasi. Anche nella tirosinasi è probabile che entri il rame come gruppo attivo (17). La cosiddetta ossidasi dell'acido ascorbico è probabilmente una cupro-proteina, non è ben noto però se si tratti di un enzima ben definito, in quanto che sembrerebbe che un'attività ossidante dell'acido ascorbico si abbia anche quando il rame è unito con proteine aspecifiche (18).

Secondo COOK, HALDANE, e MAPSON (19) la deidrogenasi formica del *bacterium coli* contiene rame, giacché è inibita da reagenti che formano complessi stabili col rame stesso (acido amino naftolsulfonico).

L'azione catalitica di composti semplici di rame come $\text{Cu}(\text{NH}_3)_4$, Cu-piridina, ecc., è stata studiata da EULER (20). I sali di rame sono gli unici sali capaci di ossidare il citocromo (21).

È indubbio perciò che il rame può entrare nella struttura delle proteine aventi attività enzimatica.

PARTE SPERIMENTALE.

La catalasi è stata preparata allo stato cristallino col metodo da me elaborato e descritto in altra Nota (22). Per ogni preparazione si è partiti da kg. 3 di fegato di bue. La catalasi cristallizzata viene sciolta in acqua con l'aggiunta di piccola quantità di una soluzione tampone di fosfati

3,6 % a pH 7,4 e ricristallizzata aggiungendo piccole quantità di una soluzione satura di KH_2PO_4 e $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$. Sulla soluzione di catalasi in acqua distillata contenente tracce di fosfati si determina l'attività col metodo di VON EULER e il residuo secco. Su campioni di soluzioni corrispondenti e un residuo secco di gr. 0,10-0,15 si determina il rame col metodo di TOMPSETT (23).

Dei numerosi metodi esistenti per il dosaggio del rame in piccole quantità, questo mi è sembrato il migliore. In soluzioni titolate di solfato di rame si sono ottenuti sempre i valori teorici con variazioni dell'ordine di ± 1 %.

Per la esecuzione del metodo si è proceduto nella seguente maniera: cc 2 di soluzione di catalasi corrispondenti ad un residuo secco di gr. 0,10-0,15 si trattano con cc 2 di acido nitrico concentrato. Si porta quasi a secco in bagnomaria bollente. Si aggiunge cc 1 di acido solforico concentrato e cc 3 di acido perclorico. Si diluisce a 10 con acqua distillata e si aggiungono cc 5 di una soluzione al 4 % di pirofosfato sodico. La soluzione così ottenuta si tratta con NH_3 fino a reazione debolmente alcalina al tornasole e si tiene in bagno d'acqua a 80° per 15'.

Dopo raffreddamento si aggiungono cc 5 di alcool amilico e cc 0,5 di una soluzione al 2 % di ditioicarbamato sodico. Si agita fortemente. Una soluzione contenente mg. 0,01 di rame è preparata esattamente allo stesso modo. Per mezzo di una pipetta si aspirano gli strati di alcool amilico e questi vengono comparati in un colorimetro.

In tre prove eseguite su tre differenti preparazioni si sono ottenuti i seguenti valori riferiti a 100 parti di catalasi:

1° — 0,0022

2° — 0,0024

3° — 0,0028

Se si considera che il peso molecolare della catalasi calcolato da SUMNER e GRALEN (23) dalla costante di diffusione e dal volume specifico parziale è di 248.000, ne segue che ogni molecola di catalasi non può avere più di 0,1 atomi di rame, quantità questa dello stesso ordine di grandezza di quella da me trovata lavorando nel laboratorio di SUMNER (13), e che è del tutto insignificante.

Onde ottenere un controllo dell'esattezza di questi risultati mi sono servito del più sensibile metodo spettrografico. Le determinazioni spettrografiche, eseguite presso l'Istituto Chimico dell'Università di Roma, sono state fatte su cc 1 di soluzione di ceneri ottenute dopo ossidazione corrispondenti a gr. 0,16 di residuo secco. L'esame spettrografico eseguito due volte con lo scopo preciso di mettere in evidenza la presenza di rame è riuscito negativo.

Concludendo, si è potuto dimostrare che la catalasi cristallizzata ottenuta col metodo di SUMNER e col metodo da me elaborato non contiene rame in quantità significante.

La presenza di rame nei preparati di AGNER è da mettere perciò in rapporto con le impurezze presenti in questi preparati.

BIBLIOGRAFIA

- (1) SUMNER e DOUNCE, « J. Biol. Chem. », 121, 417 (1937).
- (2) TRIA, « Rend. R. Acc. d'Italia », ser. VII, vol. I, 279 (1940).
- (3) ZEILE e HELLSTRÖM, « Z. physiol. Chem. », 192, 171 (1930).
- (4) STERN K. G., « J. Biol. Chem. », 112, 661 (1935-36).
- (5) SUMNER e DOUNCE, « J. Biol. Chem. », 127, 439 (1939).
- (6) LEMBERG, *Perspectives* in « Biochemistry », London, 137 (1937).
- (7) STERN e WYCKOFF, « J. Biol. Chem. », 125, 33 (1938).
- (8) THEORELL, « Biochem. Z. », 272, 155 (1934); 278, 263 (1935).
- (9) ROSSI, « Arch. Sci. Biol. », 28, 40, 1942.
- (10) LEMBERG-NORRIE e LEGGE, « Nature », 144, 551 (1939).
- (11) SUMNER, cit. in « Annual Review of Biochemistry », IX, 20 (1940).
- (12) AGNER, « Biochem. J. », 32, 1702 (1938).
- (13) TRIA, cit., da SUMNER, « J. Biol. Chem. », 27, 442 (1939).
- (14) AGNER, « Naturwissenschaften », 27, 418 (1939).
- (15) KUBOWITZ, « Biochem. Z. », 292, 221 (1939).
- (16) KEILIN e MANN, « Nature », 143, 23 (1939).
- (17) CALIFANO e KERSETZ, « Enzymologia », 6, 233 (1939).
- (18) MCCARTHY, GREEN e KING, « J. Biol. Chem. », 128, 455 (1939).
- (19) COOK, HALDANE e MAPSON, « Bioch. J. », 25, 534 (1931).
- (20) EULER, cit., da OPPENHEIMER-STERN, « Biological Oxidation », 71 (1938).
- (21) KEILIN, « Ergebn. der Enzymforschung », 2, 239 (1933).
- (22) TOMPSETT, « Bioch. J. », 28, 1544 (1934).
- (23) SUMNER e GRALÈN, « J. Biol. Chem. », 125, 33 (1938).

Fisiologia (Fisiologia generale). — *Catalasi e scorbuto umano* ⁽¹⁾. Nota di EUSEBIO TRIA, presentata ⁽²⁾ da SABATO VISCO, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Lo studio dei rapporti tra acido ascorbico e attività catalasica già da me iniziato nel 1940 (1), ha dimostrato che l'acido ascorbico ha un'azione inibente in vitro sull'attività enzimatica della catalasi cristallizzata. Che cosa succede in vivo non è ancora ben chiaro. Secondo ricerche di JUSATZ (2), l'acido ascorbico introdotto per via endovenosa determina un lieve aumento del potere catalasico del sangue e, reciprocamente, secondo ricerche di TÖRÖK (3) una dieta povera di vitamina C determina abbassamento della catalasi ematica. Altre ricerche non esistono in letteratura per quanto è a mia conoscenza.

Quale sia l'ufficio dell'acido ascorbico e della catalasi nel quadro del ricambio generale non è ancora ben noto. Poichè in questi ultimi anni sono state eseguite interessanti ricerche che permettono di chiarire almeno in parte il problema sarà utile riassumerle brevemente.

L'acido ascorbico è presente praticamente in tutti i tessuti degli animali superiori. Si trova in quantità maggiore nei tessuti ghiandolari, in quantità minore nel tessuto muscolare e nel grasso di deposito. In generale esso si trova in quantità più elevata nei tessuti che posseggono un'elevata attività metabolica (4). Questa constatazione, e l'altra che in assenza di vitamina C si ha rallentamento della respirazione dei tessuti (5) fanno pensare che l'acido ascorbico abbia importanza nei fenomeni respiratori che si svolgono nella cellula vivente.

In che modo l'acido ascorbico espliciti questa funzione non è ancora ben chiaro. L'esame di un gran numero di lavori eseguiti in questi ultimi anni mi sembra dimostrare che le funzioni dell'acido ascorbico sono principalmente due:

1° Funzione ossido-riduttiva, per cui questa sostanza funziona da accettore di idrogeno tra metaboliti non identificati ed altri trasportatori di ossigeno molecolare per mezzo di due o più sistemi enzimatici ossi-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia generale della R. Università di Roma e Direzione di Sanità Intendenza A. S.

(2) Nell'Adunanza del 5 giugno 1942-XX.

clastici. La non esistenza di un'ossidasi dell'acido ascorbico negli organismi animali ha fatto sì che da molti autori tale funzione dell'acido ascorbico, ammessa per le piante, è stata negata per gli animali (6). È da notare però che anche in assenza di ossidasi specifiche, anche ammesso che tali ossidasi siano veri e propri enzimi, il che da molti è negato (7), l'ossidazione dell'acido ascorbico può avvenire per opera di meccanismi aspecifici, per esempio, emocromogeni, rame (8).

2° Funzione attivante o inibente in molte reazioni enzimatiche, e in molti casi azione enzimatica vera e propria. La vitamina C è un'attivatore della papaina (9), della catepsina (10), dell'arginasi (11); possiede secondo EDLBACHER e ADERHALDEN (12) le proprietà di una aminoacido-ossido-desamidasi. Secondo ricerche più recenti agisce sull'istidina determinandone la scissione e la formazione di istamina (13). Paralizza la β -amilasi delle piante e l'amilasi del pancreas degli animali (14). Paralizza la β -fruttosidasi (15). Attiva la trombina influenzando quindi la coagulazione del sangue (16). Ha azione esterasica che viene esaltata in seguito a combinazione con clupeina (17); anzi secondo KRAUT (18) è un costituente della esterasi del fegato. E finalmente regola il normale metabolismo della tirosina (19) impedendo la formazione di acido omogentisinico, p-idrossifenil-piruvico, e p-idrossifenil-lattico che si ha in cavie alimentate con tirosina e tenute a dieta povera di vitamina C.

L'acido ascorbico agisce infine determinando un aumento di attività di diverse sostanze d'importanza fisiologica come l'adrenalina (20) e la colina (21).

Da quanto si è brevemente esposto, mi sembra che non possa essere messa in dubbio l'azione dell'acido ascorbico sul metabolismo, pur lasciando impregiudicata la questione se questa sostanza agisca direttamente come accettore intermedio di idrogeno nei processi di ossidazione o di deidrogenazione, o indirettamente modificando l'attività degli enzimi.

La *catalasi* sarebbe strettamente legata all'intensità respiratoria delle cellule e dei tessuti, giacchè questo enzima sarebbe presente in grande quantità in tutte le cellule che respirano, mentre mancherebbe completamente o quasi nelle anaerobie. In realtà questa regola ha numerose eccezioni in quanto vi sono cellule che respirano intensamente e non contengono quasi catalasi ad esempio, alcuni batteri (22). Anche negli organismi più elevati vi sono tessuti che hanno un'intensa attività respiratoria come i muscoli ed il cuore che sono poveri di catalasi, ed altri che hanno una respirazione più piccola come il sangue che ne sono ricchi.

Se però non vi è un rapporto diretto tra catalasi e processi ossidativi in generale, tale rapporto sembra esistere tra catalasi e un determinato tipo di ossidazione, la cosiddetta respirazione flavinica (23). Gli organi molto ricchi di catalasi, come il fegato e i reni, sono quelli nei quali esiste una più intensa respirazione flavinica. I tessuti poveri di catalasi, come i mu-

scoli ed il cervello, sono quelli invece nei quali il citocromo è molto sviluppato. Tali rapporti furono scoperti da LINA STERN molto anni addietro (24). Questa autrice dimostrò che non vi è nessun parallelismo tra respirazione vera e propria e catalasi, ma tale parallelismo esiste tra catalasi e respirazione accessoria.

Che la catalasi abbia poca importanza nella determinazione delle ossidazioni intracellulari, sarebbe dimostrato dal fatto che quest'enzima è incapace di attivare il perossido di idrogeno e non ha quindi la possibilità di determinare ossidazioni secondarie. In altre parole catalasi e perossido di idrogeno avrebbero pochissima attività ad ossidare qualsiasi substrato aggiunto. KEILIN e HARTREE (25) hanno potuto invece dimostrare che, in presenza del sistema xantinossidasi, la catalasi è capace di ossidare l'alcool ad acetaldeide. La funzione principale della catalasi sarebbe quindi nelle cellule animali una funzione perossidasiaca.

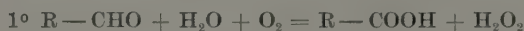
I risultati più importanti ottenuti da KEILIN e HARTREE sono i seguenti:

1° L'aggiunta di alcool a miscele di uricasi e di acido urico, oppure di d-aminoacido-ossidasi e d-aminoacidi raddoppia la produzione di O_2 . Entrambi i preparati enzimatici contengono catalasi.

2° L'aggiunta di alcool al sistema xantinossidasi e ipoxantina non ha effetto; se si aggiunge un po' di catalasi purificata la produzione di O_2 è più che raddoppiata.

3° La catalasi non è capace di ossidare l'alcool in presenza di H_2O_2 , lo ossida invece in presenza di perossido di bario, di cerio e di idroperossido di etile. Queste sostanze, come i sistemi ossidasici, liberano gradualmente il perossido di idrogeno allo stato nascente. È logico perciò ammettere che la catalasi determini l'ossidazione dell'alcool ad acetaldeide per azione della H_2O_2 nascente.

KEILIN e HARTREE hanno così dimostrato una interessante ossidazione ciclica. Nel sistema aldeidossidasi + alcool + catalasi + aldeide, l'aldeide è ossidata ad acido con formazione di H_2O_2 e questa ossida l'alcool ad aldeide che a sua volta viene ossidata ad acido secondo le reazioni:



Così l'ossidazione secondaria fornisce il substrato per l'ossidazione primaria.

Questa funzione della catalasi già sostenuta in tempi antichi da SCHOENBEIN (26) apre degli orizzonti nuovi sulla importanza fisiologica di questo enzima, che per essere diffuso in quantità più o meno grande in tutte le cellule ed in tutti i tessuti, non può non avere una funzione biologica ben definita.

Sicchè allo stato attuale delle nostre conoscenze si può ritenere, che pur non conoscendo ancora perfettamente in quale maniera l'acido ascorbico e la catalasi intervengono nei processi metabolici endocellulari, non si può negare che questo intervento esista.

È perciò utile lo studio del comportamento della catalasi e dell'acido ascorbico in tutte quelle condizioni in cui si hanno alterazioni dei processi metabolici, e in particolare nello scorbutto, onde assodare se alla diminuita quantità di acido ascorbico corrisponda o meno una diminuzione dell'attività catalasica.

RICERCHE ESEGUITE.

Nel lungo periodo di permanenza in Africa ho avuto occasione di osservare alcuni casi di scorbutto umano e di studiarli. La diagnosi clinica era stata confermata dal prof. CASTELLANI. Le tipiche emorragie gengivali, le petecchie, i disturbi di permeabilità capillare e più che tutto l'effetto della somministrazione di acido ascorbico non lasciavano alcun dubbio. Gli ammalati furono seguiti per un tempo abbastanza lungo dal giorno del loro ricovero in ospedale fino a che furono dimessi guariti. Per tutto il periodo a giorni alterni si determinò l'attività catalasica del sangue e contemporaneamente l'acido ascorbico.

L'attività catalasica era determinata col metodo di VON EULER secondo gli accorgimenti da me descritti in altra nota (27): cc. 1 di sangue in cui era stata fatta la conta dei globuli rossi, veniva portato a cc. 250 con acqua distillata bollita. Di questa soluzione si prendeva cc. 1 che si portava a cc. 50 con soluzione di H_2O_2 n/100 in puffer di fosfati n/150 a pH 6,8. Dalla soluzione, tenuta a 0° in termostato a ghiaccio, si prelevavano campioni di cc. 5 al tempo 0'-3'-6'-9' e si portavano in beutline contenenti cc. 10 di H_2SO_4 n. Si titolava con permanganato n. 0,005 e si calcolava la velocità di reazione per mezzo della nota formula: $K = \frac{1}{T} \log \frac{\Lambda}{\Lambda - X}$.

L'acido ascorbico era determinato con reattivo di TILLMANNS n/1000, secondo la tecnica di FUJITA (28).

Nella seguente tabella vengono riportati i valori di K e dell'acido ascorbico espressi, questi ultimi, in mg. %.

Si osserva che con la somministrazione di cebion eseguita giornalmente per via endovenosa in dose di mg. 100 aumenta il contenuto in vitamina C nel sangue, e parallelamente l'attività catalasica.

Interessante è il comportamento del paziente n. 4. In questo non vi era all'inizio della cura una netta diminuzione della vitamina C nel sangue, pure essendovi segni evidenti di lesioni scorbutiche, tuttavia l'indice catalasico era già evidentemente abbassato.

TABELLA I.

Giorni dall'inizio dell'esperienza	Paz. I			Paz. II			Paz. III			Paz. IV		
	K \times 100	ac. asc. mg o/o	entr. milioni	K \times 100	ac. asc. mg o/o	entr. milioni	K \times 100	ac. asc. mg o/o	entr. milioni	K \times 100	ac. asc. mg o/o	entr. milioni
1°	4	0,4	5,1	3,8	0,25	4,8	4	0,3	4,7	4	0,6	4,8
3°	3,8	—		3,9	0,3		3,9	0,5		4	0,5	
5° (si inizia la somministrazione di vitamina C)	5,1	0,8	5,1	5	0,5	4,8	4,8	0,9	4,8	5,1	0,7	4,9
7°	5,3	0,7		5,2	0,7		5	0,9		5,2	0,9	
9°	5,2	1,1		5,3			5,3			5,2		
10°	5,2	0,7		5,3			5,4	1,2		5,2	0,7	
15°	5,2			5,3	0,7		5,3			5,3		

Nella tabella II vengono riportati i valori di attività catalasica in individui normali prima e dopo somministrazione di cebion. In questi individui la somministrazione di vitamina produce soltanto effetti insignificanti sulla catalasi ematica. Noi non possiamo perciò confermare i dati di JUSATZ.

TABELLA II.

Giorni dall'inizio dell'esperienza	K × 100				
	Paz. n. 1	Paz. n. 2	Paz. n. 3	Paz. n. 4	Paz. n. 5
1°	5	4,9	4,85	5	4,9
3°	4,9	4,8	4,9	5	4,8
5° (vit. C)	5,1	4,91	5,1	5,1	5,2
7°	5,2	5	5,2	5,2	5,1
10°	5,2	5,1	5,1	5,2	5,1

Nota: Al giorno 5° dell'esperienza si è iniziata la somministrazione di Cebion, che è stata eseguita giornalmente fino alla fine dell'esperienza in dose di mg. 100.

In altri quattro individui che non presentavano lesioni di scorbutico, ma soli disturbi gastro intestinali e senso di grave malessere e che da vari mesi si trovavano nel deserto in condizioni di carenza alimentare ho determinato l'attività catalasica. Anche in questi vi era un'evidente diminuzione della catalasi ed un ritorno alla norma in seguito a somministrazione di vitamina C.

TABELLA III.

giorni dall'inizio dell'esperienza	K × 100			
	Paz. n. 1	Paz. n. 2	Paz. n. 3	Paz. n. 4
1°	3,5	3,8	3,7	3,9
3°	3,8	3,8	3,5	3,9
5° (vit. C)	5,1	4,2	4,8	4,5
7°	5,4	4,8	5,2	5,2
10°	5,5	4,8	5,4	5,2
15°	5,5	5	5,2	5,2

Nota: Al giorno 5° dell'esperienza si è iniziata la somministrazione di Cebion, che è stata eseguita giornalmente fino alla fine dell'esperienza in dose di mg. 100.

DISCUSSIONE.

Dall'esame delle tabelle si osserva che negli individui in stato di scorbuti i valori di K sono piuttosto bassi ed aumentano in seguito a somministrazione per via endovenosa di vitamina C, tendendo a raggiungere in tutti gli individui esaminati un valore costante.

Si suole abitualmente sostenere che i valori di attività catalasica del sangue presentano grandi oscillazioni da individuo a individuo ed anche nello stesso individuo (29). In realtà a me pare che queste variazioni dipendano dal fatto che i metodi usati finora per la determinazione dell'attività catalasica sono tutti suscettibili di critica. Le determinazioni più antiche sono state eseguite prendendo per unità di misura il cosiddetto numero di di catalasi o l'indice di catalasi che è dato dall'espressione:

$$\frac{\text{numero di catalasi}}{\text{milioni di corpuscoli rossi}}$$

Come nota EULER (30) tale unità di misura non è razionale, giacché non si tiene conto della durata dell'azione enzimatica nè della temperatura. Si spiegano così i dati così contraddittori esistenti in natura. Ad esempio, JOLLES trova nell'uomo valori del numero di catalasi variabili da 23 a 27,5; BACH valori da 14 a 18. Per questo motivo buona parte dei numerosi lavori eseguiti per mettere in evidenza variazioni del contenuto del sangue in catalasi in diverse condizioni fisiologiche e patologiche hanno poco valore. Sembra tuttavia che l'indice di catalasi sia più elevato nei giovani che nei vecchi, più elevato durante il lavoro muscolare, in alta montagna e in generale nelle zone fredde e ventose, più basso nelle zone calde. Per quanto riguarda le variazioni patologiche esse sono state studiate principalmente nelle anemie e nelle malattie endocrine e i risultati sono molto discutibili e contraddittori.

Le poche determinazioni da me eseguite sembrerebbero dimostrare che in individui della stessa età e tenuti nelle stesse condizioni, i valori di K, espressione diretta dell'attività catalasica, tendono ad essere relativamente costanti.

Dall'esame della tabella III si osserva inoltre che individui in stato di carenza alimentare nei quali non vi sono ancora segni evidenti di scorbuti, vi è un evidente abbassamento dell'attività catalasica che ritorna alla norma in seguito a somministrazione di vitamina C.

Questa osservazione sembrerebbe far pensare che anche quando non esistono segni evidenti di scorbuti, l'indice catalasico si abbassa quando vi sia nell'organismo un deficit di acido ascorbico.

Altre determinazioni possono chiarire l'interessante problema giacchè la determinazione del contenuto in catalasi e il suo comportamento in seguito a somministrazione di vitamina C., potrebbe essere un metodo semplice e rigoroso per svelare un ipoavitaminosi C.

I metodi per poter mettere in evidenza questi stati lievi di ipoavitaminosi possono essere così riassunti:

1° Elevata predisposizione all'emorragia e prove basate sull'impermeabilità dell'endotelio dei capillari. Osservazioni recenti (31) hanno dimostrato che la diminuzione della resistenza dei capillari non può essere considerata come patognomonica per l'esistenza di un'ipoavitaminosi C, giacchè la difesa dei capillari viene garantita anche da altri fattori che malgrado la diminuzione della quantità di vitamina C contenuta nel sangue mantengono una sufficiente resistenza dei capillari stessi.

2° Contenuto in vitamina C delle urine e del sangue. Per quanto riguarda l'urina il valore dell'eliminazione totale giornaliera dell'acido ascorbico nell'uomo è molto variabile (32). Per quanto riguarda il sangue la quantità di acido ascorbico in esso contenuta è stata trovata diversamente elevata secondo i metodi usati. Ad esempio, secondo GABBE (33) il contenuto normale del sangue oscilla tra mg. 0,14 e 1,21 %; TAYLOR, CHASE e FOULKNER (34) trovano nell'uomo normale valori variabili da mg. 0,83 a 2,43 %; WAHREN (35) valori da 0,04 a 0,48 in media mg. 0,22.

3° Prove di carico. — Questo controllo del bilancio dell'acido ascorbico per aggiunta di una quantità supplementare di vitamina C, quale mezzo di diagnosi di un'ipoavitaminosi C ha fatto già sorgere una letteratura internazionale molto vasta, che non ha presentato tuttavia risultati concordi, giacchè anche in condizioni normali l'organismo è più o meno saturo di vitamina C. Buoni risultati pare che si abbiano col metodo di HARRIS (36), che però non è esente da difficoltà pratiche.

4° Metodo di ROTTER. — Iniettando piccole quantità di una soluzione sterile n. 1/1000 di 2-6 diclorofenoloindofenolo sotto cute, la decolorazione della sostanza colorante avviene più rapidamente nell'individuo sano che in quello affetto da scorbuti. Un tempo di decolorazioni da 5 a 10' indica un contenuto normale di vitamina C, un tempo superiore a 10' deficienza di questa vitamina. Tale metodo sembra abbia dato risultati soddisfacenti.

Da quanto si è brevemente esposto risulta che dei metodi che sono stati finora proposti per poter svelare un'ipoavitaminosi C alcuni non sono specifici, altri non sono esenti da difficoltà pratiche.

La determinazione dell'attività catalasica del sangue, determinazione semplice e nel contempo rigorosa e il comportamento di essa in seguito a somministrazione di acido ascorbico, potrebbe essere un mezzo indiretto per svelare forme lievi di ipoavitaminosi C. Altre esperienze sono attualmente in corso.

BIBLIOGRAFIA

- (1) TRIA, « *Ricerca Scientifica* », XI, n. 5 (1940).
- (2) JUSATZ, « *Klin. W.* », 20, 727 (1934).
- (3) TÖRÖK e NEUFELD, « *Klin. W.* », 1935, pag. 1509.
- (4) SCOZ, CATTANEO e GARRIELLI, « *Enzymologia* », 3, 29, 1937.
- (5) QUASTEL e WHEATLEY, « *J. biol. Chem.* », 119, 511, 1937.
- (6) OPPENHEIMER e STERN, « *Biological Oxidation* — Junk, den Haag », 1939, pag. 267.
- (7) STOTZ, HARRER e KING, « *J. biol. chem.* », 119, 511 (1937).
- (8) BARRON, DEMEIO e KLEMPERER, « *J. Biol. chem.* », 112, 625 (1936).
- (9) MASCHMANN e HELMERT, « *Z. physiol. chem.* », 223, 127 (1934).
- (10) EULER, KARRER e ZEHENDER, « *Helv. Chim. Acta* », 17, 157 (1934).
- (11) EDLBACHER e LEUTHARDT, « *Klin. W.* », 1933, pag. 1483.
- (12) EDLBACHER e ABDERHALDEN cit. da STEPP KÜHNAU e SCHRÖDER, *Die Vitamine und ihre Klinische Anwendung*, 1941, pag. 179.
- (13) HOLTZ e KOCH, « *Klin. W.* », 1942, pag. 169.
- (14) HANES, « *Biochem. J.* », 29, 2588 (1935).
- (15) WEIDENHAGEN e PAO-CHUNG-LU, cit., in *Nord e Weidenhagen Handb. der Enzymol.*, vol. I, pag. 162.
- (16) KÜHNAU, cit., in STEPP, KÜHNAU e SCHRÖDER (loc. cit.).
- (17) FELIX e MAGER, « *Z. physiol. chem.* », 249, 126 (1937).
- (18) KRAÛT e PANTSCHENKO-JUREWICZ, « *Bioch. Z.* », 275, 114 (1935).
- (19) SEALOCH e SILBERSTEIN, « *J. biol. chem.* », 135, 251 (1940).
- (20) KREITMAIR, « *Arch. exp. Pathol. u. Pharm.* », 1934, pag. 176.
- (21) STEPP, (loc. cit.) pag. 180.
- (22) FUJITA e KODAMA, « *Biochem. Z.* », 232, 20, 1931.
- (23) NORD-WEIDENHAGEN, « *Handb. d. Enzymol.* », vol. II, pag. 767.
- (24) STERN, « *Biochem. Z.* », 182, 139 (1927).
- (25) KEILIN e HARTREE, « *Proc. Roy. Soc. B.* », 119, 141, 1936.
- (26) SCHÖNBEIN cit. da OPPENHEIMER, *Die Fermente u. ihre Wirkungen*. 1926, pag. 768.
- (27) TRIA, « *Rend. R. Acc. d'Italia* », 1940, ser. VII, vol. I, 285.
- (28) FUJITA, IWAKAKE, MIGATA, « *Bioch. Zeit.* », 277, 296, 1935.
- (29) EULER, « *Chemie der Enzyme* », II, t. 3^a-A, pag. 6.
- (30) EULER, loc. cit.
- (31) STEPP e KÜHNAU, loc. cit., pag. 181.
- (32) JOHNSON e ZILVA, « *Biochem. J.* », 2^a, 1393 (1934).
- (33) GABBE, « *Klin. W.* », 13, 1389 (1934).
- (34) TAYLOR, CHASE e FAULKNER, « *Biochem. J.* », 30, 1119 (1936).
- (35) WAHREN, « *Klin. W.* », 16, 1496 (1937).
- (36) HARRIS e LEONG, « *Lancet* », 230, 886 (1936).
- (37) ROTTER, « *Wien. Klin. W.* », 51, 205 (1938).

Fisiologia (Fisiologia generale). — *Preparazione di una proteina allo stato cristallino dai semi di « Canavalia ensiformis »* ⁽¹⁾. Nota di EUSEBIO TRIA e GIUSEPPE FABRIANI, presentata ⁽²⁾ da SABATO VISCO, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Molte proteine vegetali sono state finora ottenute allo stato cristallino. La cristallizzazione può essere eseguita in vari modi. Alcune globuline sono precipitate per mezzo della dialisi in cristalli ben evidenti: così l'edestina dalla *cannabis sativa*, l'excelsina dalla noce del Brasile (*Bertholletia excelsa*) e le proteine della *Cucurbita maxima*, del lino e del ricino.

Altre proteine possono essere ottenute in cristalli diluendo le loro soluzioni in cloruro di sodio con acqua riscaldata a 50–60°C fino a che si forma una lieve torbidità e facendo raffreddare lentamente la soluzione.

Altre proteine cristallizzano solo in seguito all'aggiunta di notevoli quantità di sali ed in particolare solfato di magnesio e di ammonio. Tali sali avrebbero un'azione disidratante, in altri termini l'acqua avrebbe più tendenza ad associarsi con essi, anzichè con la molecola proteica.

Altre proteine infine esigono per la loro cristallizzazione l'aggiunta di alcool o di altri liquidi organici, aggiunta che avrebbe lo scopo di diminuire la solubilità della proteina stessa.

La farina dei semi di *canavalia ensiformis*, leguminosa molto simile al fagiolo, è una sorgente molto ricca di proteine ottenibili allo stato cristallino. SUMNER ⁽³⁾ intraprese nel 1917 l'estrazione dell'ureasi da essa e nel 1926 poté annunziare di averla ottenuta allo stato cristallino. Nel frattempo isolò dalla stessa farina altre tre globuline ⁽⁴⁾ a cui diede il nome di concavalina A, concavalina B e canavalina. Particolarmente importante

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia generale della R. Università di Roma.

⁽²⁾ Nell'Adunanza del 5 giugno 1942–XX.

⁽³⁾ SUMNER, « J. biol. Chem. », 69, 435 (1926).

⁽⁴⁾ SUMNER e HOWELL, « Science », 82, 65 (1935); « J. biol. Chem. », 113, 607 (1936).

è la concavalina A, che è l'unica emoagglutinina finora ottenuta allo stato puro.

Delle quattro proteine ottenute da SUMNER allo stato cristallino dalla *canavalina ensiformis*, si prepara prima di tutto l'ureasi, trattando gr. 100 di farina con cc 500 di soluzione di acetone al 32 % in acqua bidistillata. Si filtra e si fa raffreddare lentamente in ghiacciaia. Si ottengono così i cristalli di ureasi i quali sono solubili in acqua e possono essere ricristallizzati dalla soluzione acquosa con l'aggiunta di piccole quantità di acetone e di fosfati.

Dal residuo della farina che si ha dopo allontanamento dell'ureasi si preparano le altre tre globuline.

La concavalina A si ottiene estraendo la farina con una soluzione al 5 % di cloruro di sodio contenente l'1 % di soluzione tampone neutra di fosfati al 9,6 % e dializzando l'estratto. I cristalli sono solubili in soluzione satura di cloruro di sodio e ricristallizzano per mezzo della dialisi.

La concavalina B e la canavalina si ottengono dallo stesso estratto nel quale è stata precipitata la concavalina A per aggiunta di acido acetico fino a pH 5,1. Con ciò precipitano ambedue le proteine. Si neutralizza con soda; in tal modo la canavalina si scioglie e rimane un precipitato di concavalina B, che viene raccolto, disciolto in cloruro di sodio al 10 % e cristallizzato per dialisi. La canavalina poi precipita acidificando di nuovo con acido acetico e cristallizza con aggiunta di tripsina. La concavalina B è solubile in cloruro di sodio al 10 % e la canavalina in acqua distillata acidificata a pH 6,5.

Per la preparazione di queste globuline occorre quindi un trattamento piuttosto complicato che comprende estrazioni con solventi organici, con soluzioni saline, dialisi ed opportune cure per ottenere un determinato pH.

Avendo avuto occasione di lavorare da lungo tempo con la farina di *canavalina*, abbiamo potuto osservare che forme cristalline si ottengono con un procedimento molto più semplice. L'estratto acquoso di farina di *canavalina*, fatto raffreddare lentamente, lascia depositare dei fini cristalli che danno tutte le reazioni delle proteine. Sembrandoci la questione di notevole interesse per il fatto che per la prima volta si è potuto cristallizzare una proteina vegetale senza ricorrere all'intervento di sali o di liquidi organici, crediamo opportuno riportare brevemente la tecnica seguita e le caratteristiche dei cristalli da noi ottenuti.

Semi di *canavalina ensiformis* provenienti dalla Somalia vengono macinati in un mulino a palle e setacciati finemente per allontanare il tegumento seminale. A 100 grammi di farina si aggiungono cc 200 di acqua distillata. Si agita bene e si filtra a temperatura ambiente. Dopo 2 ore e $\frac{1}{2}$ di filtrazione si ottengono cc 65 di estratto limpido e leggermente colorato in giallo, che viene portato in ghiacciaia a -1°C e ivi tenuto 24 ore. La soluzione si è notevolmente intorbidata e presenta una evidente tixot-

tropia. Si centrifuga e si osserva un precipitato costituito quasi esclusivamente di cristalli aciculari debolmente birifrangenti (fig. 1).

I cristalli sono insolubili in acqua, solubili invece in soluzioni concentrate di cloruro di sodio. In tali soluzioni le reazioni colorate delle proteine sono tutte bene evidenti. Esse inoltre coagulano al calore e con aggiunta di alcool.

Un tentativo di ricristallizzazione dalle soluzioni di cloruro di sodio non è per ora completamente riuscito. Se la soluzione in cloruro di sodio fatta a temperatura ambiente si fa raffreddare lentamente in ghiacciaia non si ha formazione di un precipitato cristallino. Ma se tale soluzione

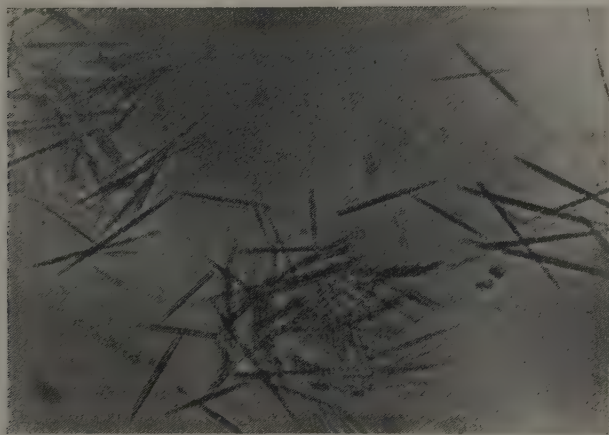


Fig. 1.

viene sottoposta alla dialisi in ghiacciaia, si ha dopo 24 ore la formazione di un precipitato amorfo nel quale è possibile distinguere alcune forme cristalline molto piccole e rare. Il problema è perciò ancora allo studio.

Difficilmente si può pensare che i cristalli di proteina così preparati possano identificarsi con l'ureasi ottenuta da SUMNER con una tecnica diversa, giacchè l'ureasi è solubile in acqua mentre i nostri cristalli sono solubili solamente in soluzioni concentrate di cloruro di sodio. Per eliminare però ogni dubbio si è eseguita la determinazione dell'attività ureasica della soluzione di cristalli col metodo dell'acrezione. Si è trovato che l'attività ureasica della soluzione di cristalli è la cinquantesima parte circa di quella dell'estratto acquoso, da cui i cristalli sono stati preparati. In un esperimento l'attività ureasica dell'estratto acquoso è di 1662 unità ureasiche e da questo si ottengono dei cristalli, la cui attività è di solo 36 unità, mentre nell'estratto dal quale si sono allontanati i cristalli per cen-

trifugazione l'attività ureasica rimane di 1320 unità. Tentativi di preparare da questo estratto ureasi allo stato cristallino con l'aggiunta di acetone non sono riusciti.

Concludendo, si è potuto preparare con un metodo semplice dai semi di *Canavalia ensiformis* una proteina allo stato cristallino, che è diversa dall'ureasi. Per la prima volta si è potuto ottenere allo stato cristallino una proteina vegetale senza ricorrere all'intervento di sali o di liquidi organici. Ulteriori ricerche permetteranno di chiarire se la proteina da noi preparata si debba identificare o meno con una delle tre globuline cristallizzabili presenti nei semi di *Canavalia ensiformis*.

Patologia. — *È la sindrome da alimentazione maidica nella cavia legata alla carenza di un nuovo fattore vitaminico?* ⁽¹⁾.
Nota di GIUSEPPE SOLARINO e GIOVANNI GIORGIO, presentata ⁽²⁾ da CARMELO CIACCIO, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

In una precedente Nota ⁽³⁾ rendemmo conto dei risultati di ricerche eseguite allo scopo di indagare l'azione dell'acido nicotinico nel maidismo sperimentale della cavia.

In base ai risultati di tali ricerche concludemmo:

a) che la somministrazione di ac. nicotinico sia *per os* che per iniezione sottocutanea, anche se associata a lattoflavina, non riesce a modificare il decorso della sindrome provocata nella cavia mediante alimentazione maidica esclusiva pur integrata da caseina, sali, grassi e vitamine (A, D, B₁, C);

b) che per tali ragioni il maidismo sperimentale della cavia si differenzia nettamente dalla pellagra umana e dalle sindromi pellagrosimili di altri animali (cane, maiale).

Ad analoghi risultati è pervenuto successivamente BAVASTRELLI ⁽⁴⁾.

Prospettammo in tale occasione tre ipotesi in rapporto al determinismo di questa particolare sindrome:

1° che il maidismo sperimentale della cavia debba considerarsi come una intossicazione dovuta alla presenza nel mais di principi altamente tossici, almeno per questa specie animale;

2° che l'organismo della cavia sia incapace a differenza di quello umano e di altri animali (cane, maiale) di produrre la metilazione dell'ac. nicotinico somministrato a trigonellina (metil-betaina dell'ac. normo-metil-

⁽¹⁾ Ricerche eseguite nell'Istituto di Patologia generale della R. Università « Benito Mussolini » di Bari.

⁽²⁾ Nell'Adunanza del 5 giugno 1942-XX.

⁽³⁾ GIORGIO G. e SOLIMINI O., « Rend. della R. Accad. d'Italia », Classe di Sc. Fis. Matem. e Natur., 1940, ser. VII, vol. I, fasc. 12.

⁽⁴⁾ BAVASTRELLI A., « La Settimana Medica », 1940, vol. XXVIII (nuova serie), n. 32.

nicotinic), la quale, secondo recenti ricerche di KÜHNHAU⁽⁵⁾, sarebbe la vera vitamina antipellagrosa;

3° che la sindrome sia dovuta alla deficienza nella dieta adoperata di un fattore (importantissimo per la vita di questa specie animale) diverso da quello P. P., ma, come risulta dalle ben note ricerche di RONDONI⁽⁶⁾ contenuto come questo nell'estratto alcoolico di fegato di cavia normale nonchè nel cavolo fresco.

Pertanto, abbiamo eseguito le ricerche oggetto della presente Nota.

In un primo gruppo di esperienze abbiamo alimentato le cavia con farina di mais trattata con procedimenti diversi allo scopo di privarla del supposto principio tossico. Intravedendo una qualche analogia tra tale principio e le sostanze ad azione beri-berica (Orizotossine) estratte dal riso brillato con alcool assoluto - UHLMAN, TERU-UCHI, OHYAMA, NAKAMURA e WADA ed altri, ed in Italia da CUBONI, SCAGLIONI, SOLARINO⁽⁷⁾ - e con acqua acidulata TOCCO⁽⁸⁾, - abbiamo adottato per l'estrazione dal mais di un eventuale principio tossico gli stessi procedimenti usati per l'estrazione dell'orizotossina dal riso brillato.

La farina di mais, estratta coi vari procedimenti che saranno successivamente indicati, non venne però somministrata da sola agli animali in esperimento, ma utilizzata sempre per la preparazione della speciale dieta pellagrogena di GOLDBERGER - modificata da KOHEN ed ELVEHJEM⁽⁹⁾ - già usata nelle precedenti ricerche sul maidismo della cavia eseguite in questo Istituto⁽¹⁰⁾.

Essa risulta così costituita: farina di mais 72 %, caseina purificata (mediante lavaggio prolungato in acido acetico al 10 % e successiva estrazione con alcool a 95° caldo, più volte rinnovato) 18 %, olio di semi di cotone 5 %, olio di fegato di merluzzo 2 %, carbonato di calcio 1 %, cloruro di sodio 1 %, fosfato bibasico di calcio 1 %, ossido di ferro (Fe_2O_3) 0,08 %. Si ebbe cura di prepararla sempre facendo cuocere a fuoco lento, in tegame doppio per due ore, la farina di mais, la caseina e la miscela

⁽⁵⁾ KÜHNHAU J., « Kongressber d. XVI Internat. Physiologen-Kongress », Zurich, 14-19 agosto 1938, vol. 2, pag. 326.

⁽⁶⁾ RONDONI P., « Lo Sperimentale », 1915, vol. 69, pag. 723.

⁽⁷⁾ Per la bibliografia sull'argomento vedi: SOLARINO G., « Quaderni della Nutrizione », 1934-35, vol. I, n. 5-6.

⁽⁸⁾ TOCCO L., « Rass. di Terap. e Patol. Clin. », 1935, vol. 7, fasc. 9.

⁽⁹⁾ KOHEN ed ELVEHJEM, « Journ. Natur. », 1936, vol. XI, pag. 67; « Journ. Biol. Chem. », 1937, vol. 118, pag. 693.

⁽¹⁰⁾ GIORGIO G., « Arch. Ital. di Medic. Sperim. », 1939, vol. 4, pag. 529; SOLIMINI O., « Arch. Ital. di Medic. Sperim. », 1939, vol. 4, pag. 523; GIORGIO G. e SOLIMINI O., « Rendic. della R. Accad. d'Italia », Classe di Scienze Fisiche, Matem. e Natur., 1940, ser. VII, vol. I, fasc. 12.

salina con la quantità d'acqua necessaria per ottenere a cottura completa una polenta dura; gli olii venivano invece aggiunti sempre dopo cottura e raffreddamento.

Gli animali in esperimento, oltre alla dieta maidica (messa sempre a disposizione dell'animale in quantità superiore alla sua massima capacità di consumo giornaliero e giornalmente rinnovata) ricevevano sempre acqua di fonte in abbondanza; inoltre, generalmente al mattino, si aggiungeva ad una piccola quantità della polenta di ogni cavia 1 cc. *pro die* di una soluzione 1 % in acqua distillata di acido l ascorbico (CEBION MERCK), e nel pomeriggio consumata totalmente o quasi questa razione, si somministrava loro il resto di razione alimentare. Si credette anche opportuno somministrare agli animali in esperimento, per via sottocutanea ed a giorni alterni, centosessanta γ *pro capite* di aneurina (BETAXIN BAYER) nonostante la scarsa sensibilità della cavia alla carenza di vitamina B₁.

Tutte le esperienze furono eseguite nei mesi di marzo 1940-giugno 1941.

Anche in questa serie di esperimenti (come già nelle precedenti ricerche eseguite in questo Istituto) avemmo modo di osservare che alcuni degli animali dimostrano una certa ripugnanza, nei primi giorni di esperimento, verso il nuovo genere di alimentazione, ma finiscono poi con l'adattarsi all'inconsueto regime alimentare, consumandone quantità pressochè corrispondenti al fabbisogno giornaliero di cibo ordinario (crusca). Nonostante questo adattamento, gli animali presentano però una costante ⁽¹⁾ graduale diminuzione del peso corporeo e della temperatura rettale.

Particolare attenzione, durante il corso degli esperimenti, fu sempre rivolta alla comparsa delle manifestazioni caratteristiche: perdita della vivacità, arruffamento o caduta del pelo, turbe gastrointestinali, caduta del peso corporeo e nella fase finale dispnea, ipotermia, perdita del tono muscolare.

Per questa prima serie di indagini servirono complessivamente 11 cavie, così distribuite: in un primo lotto di due animali adoperammo per la preparazione della dieta di Goldberger, della farina di mais estratta per 24 h. a temp. ambiente con alcool a 95° e successivamente asciugata in stufa a 45° dopo decantazione dell'alcool; in un secondo lotto di 4 cavie fu utilizzata, invece, farina di mais estratta con alcool assoluto secondo la tecnica originale di TERU-UCHI e collabor. per l'estrazione dell'orizotossina; nel terzo di 3 cavie, farina di mais sottoposta dopo

(1) Tranne che negli esperimenti di alimentazione maidica e finocchio o alimentazione maidica e lievito di birra, come sarà riferito più oltre.

una prima estrazione con alcool assoluto, ad una seconda estrazione con etere solforico per 24 h. a temp. ambiente. Al quarto lotto, infine, composto di due cavie somministrammo farina di mais che aveva subito il trattamento con acqua acidulata secondo la tecnica adoperata da Tocco per l'estrazione dell'orizotossina ⁽¹²⁾.

In appendice a questo primo gruppo di esperienze, ed allo scopo di indagare se nel determinismo della sindrome da alimentazione maidica della cavia abbia qualche parte la presenza nel mais di pretese sostanze fluorescenti, capaci di diventare tossiche per fotosensibilizzazione, come aveva sostenuto il RAUBITSCHKE ⁽¹³⁾ abbiamo sottoposto ad alimentazione maidica un gruppo di 8 cavie mantenendole in camera oscura, completamente al riparo dalla luce solare per tutta la durata dell'esperimento. Anche questi animali però vennero a morte con la solita sintomatologia in un tempo variabile compreso tra 7 e 10 giorni.

In base a questi risultati possiamo concludere:

a) che, almeno con i procedimenti da noi adoperati, non è stato possibile estrarre dal mais il supposto principio tossico, il quale, non è sicuramente legato alla frazione solubile in alcool-etere e in acidi diluiti. Viene così escluso anche l'intervento, nel quadro maidico sperimentale della cavia, dell'azione tossica della zeina, la proteina alcool-solubile del mais, dimostrata da BAGLIONI ⁽¹⁴⁾ e da SZUMOWSKI ⁽¹⁵⁾;

b) che non ha alcuna influenza sul determinismo della sindrome maidica della cavia la presenza nel mais di eventuali sostanze fotosensibilizzabili, come avevano già rilevato RONDONI ⁽¹⁶⁾ e poi RÜHL ⁽¹⁷⁾.

Con una seconda serie di esperienze abbiamo voluto, poi, indagare se nel determinismo della morte delle cavie sottoposte ad alimentazione maidica abbia qualche peso la deficienza o addirittura il blocco della funzione surrenale, specie corticale. Lo facevano in special modo sospettare l'ipotonia muscolare e l'ipotermia che in questi animali si spinge fino agli estremi limiti compatibili con la vita. È da ricordare inoltre che in rapporto alla funzione midollare, il RONDONI (loco cit. al 6) aveva

⁽¹²⁾ Previo lavaggio con acqua di fonte la farina veniva estratta con acqua acidulata con acido cloridrico, la quale veniva rinnovata ogni 12 ore fino a che non risultasse negativa nel liquido di estrazione la reazione di Mayer per gli alcaloidi. Quindi lavaggio in acqua di fonte, ed asciuttamento in stufa a 45°.

⁽¹³⁾ RAUBITSCHKE G., « *Centralbl. f. Bakter. I Abt. Orig.* », 1910, vol. 57, n. 3.

⁽¹⁴⁾ BAGLIONI S., « *Atti R. Accad. dei Lincei* », 1908, vol. 17, fasc. 9 e « *Rendic. R. Accad. dei Lincei* », vol. 22, fasc. 2, pag. 721.

⁽¹⁵⁾ SZUMOWSKI, « *Zeitschr. f. physiol. Chem.* », 1902, vol. 36.

⁽¹⁶⁾ RONDONI P., « *Lo Sperimentale* », 1911, vol. 65, fasc. 3.

⁽¹⁷⁾ RÜHL, « *Dermatol. Wochenschr.* », 1915, vol. 60.

già potuto evidenziare, accanto ad una deficienza di adrenalina nelle surrenali di cavia alimentate a mais, l'influenza favorevole della sua somministrazione sulla durata della sindrome.

Abbiamo, pertanto, somministrato ad alcune cavia in esperimento, in coincidenza dello scoppio della sindrome, dell'ormone cortico-surrenale sintetico (CORTENIL BAYER). La dose somministrata fu di 6 mung. *pro die* per via sottocutanea, o di 2 mmg. per via endoperitoneale.

Dagli esperimenti eseguiti è risultato che la somministrazione di ormone corticale (CORTENIL BAYER) non si dimostra capace nè di modificare l'esito dello esperimento che conduce costantemente a morte gli animali con la solita sintomatologia, nè di prolungare il tempo di resistenza al trattamento maidico.

Alimentazione maidica + Trigonellina. — Dato il risultato nullo sul decorso della sindrome maidica della cavia, rilevato, con somministrazione di acido nicotinico, da uno di noi (GIORGIO) in collaborazione con SOLIMINI e confermato successivamente da BAVASTRELLI, sembrava logico non doversi escludere « a priori » la possibilità che l'organismo della cavia sia incapace, a differenza di quello umano e di altri animali (cane, maiale) a produrre la metilazione dell'acido nicotinico somministrato. È perciò che in sostituzione della trigonellina pura che non ci è stato possibile trovare in commercio, ci siamo serviti in questa nuova serie di esperimenti dei semi di *trigonella foenum graecum* che la contengono in notevole quantità e che abbiamo somministrato a cavia sottoposte alla solita dieta di Goldberger.

Dai risultati ottenuti si rileva che l'aggiunta di semi di trigonella (gr. 3-10 *pro die*) alla dieta maidica di Goldberger non ha esercitato alcuna influenza sull'esito dell'esperimento che condusse costantemente a morte gli animali con la solita sintomatologia. È da rilevare, invece, che in alcuni degli animali di questo gruppo si poté constatare un sensibile prolungamento del tempo di resistenza al trattamento maidico (fino al 24° giorno). Poichè, però, nello stesso gruppo accanto a questi animali ve ne furono altri che vennero a morte nel tempo medio dei controlli, a noi sembra di non poter sopravvalutare questi risultati, anche in considerazione delle notevoli variazioni individuali riscontrate, oltre che da noi anche da RONDONI (loc. cit., al (6)) e VOLPINO (18), nella durata della vita delle cavia sottoposte ad alimentazione maidica.

Concludendo, si può affermare in base a queste ricerche che la trigonellina data sotto forma di semi di trigonella, anche a dosi elevate, non esercita alcuna influenza degna di nota sul decorso della sindrome da alimentazione maidica nella cavia.

(18) VOLPINO G., « Gazz. Intern. di Medic. », 1914, n. 14; « Riv. d'Ig. e San. Pubbl. », 1914; « Pathologica », 1913, n. 105 e 1915, nn. 152-153.

Dati i risultati negativi di questi due primi gruppi di esperienze, abbiamo indirizzato le nostre indagini alla ricerca di sostanze ricche dell'eventuale fattore, diverso da quello antipellagroso (P P), la cui carenza nella dieta maidica (pur integrata da caseina, sali grassi e vitamine A, D, B₁ e C) è capace di provocare nella cavia la sindrome caratteristica.

Meritano a tal proposito particolare menzione le ormai classiche ricerche di RONDONI (loco cit. al 6): quest'A. avendo saggiato l'azione correttiva sulla dieta maidica della cavia di numerose sostanze (proteine diverse, peptone, aminoacidi, adrenalina, idrati di C., tiroidina, allantoina, crusca di mais, cavolo e fegato fresco di cavia normale ed i loro rispettivi estratti alcoolici) poté constatare che la somministrazione *per os* di cavolo, di fegato e dei loro estratti alcoolici, nonché dell'adrenalina è capace di prolungare sensibilmente la vita delle cavie a mais. È noto inoltre, in base alle ricerche di BEZZOLA⁽¹⁹⁾, AUDENINO⁽²⁰⁾ e VOLPINO (loco cit. al⁽¹⁸⁾) che con la somministrazione, anche in piccola quantità, di verdure fresche, si riesce a prolungare notevolmente la vita delle cavie sottoposte ad alimentazione maidica esclusiva. Recentemente poi BAVASTRELLI (loco cit. al 4) della scuola di VOLPINO ha constatato che l'aggiunta al mais di parti verdi di finocchio fresco, anche se bollite, influenza favorevolmente il decorso della sindrome maidica e lo stesso VOLPINO in collaborazione con BUDA⁽²¹⁾ ha evidenziato che è possibile neutralizzare gli effetti dell'alimentazione latteca esclusiva nella cavia mediante la somministrazione contemporanea agli animali di foglie di cavolo, purchè in grande copia.

È da notare, però, che anche nelle esperienze sopracitate di BAVASTRELLI l'azione correttiva del finocchio veniva ad esplicarsi con una dieta composta di 2/3 di verdura ed $\frac{1}{3}$ di farina di mais. Sarebbe stato invece opportuno, a nostro modo di vedere, dare la dimostrazione che l'influenza benefica esercitata dall'aggiunta di finocchio alla dieta maidica non sia dovuta solo alla sostituzione di una grande parte del mais con alte quantità di verdura. Abbiamo perciò creduto utile riprendere la questione, somministrando il correttivo in piccola quantità ed in aggiunta piuttosto che al solo mais (come hanno fatto gli AA. che ci hanno preceduti in queste ricerche) ad una dieta composta prevalentemente di mais ma integrata da proteine ad alto valore alimentare come la caseina, nonché da grassi, sali e vitamine allo scopo di ridurre al minimo le even-

(19) BEZZOLA, «Zeitschr. f. Hyg. u. Infektionskrankh.», 1907, vol. 56, pag. 75.

(20) AUDENINO, «Arch. di Antropol. Crimin.», 1912, fasc. 6 e 1913, fasc. 1.

(21) VOLPINO G. e BUDA L., «Arch. Ital. di Medie. Sperim.», 1939, vol. 4, pag. 769.

tuali interferenze dovute al *deficit* qualitativo alimentare consecutivo ad una alimentazione unilaterale ⁽²²⁾.

Alimentazione maidica + *Finocchio*. — Queste esperienze furono eseguite su due gruppi di cavie in tempi differenti e con diverse modalità. Il primo gruppo di osservazioni iniziate nell'ottobre 1940 comprendeva in tutto 9 animali provenienti tutti dall'allevamento dell'Istituto (gli animali sono allevati in gabbie ed alimentati con crusca di frumento e verdura diversa a seconda delle stagioni), divisi in 4 lotti. Tutte le cavie furono alimentate con la solita dieta maidica (di Goldberger) a parte della quale venivano aggiunti al mattino i diversi correttivi; nel resto della giornata veniva loro somministrata la razione residua. Gli animali venivano pesati a giorni alterni; quotidianamente poi veniva determinata la quantità di cibo consumata da ciascuno di essi. Fu inoltre misurata giornalmente, possibilmente alla stessa ora, la temperatura rettale. Il 1° lotto servi di controllo; le cavie del 2° lotto ricevettero fin dal primo giorno di esperimento 20 gr. di parti verdi di finocchio a testa *pro die* in aggiunta alla solita dieta maidica, mentre quelle del 3° lotto ricevettero la stessa quantità di finocchio allo scoppio della sindrome. Il 4° lotto composto di tre animali ricevette fin dal primo giorno di esperimento la solita dieta, allestita invece che con acqua di fonte con il liquido di estrazione delle parti verdi di finocchio in modo che ogni animale ricevesse quotidianamente l'estratto di gr. 20 di finocchio.

⁽²²⁾ Come è noto, VOLFINO ⁽¹⁸⁾ ha sostenuto che nella dieta maidica come anche in altre diete unilaterali, vengano a mancare determinati aminoacidi o gruppi di aminoacidi che egli chiama *ricettori*, necessari all'organismo della cavia per la sintesi delle sue proteine. Tale mancanza, a lungo andare finirebbe col sensibilizzare l'animale verso quel determinato tipo di dieta esclusiva donde la morte per *monofagismo*, come quest'A. ha chiamato questo complesso di fenomeni morbosi. Nelle verdure, invece, secondo VOLFINO sarebbero contenuti i gruppi molecolari mancanti nella dieta unilaterale esclusiva cosicché, ad esempio, il complesso mais — cavolo, risulterebbe contenere tutti gli aminoacidi necessari all'organismo della cavia per la sintesi proteica.

Nelle sue recenti ricerche sull'alimentazione latteca esclusiva nelle cavie, il VOLFINO (loc. cit., vol. 21) non riporta più tale azione correttiva delle verdure sulle diete unilaterali al loro contenuto in proteine, *ma ad un fattore X antimono-fagico*, come egli lo chiama, il quale permette senza danno per le cavie l'assunzione di un cibo che riesce nocivo se usato in modo esclusivo o prevalente.

Il RONDONI, invece, fin dalle sue ricerche del 1915 riportò l'azione correttiva del cavolo nel maidismo al suo contenuto in speciali principi paragonabili a quelli riscontrati da HOLST e FROELISCH (« Zeitschr. f. Hyg. u. Infektionskrankh. », 1913, vol. 72), nei vegetali freschi ed efficaci nello scorbutico da avena della cavia.

Dai risultati ottenuti da questo primo gruppo di esperienze emerge che mentre le due cavie del 1° lotto (controllo) vennero a morte in 10^a e 22^a giornata rispettivamente con la sindrome caratteristica, le due cavie del secondo lotto invece (a dieta maidica — finocchio fin dal 1° giorno di esperimento) si comportarono come animali perfettamente normali, conservando la primitiva vivacità e aumentando di peso: perciò in 139^a giornata di esperimento la cavia n. 2 fu sacrificata allo scopo di vedere quale fosse il quadro anatomo-patologico dopo 5 mesi circa di alimentazione maidica. L'autopsia di quest'animale non permise di rilevare alcuna delle lesioni caratteristiche della sindrome maidica sperimentale. Per vedere poi se per caso queste cavie non fossero per natura refrattarie ai danni dell'alimentazione maidica ⁽²³⁾ — il che avrebbe fatto cadere senz'altro il risultato delle nostre stesse ricerche dimostranti l'azione protettiva del finocchio nel maidismo — all'altra cavia dello stesso lotto, in 142^a giornata di esperimento, fu interrotta la somministrazione del finocchio mentre venne continuata la somministrazione della dieta di Goldberger. Il risultato fu il seguente: caduta del peso corporeo da gr. 520 a 370 e morte dopo 22 giorni di pura alimentazione maidica.

L'azione protettiva del finocchio, d'altra parte, veniva inequivocabilmente confermata dal risultato dell'esperimento eseguito sul 3° lotto di animali nel quale il finocchio fu somministrato a sindrome conclamata.

Le conclusioni che si deducono da questi risultati sono degne di rilievo: mediante la somministrazione di piccole quantità di finocchio si è riusciti non solo ad impedire la comparsa delle manifestazioni morbose, ma altresì a salvare una parte degli animali nei quali la sindrome era già conclamata. Inoltre l'influenza protettiva del finocchio si è mantenuta con la stessa intensità per 5 mesi circa di alimentazione maidica e si sarebbe potuta prolungare forse indefinitamente. Risulta, inoltre, dai protocolli che queste cavie hanno consumato una quantità all'incirca doppia di dieta maidica (fino a gr. 250 *pro die*) rispetto ai controlli e purtuttavia sono aumentate spiccatamente di peso.

I risultati ottenuti negli animali del 4° lotto, d'altra parte, permettono di attribuire anche all'estratto acquoso di finocchio riscaldato, una certa azione protettiva nel maidismo, indubbiamente non corrispondente a quella del finocchio intero, ma che appare pur sempre sensibile.

L'efficacia protettiva e curativa del finocchio verso la sindrome maidica sperimentale della cavia, messa in rilievo da questa prima serie di

(23) Nelle numerose esperienze eseguite in questo Istituto dal 1939 in poi ci è occorso invero di imbatterci solo una volta in casi di refrattarietà all'alimentazione con dieta di Goldberger: si trattava di una cavia sopravvissuta 100 giorni al trattamento maidico.

indagini, risulta confermata dai successivi esperimenti iniziati nel marzo 1941 e nei quali in sostituzione di acido *l* ascorbico fu somministrato agli animali in esperimento del succo di limone fresco, alla dose di 4 cc. al giorno *pro capite*, allo scopo di indagare un'eventuale azione favorevole della citrina sul decorso della sindrome. Risulta da essi che gli animali sottoposti a somministrazione di dieta maidica di Goldberger addizionata fin dal primo giorno di esperimento di piccole quantità di parti verdi di finocchio, pur resistendo a lungo al trattamento maidico, non presentano purtuttavia una sopravvivenza sempre illimitata ad esso, come sembrava doversi concludere in base ai primi esperimenti: infatti, mentre in quelle le cavia vennero a morte solo dopo la sospensione della somministrazione di finocchio, in queste nuove prove esse vennero a morte rispettivamente in 82^a ed 86^a giornata di trattamento maidico integrato da parti verdi di finocchio, pur senza presentare la sindrome caratteristica. Però è da rilevare che lo studio del quadro ematologico mise in rilievo in questi due animali, l'esistenza di una grave anemia iperercromica di tipo pernicioso che può, con ogni probabilità, aver costituito la causa determinante della morte. Queste osservazioni, messe in rapporto col quadro di lieve anemia secondaria riscontrato negli animali più a lungo sopravvissuti al trattamento maidico, ci inducono a ritenere che nel complesso alimentare dieta maidica di Goldberger + parti verdi di finocchio, manchi o sia deficiente il fattore regolatore della normale attività emopoietica midollare: gli animali a lungo sottoposti a tale trattamento, pertanto, pur senza presentare la sindrome caratteristica del quadro maidico sperimentale, possono venire a morte per la grave sindrome anemica che spesso ne deriva. Comunque sia, è certo che l'aggiunta di parti verdi di finocchio (anche se in piccole quantità) alla dieta maidica, vale ad evitare l'insorgenza della sindrome maidica sperimentale nella cavia ed a guarire, nella maggioranza dei casi, dalla sintomatologia caratteristica, anche se in fase avanzata, le cavia nelle quali viene purtuttavia continuata la somministrazione della dieta maidica.

Alimentazione maidica + lievito di birra. - Dato il risultato favorevole ottenuto sul decorso della sindrome da alimentazione maidica nella cavia mediante somministrazione di parti verdi di finocchio, ci siamo proposti di indagare se lo stesso principio attivo, preventivo e curativo della sindrome, fosse contenuto nel lievito di birra. A tale scopo abbiamo disposto in tal modo l'esperimento: ad un primo lotto di due cavia abbiamo somministrato fin dal primo giorno di alimentazione maidica una dose giornaliera di gr. 5 di lievito di birra granulare secco Merck; ad un secondo lotto di altre 2 cavia, invece, il lievito di birra fu somministrato allo scopo della sindrome caratteristica ed in dose doppia - gr. 10 *pro die* -.

Come animali di controllo furono utilizzate due cavia provenienti dallo stesso allevamento.

Dall'esame dei protocolli sperimentali risulta che il primo lotto di animali dimostrò un periodo di sopravvivenza all'alimentazione maidica di gran lunga superiore a quello degli animali di controllo venuti a morte rispettivamente in 10^a e 22^a giornata con la nota sindrome caratteristica. Entrambi gli animali di questo gruppo, infatti, vennero a morte in 62^o e 71^a giornata di trattamento maidico, pur senza presentare la sindrome caratteristica da alimentazione maidica, con un quadro di anemia di tipo pernicioso, per quanto meno spiccato dell'analogo quadro suaccennato, comparso nelle cavia ad alimentazione maidica e finocchio. Delle due cavia, poi, alle quali il lievito di birra fu somministrato allo scoppio della sindrome, una venne a morte in 102^a giornata di esperimento, l'altra in 38^a giornata solo due giorni dopo, cioè, la somministrazione del lievito di birra. Indubbiamente in quest'ultimo animale il lievito deve essere stato somministrato in fase morbosa troppo avanzata, quando cioè la sindrome non era più reversibile.

Da questi esperimenti è lecito desumere la presenza anche nel lievito di birra di un principio profilattico e curativo, attivo contro il maidismo sperimentale della cavia. Così fissata l'influenza favorevole della somministrazione di lievito di birra sul decorso del maidismo, ci siamo proposti di ricercare a quale frazione del lievito di birra fosse tale azione legata. Pertanto, abbiamo operato una prima divisione tra principi termostabili e termolabili del lievito, sottoponendolo alla temperatura di 140° per 2 ore in autoclave. Il lievito così autoclavato (successivamente asciugato in stufa) è stato somministrato, e fin dal primo giorno di esperimento, a due gruppi di cavia sottoposte a dieta maidica di Goldberger: il 1° gruppo di animali riceveva gr. 3 al giorno *pro capite* di lievito di birra autoclavato; il 2° gruppo gr. 5 *pro die*, sempre in aggiunta alla solita dieta maidica. Dai risultati ottenuti è emerso chiaramente che l'aggiunta di lievito di birra autoclavato alla dieta di Goldberger non influenza sensibilmente il decorso della sindrome da alimentazione maidica nella cavia. Da queste osservazioni risulta pertanto messo in rilievo che il principio del lievito di birra attivo nel maidismo viene distrutto dalla esposizione alla temperatura di 140° per due ore in autoclave.

Ed infatti, nessun'influenza correttiva o favorevole sul decorso della sindrome maidica sperimentale della cavia risulta essere esercitata dalla somministrazione di lattoflavina (come dimostrano le precedenti osservazioni eseguite in questo Istituto) o di adermina, ambedue appartenenti alla frazione termostabile del complesso B, anche se quest'ultima è associata alla vitamina K.

Appare pertanto verosimile attribuire l'azione profilattica e curativa della somministrazione di lievito di birra sulla sindrome maidica

sperimentale della cavia ad un fattore termolabile diverso da quello B₁, (costantemente somministrato in dosi sufficienti agli animali e fin dal 1° giorno di esperimento, nonostante la nota scarsa sensibilità della cavia alla carenza di tale fattore) e forse ancora sconosciuto. Questo nuovo probabile fattore vitaminico (corrispondente al fattore X antimonofagico di VOLPINO?) è inoltre largamente contenuto anche nelle verdure fresche (cavolo, finocchio) e nei rispettivi estratti: alcolico (come hanno già da tempo messo in rilievo le osservazioni di RONDONI, già citate al ⁽⁶⁾), ed acquoso, anche se portato all'ebollizione, come hanno dimostrato le personali osservazioni sovrariportate.

È necessario, però, far rilevare che il principio attivo presente nel lievito di birra non autoclavato e nelle parti verdi di finocchio o di cavolo non è il solo deficiente nella alimentazione maidica della cavia, poichè se è vero che la somministrazione di esso riesce ad impedire la comparsa della sindrome caratteristica da alimentazione maidica nella cavia ed a salvare gli animali già in fase morbosa conclamata, non è men vero che esso si dimostra incapace di preservare le cavie più a lungo mantenute a tale trattamento dall'insorgenza di un quadro anemico, talvolta di tipo pernicioso, che appare come l'ultima espressione delle lesioni provocate nella cavia dall'alimentazione maidica prolungata.

La genesi del maidismo sperimentale della cavia appare pertanto correlata alla deficienza nel mais di fattori vitaminici diversi da quelli finora conosciuti e che si dimostrano di peculiare importanza soprattutto per questa specie animale. Ci ripromettiamo perciò, di ritornare con ulteriori dati sulla questione, anche perchè essa potrebbe ingranarsi col problema di recente prospettato, in base a varie osservazioni cliniche, da parte di diversi AA. (tra i quali SEBREL e collaboratori ⁽²⁴⁾), R. W. VILTER, S. P. VILTER e SPIES ⁽²⁵⁾ che cioè la pellagra e le sindromi pellagroidi degli animali siano dovute non al solo *deficit* di vitamina PP, ma piuttosto a carenze vitaminiche multiple.

⁽²⁴⁾ SEBRELL ONSTOTT, FRASER e DAFT, « Read. before the Americ. Inst. of Nutrit », 1938.

⁽²⁵⁾ VILTER R. W., VILTER S. P. e SPIES, « Journ. Americ. Medic. Assoc. », 1939, vol. 112, pag. 420.

INDICI

INDICE PER AUTORI

A

- ABETTI G., Altezza della cromosfera nel 1941 e andamento del cielo solare, 654.
- AMERIO L., Una metrica per lo spazio delle funzioni misurabili, 343.
- Un preliminare teorema di Analisi per lo studio dei moti con resistenza passiva, 415.
- ANDREATTA C., Sulle rocce eruttive del gruppo Ortles-Cevedale. Nota preliminare, 289.
- APRILE G., Sull'introduzione delle « condizioni iniziali » nel calcolo operativo dei sistemi fisici retti da leggi lineari, 243.
- ARMELLINI G., Il problema ristretto lineare dei tre corpi, 15.
- Contributo alla Dinamica del Sistema Galattico, 73.
- Sopra l'età dei pianeti e sopra l'incremento dei parametri delle loro orbite, a causa del termine cosmogonico, 229.
- I problemi fondamentali della Cosmogonia e la legge di Newton nel caso di più paneti. Nota IX, 748.

B

- BACHILLER T. R., Sulle superficie del quarto ordine contenenti una conica, 556.
- BAGLIONI S., Topografia ed eccitabilità degli organi di senso dell'orecchio interno nell'uomo. Comunicazione, 395.
- BIANCHI E., Vedi CAGLIOTI U.

- BLANC G. A. e CORTESI C., Interpretazione geochimica delle formazioni quaternarie di Grotta Romanelli (Terra d'Otranto). III. — Le sostanze umiche fossili, 33.
- BOAGA G., Sulla variazione della pressione nell'interno della Terra, 532.
- Sulla variazione della pressione nell'interno della Terra con riferimento a variazione discontinua di densità, 619.
- BRUNELLI G., La siringe quale adattamento dell'organo di fonazione alla vita aerea, 683.
- BUZANO P., Sulle calotte del 2° ordine appartenenti a una data striscia, 485.

C

- CACCIOPPOLI R. e GHIZZETTI A., Ricerche asintotiche per una particolare equazione differenziale non lineare, 427.
- — Ricerche asintotiche per una classe di sistemi di equazioni differenziali ordinarie non lineari, 493.
- CAGLIOTI V., GIACOMELLO G. e BIANCHI E., L'analisi strutturale ed i legami chimici. Ricerche sui polimetastati: trimetafosfato di sodio, 761.
- CALAMAI G., Sulla stabilità delle soluzioni per l'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti periodici, 183.
- CALIGO D., Complementi alla valutazione asintotica delle funzioni di STURM-LIOUVILLE, 643.
- CASELLI P. e CIARANFI E., Micrometodo per la determinazione dell'acido

- acetico. III. Dosaggio dell'acido acetico in presenza di altri acidi grassi, 264.
- EDRANGOLO F., Sulle relazioni che intercorrono tra attivabilità da Mg^{++} della fosfatasi alcalina e concentrazione dell'enzima e del substrato, 99.
- CESARI L., Sulle superficie di area finita secondo Lebesgue, 350.
- CIECCHIA-RISPOLI G., *Migliorinia*, nuovo genere di Echinide dell'Eocene della Migiurtina, 305.
- CHERUBINO S., Funzioni intermedie e corrispondenze algebriche tra curve, 194.
- CIACCIO C., Contributo all'istochimica delle cellule cromaffini della midolla surrenale. Nota I, 626.
- CIARANFI E., Vedi CASELLI P.
- CIMINO M., Osservazioni meridiane di ascensioni rette di Marte, Giove, Saturno ed Urano nel 1941 e nel 1942, 535.
- CINQUINI-CIBRARIO M., Una proprietà degli integrali delle equazioni ellittico-paraboliche del secondo tipo misto, 502.
- CISOTTI U., Immagine geometrica di un tensore isotropo, 651.
- COCCONI G., I secondari dei mesotroni esaminati con la camera di Wilson, 663.
- COLACEVICH A., Determinazioni spettroscopiche della rotazione stellare, 83.
- CORTESI C., Vedi BLANC G. A.
- D**
- D'ALÒ F., Vedi FUSCO R.
- DI NAPOLI ALIATA E., Sulla presenza del genere *Hantkenina*, Cushman 1924, in Italia, 141.
- DI PISA S., Sulla geometria d'un ellissoide a tre assi poco differente da un ellissoide di rotazione, 460.
- F**
- FABRIANI G., Vedi TRIA E.
- FALINI F., Determinazioni sulla intensità di colorazione dei minerali opachi e delle leghe metalliche al microscopio a luce riflessa, 311.
- FEDELE M., Sulla innervazione del labirinto carotideo nei batraci, 159.
- FICHERA G., Un teorema generale sulla struttura delle funzioni iperarmoniche, 511.
- FRANZINI T. e RICCA V., Sulla produzione di Xenon da uranio bombardato con neutroni, 247.
- FUSCO R. e D'ALÒ F., Ricerche sui pernitrosoderivati. Nota III, 113.
- G**
- GENTILINI B., Efflusso sotto paratoie piane e a settore. Risultati teorici e sperimentali, 366.
- GHERARDELLI G., Sul sistema Jacobiano di un sistema lineare di curve sopra una superficie algebrica, 702.
- GHIZZETTI A., Vedi CACCIAPPOLI R.
- GIACOMELLO G., Vedi CAGLIOTI U.
- GIALANELLA L., Sulle relazioni tra luminosità e colore dei nuclei cometari. -- III. La cometa Van Gent-Bernasconi (1941 d), 597.
- GIAMBUSSO V., Linee geografiche su un ellissoide a tre assi, 441.
- GIORGI G., Formole per la derivazione a indice generalizzato, 693.
- GIORGIO G., Vedi SOLARINO G.
- GORTANI M., Gli « Strati di Graua », orizzonte mesocretaceo dell'Africa Orientale Italiana, 782.
- GRIOLI G., Sulle deformazioni elastiche dovute ad una coppia di braccio nullo, 93.
- GUARESCHI C. e STEFANELLI A., L'attività respiratoria della *Calliphora erythrocephala* durante il ciclo larvale e pupale, 464.
- I**
- LAMPARIELLO G., Generalizzazione del teorema di Jacobi della meccanica analitica ai sistemi anolonomi, 734.
- LANFRANCHI F., Azione dell'istozima sull'acido nicotinurico, 103.

LANFRANCHI F., Su alcuni nicotinil-aminotiazoli. — I. 2-nicotinilamino-4-metil-tiazolo e 2-nicotinilamino-4-fenil-tiazolo, 776.

LAURO C., Ricerche roentgenografiche sulla dawsonite. Primi risultati sperimentali, 146.

LOMBARDI D., Una nuova larva di Tricottero del lago Margherita, 688.

M

MACCAGNO A. M., Zoantari maestrichiani della Tripolitania, 786.

MAJORANA Q., Nuove ricerche di centrifugazione fotoelettrica, 86.

— Il problema delle cause del magnetismo terrestre. Comunicazione, 471.

MEMBRANI A., Equazioni lineari e omogenee alle differenze finite aventi soluzioni polinomiali, 563.

MANUNTA C., Sul metabolismo dei pigmenti carotenoidi nel bruco di cavolaia *Pieris brassicae* e nel suo endoparassita *Microgaster conglomeratus*, 151.

MARCONTONI A., Pesi e correlazioni per misure dirette condizionate, 23.

MINEO C., Superficie dotate di ∞^1 geodetiche che sono eliche su cilindri ortogonali a una direzione fissa, 175.

MONTANARO GALLITELLI E., Nuovo rapporto a conferma della miocenicità di un deposito costiero al Nord di Massaua, 387.

MORELLI C., Estensione alla quarta approssimazione della trigonometria dei piccoli triangoli curvilinei sopra una superficie qualunque, 608.

N

NACHEIN L., Un'estensione di un lemma di Dirichlet, 204.

P

PACILLI E., Vedi PEYRONEL G.

PASTORI M., Operatori differenziali di ordine superiore negli spazi di Riemann, 1.

PASTORI M., Sulle discontinuità dei potenziali poliarmonici, 741.

PELLOUX A., Vesuviana ed altri minerali del passo della Gava presso Voltri, 392.

PEYRONEL G. e PACILLI E., Contributo alla conoscenza del sistema Nichelio-Zolfo, 278.

PETRI L., Le malattie da virus delle piante. Comunicazione, 333.

PIROTTI M., Sul comportamento di alcune reazioni delle perossidasi nello sviluppo embrionale di *Petromyzon fluviatilis* e di *Bufo viridis*, 154.

POPOFF K., Sugli integrali di alcune equazioni differenziali considerate come funzioni dei parametri che vi figurano, per grandi valori dei parametri, 524.

R

RICCA V., Vedi FRANZINI T.

RIGGIO G., Vedi TORRIOLI M.

ROVERA L., L'ellissoide di velocità per il gruppo di stelle formanti « l'ammasso del Sole », 236.

S

SACCHETTI A., Variabilità e correlazione intra ed interrazziale. Nota preliminare, 537.

SACCO F., Distinzioni metaniche, 374.

SAMEC M., Defosforizzazione dell'amido di patate con la fosfatasi cerebrale, 128.

SCARPA O., Potenziali elettrochimici e effetto Volta. I calori di idratazione degli ioni. Nota VII. 252.

SERGI S., Sulla morfologia cerebrale del secondo paleantropo di Saccopastore. Nota preliminare, 670.

SEVERI F., Sul limite dell'intersezione di due curve variabili sopra una superficie, le quali tendano ad avere una parte comune, 410.

— Sulla irregolarità superficiale d'una varietà algebrica, 547.

SIGNORINI R., La serie stratigrafica cenozoica tra Pianoro, Loiano e Vado nel Bolognese, 132.

- SILVESTRI A., Sulla faunula a Foraminiferi della Laguna Veneta, 319.
- SOLARINO G. e GIORGIO G., È la sindrome da alimentazione maidica nella cavia legata alla carenza di un nuovo fattore vitaminico? 819.
- SOMIGLIANA C., Sulla ellitticità dell'equatore terrestre, 447.
- Complemento alla Nota: Sull'ellitticità dell'equatore terrestre, 755.
- STEFANELLI A., Il parassitismo dei *Nycteribiidae* (Dipt. Pup.) come risulta da infestazioni sperimentali di varie specie di Chiroteri, 323.
- La specificità parassitaria dei Nictettridi (*Diptera Pupipara*) indagata sperimentalmente, 630.
- Il parassitismo della *Nycterybosca africana*; Walk (fam. *Streblidae*, *Diptera Pupipara*), 636.
- Vedi GUARESCHI C.

T

- TOGNETTI M., Determinazione geometrico-funzionale del gruppo delle terne di punti doppi delle curve di un sistema lineare ∞^3 , ciascuna dotata di tre punti doppi, 711.
- TOLOTTI C., Alcune proprietà degli assi d'equilibrio di Möbius, 223.
- Sul calcolo delle vibrazioni trasversali di un'asta elastica soggetta a sforzo assiale, 572.

TORRIOLI M. e RIGGIO G., Reazione istioide indotta nell'embrione di pollo, entro la ottantaquattresima ora di incubazione dalla inoculazione precoce di materiale leucemico, 56.

TRIA E., Rame e catalasi, 801.

— Catalasi e scorbuto umano, 806.

— e FABRIANI G., Preparazione di una proteina allo stato cristallino dai semi di *Canavalia ensiformis*, 815.

V

VALLE P. E., Nuovo metodo per la determinazione delle coordinate ipocentrali di un terremoto lontano, 656.

VILLA M., Sull'annullarsi, in un punto, della matrice Jacobiana di m funzioni in n variabili, 209.

— Trasformazioni quadratiche osculatrici ad una corrispondenza puntuale fra piani proiettivi. — I. Le proiettività caratteristiche, 718.

Z

ZAPPA G., Sulle direttrici di grado virtuale minimo d'una rigata algebrica di genere $p > 0$, 725.

ZWIRNER G., Un criterio d'esistenza relativo a un problema al contorno per un'equazione differenziale ordinaria d'ordine n , 217.

INDICE PER MATERIE

A

Antropologia. — Variabilità e correlazione intra ed interrazziale. Nota preliminare. A. SACCHETTI, 537.

— Sulla morfologia cerebrale del secondo paleantropo di Saccopastore. Nota preliminare. S. SERGI, 670.

Astronomia. — Altezza della cromosfera nel 1941 e andamento del ciclo solare. G. ABETTI, 654.

— Il problema ristretto lineare dei tre corpi. G. ARMELLINI, 15.

— Contributo alla Dinamica del Sistema Galattico. G. ARMELLINI, 73.

— Sopra l'età dei pianeti e sopra l'incremento dei parametri delle loro orbite, a causa del termine cosmogonico. G. ARMELLINI, 229.

— I problemi fondamentali della Cosmogonia e la legge di Newton nel caso di più pianeti. Nota IX. G. ARMELLINI, 748.

— Osservazioni meridiane di ascensioni rette di Marte, Giove, Saturno ed Urano nel 1941 e nel 1942. M. CIMINO, 585.

— Determinazioni spettroscopiche della rotazione stellare. A. COLACEVICH, 83.

— Sulle relazioni tra luminosità e colore dei nuclei cometari. — III. La cometa Van Gent-Bernasconi (1941 d) L. GIALANELLA, 597.

— L'ellissoide di velocità per il gruppo di stelle formanti « l'ammasso del Sole ». L. ROVERA, 236.

B

Biologia. — Contributo all'istochimica delle cellule cromaffini della

midolla surrenale. Nota I. C. CIACCIO, 626.

Biologia. — Sulla innervazione del labirinto carotideo nei batraci. M. FEDELE, 159.

— Sul metabolismo dei pigmenti carotenoidi nel bruco di cavolaia *Pieris brassicae* e nel suo endoparassita *Microgaster conglomeratus*. C. MANUNTA, 151.

— Sul comportamento di alcune reazioni delle perossidasi nello sviluppo embrionale di *Petromyzon fluviatilis* e di *Bufo viridis*. M. PITOTTI, 154.

— Il parassitismo dei « Nycteribidae (Dipt. Pup.) » come risulta da infezioni sperimentali di varie specie di Chiropteri. A. STEFANELLI, 323.

— Reazione istioide indotta nell'embrione di pollo, entro la ottantaquattresima ora di incubazione dalla inoculazione precoce di materiale leucemico. M. TORRIOLI e G. RIGGIO, 56.

Botanica. — Le malattie da virus delle piante. Comunicazione. L. PETRI, 333.

C

Chimica. — L'analisi strutturale ed i legami chimici. Ricerche sui polimetafosfati: trimetafosfato di sodio. V. CAGLIOTI, G. GIACOMELLO e E. BIANCHI, 761.

— Micrometodo per la determinazione dell'acido acetico. — III. Dosaggio dell'acido acetico in presenza di altri acidi grassi. P. CASELLI e E. CIARRANFI, 264.

- Chimica.** — Sulle relazioni che intercorrono tra attività da Mg^{++} della fosfatasi alcalina e concentrazione dell'enzima e del substrato. F. CEDRANGOLO, 99.
- Ricerche sui pernitrosoderivati. Nota III. R. FUSCO e F. D'ALÒ, 113.
- Azione dell'istozima sull'acido nicotinurico. F. LANFRANCHI, 103.
- Su alcuni nicotinil-aminotiazoli. I. 2-Nicotinilamino-4-metil-tiazolo e 2-nicotinilamino-4-fenil-tiazolo. F. LANFRANCHI, 776.
- Contributo alla conoscenza del sistema Nichelio-Zolfo. G. PEYRONEL e E. PACILLI, 278.
- Defosforizzazione dell'amido di patate con la fosfatasi cerebrale. M. SAMMEC, 128.
- Potenziali elettrochimici e effetto Volta. I calori di idratazione degli ioni. Nota VII. O. SCARPA, 252.

F

- Fisica.** — Sull'introduzione delle « condizioni iniziali » nel calcolo operativo dei sistemi fisici retti da leggi lineari. G. APRILE, 243.
- I secondari dei mesotroni esaminati con la camera di Wilson. G. COCCONI, 663.
- Sulla produzione di Xenon da uranio bombardato con neutroni. T. FRANZINI e V. RICCA, 247.
- Sulle deformazioni elastiche dovute ad una coppia di braccio nullo. G. GRIOLI, 93.
- Nuove ricerche di centrifugazione fotoelettrica. Q. MAJORANA, 86.
- Il problema delle cause del magnetismo terrestre. Comunicazione. Q. MAJORANA, 471.
- Fisiologia.** — Topografia ed eccitabilità degli organi di senso dell'orecchio interno nell'uomo. Comunicazione. S. BAGLIONI, 395.
- La siringa quale adattamento dell'organo di fonazione alla vita aerea. G. BRUNELLI, 683.

- Fisiologia.** — Rame e catalasi. E. TRIA, 801.
- Catalasi e scorbutismo umano. E. TRIA, 806.
- Preparazione di una proteina allo stato cristallino dai semi di *canavalia ensiformis*. E. TRIA e G. FABRIANI, 815.

G

- Geochimica.** — Interpretazione geochimica delle formazioni quaternarie di Grotta Romanelli (Terra d'Otranto). III. — Le sostanze umiche fossili. G. A. BLANC e C. CORTESI, 33.
- Geodesia.** — Sulla geometria d'un ellissoide a tre assi poco differente da un ellissoide di rotazione. S. DI PISA, 460.
- Pesì e correlazioni per misure dirette condizionate. A. MARCANTONI, 23.
- Estensione alla quarta approssimazione della trigonometria dei piccoli triangoli curvilinei sopra una superficie qualunque. C. MORELLI, 608.
- Sulla ellitticità dell'equatore terrestre. C. SOMIGLIANA, 447.
- Complemento alla Nota: Sull'ellitticità dell'equatore terrestre. C. SOMIGLIANA, 755.
- Geofisica.** — Sulla variazione della pressione nell'interno della Terra. G. BOAGA, 532.
- Sulla variazione della pressione nell'interno della Terra con riferimento a variazione discontinua di densità. G. BOAGA, 619.
- Nuovo metodo per la determinazione delle coordinate ipocentrali di un terremoto lontano. P. E. VALLE, 656.
- Geologia.** — Sulle rocce eruttive del gruppo Ortles-Cevedale. Nota preliminare. C. ANDREATTA, 289.
- Gli « Strati di Graua », orizzonte mesocretaceo dell'Africa Orientale Italiana. M. GORTANI, 782.
- Distinzioni metaniche. F. SACCO, 374.

Geologia. — La serie stratigrafica cenozoica tra Pianoro, Loiano e Vado nel Bolognese. R. SIGNORINI, 132.

M

Matematica. — Una metriea per lo spazio delle funzioni misurabili. L. AMERIO, 343.

— Un preliminare teorema di Analisi per lo studio dei moti con resistenza passiva. L. AMERIO, 415.

— Sulle superficie del quarto ordine contenenti una conica. T. R. BACHILLER, 556.

— Sulle calotte del 2° ordine appartenenti a una data striscia. P. BUZANO, 485.

— Ricerche asintotiche per una particolare equazione differenziale non lineare. R. CACCIOPOLI e A. GHIZZETTI, 427.

— Ricerche asintotiche per una classe di sistemi di equazioni differenziali ordinarie non lineari. R. CACCIOPOLI e A. GHIZZETTI, 493.

— Sulla stabilità delle soluzioni per l'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti periodici. G. CALAMAI, 183.

— Complementi alla valutazione asintotica delle funzioni di Sturm-Liouville. D. CALIGO, 643.

— Sulle superficie di area finita secondo Lebesgue. L. CESARI, 350.

— Funzioni intermedie e corrispondenze algebriche tra curve. S. CHERUBINO, 194.

— Una proprietà degli integrali delle equazioni ellittico-paraboliche del secondo tipo misto. M. CINQUINI-CIBRARIO, 502.

— Un teorema generale sulla struttura delle funzioni iperarmoniche. G. FICHERA, 511.

— Sul sistema Jacobiano di un sistema lineare di curve sopra una superficie algebrica. G. GHERARDELLI, 702.

— Linee geografiche su un ellissoide a tre assi. V. GIAMBUSSO, 441.

Matematica. — Formole per la derivazione a indice generalizzato. G. GIORGI, 693.

— Equazioni lineari e omogenee alle differenze finite aventi soluzioni polinomiali. A. MAMBRIANI, 563.

— Superficie dotate di ∞^1 geodetiche che sono eliche su cilindri ortogonali a una direzione fissa. C. MINEO, 175.

— Un'estensione di un lemma di Dirichlet. L. NACHBIN, 204.

— Operatori differenziali di ordine superiore negli spazi di Riemann. M. PASTORI, 1.

— Sugli integrali di alcune equazioni differenziali considerate come funzioni dei parametri che vi figurano, per grandi valori dei parametri. K. POPOFF, 524.

— Sul limite dell'intersezione di due curve variabili sopra una superficie, le quali tendano ad avere una parte comune. F. SEVERI, 410.

— Sulla irregolarità superficiale d'una varietà algebrica. F. SEVERI, 547.

— Sul calcolo delle vibrazioni trasversali di un'asta elastica soggetta a sforzo assiale. C. TOLOTTI, 572.

— Determinazione geometrico-funzionale del gruppo delle terne di punti doppi delle curve di un sistema lineare ∞_3 , ciascuna dotata di tre punti doppi. M. TOGNETTI, 711.

— Sull'annullarsi, in un punto, della matrice Jacobiana di m funzioni in n variabili. M. VILLA, 209.

— Trasformazioni quadratiche osculatrici ad una corrispondenza puntuale fra piani proiettivi. — I. Le proiettività caratteristiche. M. VILLA, 718.

— Sulle direttrici di grado virtuale minimo d'una rigata algebrica di genere $p > 0$. G. ZAPPA, 725.

— Un criterio d'esistenza relativo a un problema al contorno per una equazione differenziale ordinaria di ordine n . G. ZWIRNER, 217.

Meccanica. — Immagine geometrica di un tensore isotropo. U. CISOTTI, 651.

Meccanica. — Efflusso sotto paratoie piane e a settore. Risultati teorici e sperimentali. B. GENTILINI, 366.

— Generalizzazione del teorema di Jacobi della meccanica analitica ai sistemi anolonomi. G. LAMPARIELLO, 734.

— Sulle discontinuità dei potenziali poliarmonici. M. PASTORI, 741.

— Alcune proprietà degli assi d'equilibrio di Möbius. C. TOLOTTI, 223.

Mineralogia. — Determinazioni sulla intensità di colorazione dei minerali opachi e delle leghe metalliche al microscopio a luce riflessa. F. FALINI, 311.

— Ricerche roentgenografiche sulla dawsonite. Primi risultati sperimentali. C. LAURO, 146.

— Vesuviana ed altri minerali del passo della Gava presso Voltri. A. PELLOUX, 392.

P

Paleontologia. — *Migliorinia*, nuovo genere di Echinide dell'Eocene della Migliurtina. G. CHECCHIA-RISPOLI, 305.

— Sulla presenza del genere Hantenina. Cushman 1924, in Italia. E. DI NAPOLI ALLIATA, 141.

Paleontologia. — Zoantari maestrichiani della Tripolitania. A. M. MACCAGNO, 786.

— Nuovo reperto a conferma della miocenicità di un deposito costiero al Nord di Massaua. E. MONTANARO GALLITELLI, 387.

Patologia. — È la sindrome da alimentazione maldica nella cavia legata alla carenza di un nuovo fattore vitaminico? G. SOLARINO e G. GIORGIO, 819.

Z

Zoologia. — L'attività respiratoria della *Calliphora erythrocephala* durante il ciclo larvale e pupale. C. GUARESCHI e A. STEFANELLI, 464.

— Una nuova larva di Tricottero del lago Margherita. D. LOMBARDI, 688.

— Sulla faunula a Foraminiferi della Laguna Veneta. A. SILVESTRI, 319.

— La specificità parassitaria dei Nicteribidi (*Diptera Pupipara*) indagata sperimentalmente. A. STEFANELLI, 630.

— Il parassitismo della *Nycteribosca africana*; Walk (fam. *Streblidae* *Diptera Pupipara*). A. STEFANELLI, 636.

INDICE DEL VOLUME

FASCICOLO 1.

GIUGNO 1941-XIX.

NOTE

M. PASTORI. — Operatori differenziali di ordine superiore negli spazi di Riemann (pres. da U. CISOTTI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia	Pag. 1
G. ARMELLINI. — Il problema ristretto lineare dei tre corpi	15
A. MARCANTONI. — Pesi e correlazioni per misure dirette condizionate (pres. da G. CASSINIS, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.	23
G. A. BLANC e C. CORTESI. — Interpretazione geochimica delle formazioni quaternarie di Grotta Romanelli (Terra d'Otranto). III. — Le sostanze umiche fossili	33
M. TORRIOLI e G. RIGGIO. — Reazione istioide indotta nell'embrione di pollo, entro la ottantaquattresima ora di incubazione dalla inoculazione precoce di materiale leucemico (pres. dall'Accademico P. RONDONI)	56

FASCICOLO 2-5.

LUGLIO-OTTOBRE 1941-XIX:

NOTE

G. ARMELLINI. — Contributo alla Dinamica del Sistema Galattico	73
A. COLACEVICH. — Determinazioni spettroscopiche della rotazione stellare (pres. da G. ABETTI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	83
Q. MAJORANA. — Nuove ricerche di centrifugazione fotoelettrica	86
G. GRIOLI. — Sulle deformazioni elastiche dovute ad una coppia di braccio nullo (pres. da A. SIGNORINI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	93
F. CEDRANGOLO. — Sulle relazioni che intercorrono tra attivabilità da Mg^{++} della fosfatasi alcalina e concentrazione dell'enzima e del substrato (pres. da G. QUAGLIARIELLO, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	99
F. LANFRANCHI. — Azione dell'istozima sull'acido nicotinurico (pres. da S. VISCO, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	103

R. FUSCO e F. D'ALDÒ. — Ricerche sui pernitrosoderivati. Nota III (pres. da G. BRUNI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	Pag. 113
M. SAMEC. — Defosforizzazione dell'amido di patate con la fosfatasi cerebrale (pres. da G. BARGELLINI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia).	128
R. SIGNORINI. — La serie stratigrafica cenozoica tra Pianoro, Loiano e Vado nel Bolognese (pres. da G. CHECCHIA RISPOLI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia).	132
E. DI NAPOLI ALIATA. — Sulla presenza del genere <i>Hantkenina</i> , Cushman 1924, in Italia (pres. dall'Accademico R. FABIANI)	141
C. LAURO. — Ricerche roentgenografiche sulla dawsonite. Primi risultati sperimentali (pres. dall'Ecc. F. MILLOSEVICH)	146
C. MANUNTA. — Sul metabolismo dei pigmenti carotenoidi nel bruco di cavolaia <i>Pieris brassicae</i> e nel suo endoparassita <i>Microgaster conglomeratus</i> (pres. dall'Accademico F. BOTTAZZI)	151
M. PITOTTI. — Sul comportamento di alcune reazioni delle perossidasi nello sviluppo embrionale di <i>Petromyzon fluviatilis</i> e di <i>Bufo viridis</i> (pres. dall'Accademico F. SILVESTRI)	154
M. FEDELE. — Sulla innervazione del labirinto carotideo nei batraci (pres. da U. PIERANTONI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	159

FASCICOLO 6.

NOVEMBRE 1941-XX.

NOTE

C. MINEO. — Superficie dotata di ∞^1 geodetiche che sono eliche su cilindri ortogonali a una direzione fissa.	175
G. CALAMAI. — Sulla stabilità delle soluzioni per l'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti periodici (pres. da E. BOMPIANI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	183
S. CHERUBINO. — Funzioni intermedie e corrispondenze algebriche tra curve (pres. dall'Accademico F. SEVERI)	194
L. NACHBIN. — Un'estensione di un lemma di Dirichlet (pres. dall'Accademico F. SEVERI).	204
M. VILLA. — Sull'annullarsi, in un punto, della matrice Jacobiana di m funzioni in n variabili (pres. da E. BOMPIANI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	209
G. ZWIRNER. — Un criterio d'esistenza relativo a un problema al contorno per un'equazione differenziale ordinaria d'ordine n (pres. dall'Accademico F. SEVERI).	217
C. TOLOTTI. — Alcune proprietà degli assi d'equilibrio di Möbius (pres. da A. SIGNORINI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	223
G. ARMELLINI. — Sopra l'età dei pianeti e sopra l'incremento dei parametri delle loro orbite, a causa del termine cosmogonico	229

L. ROVERA. — L'ellissoide di velocità per il gruppo di stelle formanti « l'ammasso del Sole » (pres. da G. ARMELLINI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	Pag. 236
G. APRILE. — Sull'introduzione delle « condizioni iniziali » nel calcolo operativo dei sistemi fisici retti da leggi lineari (pres. dall'Accademico G. GIORGI)	243
T. FRANZINI e V. RICCA. — Sulla produzione di Xenon da uranio bombardato con neutroni (pres. da L. TIERI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia).	247
O. SCARPA. — Potenziali elettrochimici e effetto Volta. I calori di idratazione degli ioni. Nota VII.	252
P. CASELLI e E. CIARANFI. — Micrometodo per la determinazione dell'acido acetico. — III. Dosaggio dell'acido acetico in presenza di altri acidi grassi (pres. da F. PENTIMALLI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	264
G. PEYRONEL e E. PACILLI. — Contributo alla conoscenza del sistema Nichelio-Zolfo (pres. da L. CAMBI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	278
C. ANDREATTA. — Sulle rocce eruttive del gruppo Ortles-Cevedale. Nota preliminare (pres. da M. GORTANI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	289
G. CHECCHIA-RISPOLI. — <i>Migliorinia</i> , nuovo genere di Echinide dell'Eocene della Migiurtina	305
F. FALINI. — Determinazioni sulla intensità di colorazione dei minerali opachi e delle leghe metalliche al microscopio a luce riflessa (pres. dall'Ecc.za. F. MILLOSEVICH)	311
A. SILVESTRI. — Sulla faunula a Foraminiferi della Laguna Veneta (pres. da G. BRUNELLI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	319
A. STEFANELLI. — Il parassitismo dei <i>Nycteribiidae</i> (<i>Diptera Pupipara</i>) come risulta da infestazioni sperimentali di varie specie di Chiropteri (pres. dall'Accademico F. SILVESTRI)	323

FASCICOLO 7.

DICEMBRE 1941-XX.

COMUNICAZIONI

L. PETRI. — Le malattie da virus delle piante	333
---	-----

NOTE

L. AMERIO. — Una metrica per lo spazio delle funzioni misurabili (pres. da M. PICONE, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	343
L. CESARI. — Sulle superficie di area finita secondo Lebesgue (pres. da L. TONELLI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	350
B. GENTILINI. — Efflusso sotto paratoie piane e a settore. Risultati teorici e sperimentali (pres. da U. CISOTTI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	366

F. SACCO. — Distinzioni metaniche	Pag. 374
E. MONTANARO GALLITELLI. — Nuovo reperto a conferma della miocenicità di un deposito costiero al Nord di Massana (pres. dall'Accademico R. FABIANI)	387
A. PELLOUX. — Vesuviana ed altri minerali del passo della Gava presso Voltri	392

FASCICOLO 8.

GENNAIO 1942-XX.

COMUNICAZIONI

S. BAGLIONI. — Topografia ed eccitabilità degli organi di senso dell'orecchio interno nell'uomo	395
---	-----

NOTE

F. SEVERI. — Sul limite dell'intersezione di due curve variabili sopra una superficie, le quali tendano ad avere una parte comune	410
L. AMERIO. — Un preliminare teorema di Analisi per lo studio dei moti con resistenza passiva (pres. da M. PICONE, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	415
R. CACCIOPOLI e A. GHIZZETTI. — Ricerche asintotiche per una particolare equazione differenziale non lineare (pres. da M. PICONE, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	427
V. GIAMBUSSO. — Linee geografiche su un ellissoide a tre assi (pres. da C. MINEO, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	441
C. SOMIGLIANA. — Sulla ellitticità dell'equatore terrestre	447
S. DI PISA. — Sulla geometria d'un ellissoide a tre assi poco differente da un ellissoide di rotazione (pres. da C. MINEO, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	460
C. GUARESCHI e A. STEFANELLI. — L'attività respiratoria della <i>Calliphora erythrocephala</i> durante il ciclo larvale e pupale (pres. dall'Accademico F. SILVESTRI)	464

FASCICOLO 9.

FEBBRAIO 1942 XX.

COMUNICAZIONI

Q. MAJORANA. — Il problema delle cause del magnetismo terrestre . . .	471
---	-----

NOTE

P. BUZANO. — Sulle calotte del 2° ordine appartenenti a una data striscia (pres. da E. BOMPIANI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia) . . .	485
--	-----

R. CACCIOPOLI e A. GHIZZETTI. — Ricerche asintotiche per una classe di sistemi di equazioni differenziali ordinarie non lineari (pres. da M. PICONE, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	Pag. 493
M. CINQUINI-CIBRARIO. — Una proprietà degli integrali delle equazioni ellittico-paraboliche del secondo tipo misto (pres. da E. BOMPIANI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	502
G. FICHERA. — Un teorema generale sulla struttura delle funzioni iperarmoniche (pres. da M. PICONE, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	511
K. POPOFF. — Sugli integrali di alcune equazioni differenziali considerate come funzioni dei parametri che vi figurano, per grandi valori dei parametri (pres. da E. BOMPIANI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	524
G. BOAGA. — Sulla variazione della pressione nell'interno della Terra (pres. da G. CASSINIS, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	532
A. SACCHETTI. — Variabilità e correlazione intra ed interrazziale. Nota preliminare (pres. da S. SERGI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	537

FASCICOLO 10.

MARZO 1942-XX.

NOTE

F. SEVERI. — Sulla irregolarità superficiale d'una varietà algebrica	548
T. R. BACHILLER. — Sulle superficie del quarto ordine contenenti una conica (pres. dall'Accademico F. SEVERI)	556
A. MAMBRIANI. — Equazioni lineari e omogenee alle differenze finite aventi soluzioni polinomiali (pres. da E. BOMPIANI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	563
C. TOLOTTI. — Sul calcolo delle vibrazioni trasversali di un'asta elastica soggetta a sforzo assiale (pres. da M. PICONE, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	572
M. CIMINO. — Osservazioni meridiane di ascensioni rette di Marte, Giove, Saturno ed Urano nel 1941 e nel 1942 (pres. da G. ARMELLINI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	585
L. GIALANELLA. — Sulle relazioni tra luminosità e colore dei nuclei cometari. — III. La cometa Van Gent-Bernasconi (1941 d) (pres. da G. ARMELLINI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	597
C. MORELLI. — Estensione alla quarta approssimazione della trigonometria dei piccoli triangoli curvilinei sopra una superficie qualunque (pres. da F. VERCELLI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	608
G. BOAGA. — Sulla variazione della pressione nell'interno della Terra con riferimento a variazione discontinua di densità (pres. da G. CASSINIS, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	619
C. CIACCIO. — Contributo all'istochimica delle cellule cromaffini della midolla surrenale. Nota I	626

A. STEFANELLI. - La specificità parassitaria dei Nictetibidi (<i>Diptera Pupipara</i>) indagata sperimentalmente (pres. dall'Accademico F. SILVESTRI)	Pag. 630
Id. - Il parassitismo della <i>Nycteribosca africana</i> ; Walk (fam. <i>Streblidae</i> , <i>Diptera Pupipara</i>) (pres. dall'Accademico F. SILVESTRI)	636

FASCICOLO 11.

APRILE 1942-XX.

NOTE

D. CALIGO. - Complementi alla valutazione asintotica delle funzioni di Sturm-Liouville (pres. dall'Accademico F. SEVERI)	643
U. CISOTTI. - Immagine geometrica di un tensore isotropo	651
G. ABETTI. - Altezza della cromosfera nel 1941 e andamento del ciclo solare	654
P. E. VALLE. - Nuovo metodo per la determinazione delle coordinate ipocentrali di un terremoto lontano (pres. dall'Accademico A. LO SURDO)	656
G. COCCONI. - I secondari dei mesotroni esaminati con la camera di Wilson (pres. da G. POLVANI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	663
S. SERGI. - Sulla morfologia cerebrale del secondo paleantropo di Saccopastore	670
G. BRUNELLI. - La siringe quale adattamento dell'organo di fonazione alla vita aerea	683
D. LOMBARDI. - Una nuova larva di Tricottero del lago Margherita (pres. da G. BRUNELLI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	688

FASCICOLO 12.

MAGGIO-GIUGNO 1942-XX.

NOTE

G. GIORGI. - Formole per la derivazione a indice generalizzato	693
G. GHERARDELLI. - Sul sistema Jacobiano di un sistema lineare di curve sopra una superficie algebrica (pres. dall'Accademico F. SEVERI)	702
M. TOGNETTI. - Determinazione geometrico-funzionale del gruppo delle terne di punti doppi delle curve di un sistema lineare ∞^3 , ciascuna dotata di tre punti doppi (pres. dall'Accademico F. SEVERI)	711
M. VILLA. - Trasformazioni quadratiche osculatrici ad una corrispondenza puntuale fra piani proiettivi. - I. Le proiettività caratteristiche (pres. da E. BOMPIANI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	718
G. ZAPPA. - Sulle direttrici di grado virtuale minimo d'una rigata algebrica di genere $p > 0$ (pres. dall'Accademico F. SEVERI)	725

G. LAMPARIELLO. — Generalizzazione del teorema di Jacobi della meccanica analitica ai sistemi anolonomi (pres. dall'Accademico G. GIORGI)	Pag. 734
M. PASTORI. — Sulle discontinuità dei potenziali poliarmonici (pres. da U. CISOSSI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia).	741
G. ARMELLINI. — I problemi fondamentali della Cosmogonia e la legge di Newton nel caso di più paneti. Nota IX	748
C. SOMIGLIANA. — Complemento alla Nota: Sull'ellitticità dell'equatore terrestre.	755
V. CAGLIOTI, G. GIACOMELLO e E. BIANCHI. — L'analisi strutturale ed i legami chimici. Ricerche sui polimetafosfati: trimetafosfato di sodio (pres. dall'Accademico F. GIORDANI)	761
F. LANFRANCHI. — Su alcuni nicotinil-aminotiazoli. — I. 2-nicotinilamino-4-metil-tiazolo e 2-nicotinilamino-4-fenil-tiazolo (pres. da S. VISCO, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	776
M. GORTANI. — Gli «Strati di Graua», orizzonte mesocretaceo dell'Africa Orientale Italiana.	782
A. M. MACCAGNO. — Zoantari maestrichtiani della Tripolitania (pres. da G. CHECCHIA-RISPOLI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia).	786
E. TRIA. — Rame e catalasi (pres. da S. VISCO, Aggregato alla R. Accademia d'Italia).	801
Id. — Catalasi e scorbuto umano (pres. da S. VISCO, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	806
Id. e G. FABRIANI. — Preparazione di una proteina allo stato cristallino dai semi di <i>Canavalia ensiformis</i> (pres. da S. VISCO, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	815
G. SOLARINO e G. GIORGIO. — È la sindrome da alimentazione maidica nella cavia legata alla carenza di un nuovo fattore vitaminico ? (pres. da C. CIACCIO, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	819

INDICE PER AUTORI	Pag. 1111
INDICE PER MATERIE	1118
INDICE DEL VOLUME	1212



3 8198 304 934 902

UNIVERSITY OF ILLINOIS AT CHICAGO

